目　录

第十一章 无穷级数

无穷级数的理论，不仅是数学分析的重要组成部分，而且也是整个高等数学必不可少的内容。例如，有些微分方程的解不能用初等函数表示，但却可以用无穷级数表示，这说明无穷级数是表示非初等函数的一种方法。此外，无穷级数又是近似计算初等超越函数或某些非初等函数在给定点的函数值的有力工具。

无穷级数分为数值级数和函数级数两大类。从本章起至第十四章我们讨论无穷级数。

§11.1 基本概念

假设给定一个数列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots \tag{11.1}$$

将它的各项顺次用"+"联接起来，即

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots \tag{11.2}$$

或简写为$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，称为**无穷数值级数**，或简称为**级数**，其中 a_1，a_2，a_3，$\cdots$，a_n，$\cdots$分别称为级数（11.2）的第一项，第二项，第三项，$\cdots$，第n项，$\cdots$。第 n 项a_n也称为级数（11.2）的**一般项**或**通项**。

级数（11.2）的前 n 项和

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$$

称为该级数的部分和或n项部分和。令$n=1,2,\cdots$得到由级数部分和构成的数列$\{S_n\}$

$$\begin{aligned}
&S_1=a_1\\
&S_2=a_1+a_2\\
&S_3=a_1+a_2+a_3\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\tag{11.3}$$

定义 如果级数（11.2）的部分和数列$\{S_n\}$收敛，设$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$（有限数），则称级数（11.2）收敛，并称$S$为级数（11.2）的和，记作

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S$$

如果部分和数列$\{S_n\}$发散，即数列$\{S_n\}$没有极限，则称级数（11.2）发散。发散级数没有和。

例1 研究首项为$a\neq0$，公比为r的几何级数（或等比级数）

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots\tag{11.4}$$

的敛散性①。

解 它的部分和为

$$S_n=a+ar+\cdots+ar^{n-1}$$

当$r\neq1$时，$S_n=a\dfrac{1-r^n}{1-r}$

当$|r|<1$时，有

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}a\frac{1-r^n}{1-r}=a\frac{1-\lim\limits_{n\to\infty}r^n}{1-r}=\frac{a}{1-r}$$

级数（11.4）收敛，其和$S=\dfrac{a}{1-r}$

---

①敛散性指级数收敛性与发散性。

当 $|r|>1$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$，级数（11.4）发散。

当 $r=1$ 时，$S_n=a+a+\cdots+a=na$，同样有 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$，级数(11.4)也发散。

当 $r=-1$ 时，由于 $S_n=\begin{cases} a, & \text{当 } n \text{ 为奇数时，} \\ 0, & \text{当 } n \text{ 为偶数时，} \end{cases}$

因此，部分和数列$\{S_n\}$发散，即级数（11.4）发散。

综上所述，我们得到，几何级数当 $|r|<1$ 时，收敛，其和为$\frac{a}{1-r}$；当 $|r|\geqslant 1$ 时，发散。

利用几何级数的敛散性，可将任何一个无限循环小数化为分数。例如，循环小数$0.2\dot{3}\dot{5}$。先把它改写成

$$0.2\dot{3}\dot{5}=0.2353535\cdots$$

$$=\frac{2}{10}+\left[\frac{35}{1000}+\frac{35}{100000}+\cdots\right]$$

等式右端方括号内是首项 $a=\frac{35}{1000}$，公比 $r=\frac{1}{100}$ 的几何级数。因为公比的绝对值小于1，所以它收敛，其和是

$$\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{35}{1000}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{35}{1000}\cdot\frac{100}{99}=\frac{35}{990}$$

于是，

$$0.2\dot{3}\dot{5}=\frac{2}{10}+\left[\frac{35}{1000}+\frac{35}{100000}+\cdots\right]=\frac{2}{10}+\frac{35}{990}$$

$$=\frac{99\times2+35}{990}$$

再如，循环小数$5.041\dot{7}3\dot{6}$，有

$$5.041\dot{7}3\dot{6}=5.041736736\cdots$$

$$=5+\frac{41}{1000}+\left[\frac{736}{10^6}+\frac{376}{10^9}+\cdots\right]$$

等式右边方括号内是首项 $a=\frac{736}{10^6}$，公比 $\frac{1}{10^3}$ 的几何级数，其和为

$$\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{736}{10^6}}{1-\frac{1}{10^3}}=\frac{736}{999000}$$

于是，

$$5.0\dot{4}1\dot{7}36=5+\frac{41}{1000}+\left[\frac{736}{10^6}+\frac{736}{10^9}+\cdots\right]$$

$$=5+\frac{41}{1000}+\frac{736}{999000}$$

$$=5+\frac{41\times999+736}{999000}$$

由此可以看出，把循环小数化为分数的规律是：小数的整数部分即为分数的整数部分，分数的分母是由几个相同数字 9 和 0 由左向右排列而成（9 在前，0 在后），9 的个数是循环节中所含数字的个数，0 的个数是小数点后至第一个循环节前的位数（第一个例子是两个 9 一个 0，第二个例子是三个 9 三个 0）；分数的分子是第一个循环节前的有效数字所组成的整数（第一个例子是 2，第二个例子是41）与若干个 9 的乘积，其个数是循环节中所含数字的个数，再加上循环节所组成的整数（第一个例子是35，第二个例子是736）。

例 2 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$ 的敛散性。

解 因为，

$$\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

所以

$$S_n=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{(n-1)(n+1)}+\frac{1}{n(n+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right]$$

有
$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right]=\frac{3}{4}$$

于是，该级数收敛，其和为$\frac{3}{4}$。

例3 判别级数

$$\ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots$$

的敛散性。

解 因为

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(n+1)-\ln n$$

所以，

$$S_n=\ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$=\ln 2-\ln 1+\ln 3-\ln 2+\cdots+\ln(n+1)-\ln n$$
$$=\ln(n+1)$$

有
$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\ln(n+1)=+\infty$$

于是，该级数发散。

例4 证明，调和级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots \tag{11.5}$$

是发散的。

分析 根据定理2.23的等价叙述，只须证明$\{S_n\}$的某一个

子列$\{S_k\}$发散即可。

证明 取部分和数列$\{S_n\}$的一个子列$\{S_{2^m}\}$，即

$$S_2,\ S_4,\ S_8,\ \cdots,\ S_{2^m},\ \cdots$$

因为，

$$S_{2^m}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{2^{m-1}+1}+\frac{1}{2^{m-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^m}\right),$$

其中每个括号的和数皆大于$\frac{1}{2}$。事实上，

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

....

$$\frac{1}{2^{m-1}+1}+\frac{1}{2^{m-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^m}>2^{m-1}\cdot\frac{1}{2^m}=\frac{1}{2}$$

所以，

$$S_{2^m}>1+\underbrace{\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{m\text{个}}=1+\frac{m}{2}$$

对上式取极限，令$m\to+\infty$有

$$\lim_{m\to\infty}S_{2^m}\geqslant\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{m}{2}\right)=+\infty$$

从而，$\lim\limits_{m\to\infty}S_{2^m}=+\infty$，根据定理2.23，部分和数列$\{S_n\}$发散，于是调和级数（11.5）发散。 □

§11.2 基本性质

定理11.1 如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，其和为$S$，则将级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 各项乘以常数 c 所得到的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ 也收敛，其和为 cS。

证明 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ 的 n 项部分和分别为 S_n 与 $\overline{S}_n$，有

$$\overline{S}_n = ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = cS_n$$

已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$，有

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = \lim_{n\to\infty} cS_n = cS$$

于是，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ 收敛，其和为 cS。 □

推论 如果常数 $c \neq 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ 有相同的敛散性。

证明 一方面，根据定理，如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ 也收敛。

另一方面，如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ 也必发散。用反证法。假设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ 收敛，根据定理11.1，各项乘以常数 $\frac{1}{c}$ $(c \neq 0)$ 所得到的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c}(ca_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛，

这与假设级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散矛盾。

这就证明了级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$（$c \neq 0$）有相同的敛散性。 □

此定理及推论可以概括为：将级数各项乘以非零常数，级数的敛散性不变。若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则有等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

定理11.2 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$皆收敛，其和分别为S与T，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$也收敛，其和为$S \pm T$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

证明 设级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$、$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$及$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$的部分和分别为$S_n$、$T_n$及$U_n$，则

$$U_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k = S_n \pm T_n$$

已知$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$，$\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$，有

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}(S_n \pm T_n) = S \pm T$$

于是，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$收敛，其和为$S \pm T$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$ □

推论 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，而级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$发散，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$发散。

证明 用反证法。假设级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$收敛，根据定理11.2知，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}[(a_n \pm b_n)-a_n]=\sum_{n=1}^{\infty}(\pm b_n) = \pm\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

也收敛，这与题设级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$发散矛盾。 □

定义 从级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$中去掉前n项所得到的级数

$$a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}+\cdots \tag{11.6}$$

称为级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$的第n项余式或余式，记作R_n，即

$$R_n = a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots a_{n+p}+\cdots$$

如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，其和为S，称余式

$$R_n=\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = S-S_n$$

为级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$的余和。

发散级数没有和，从而也没有余和。

由级数收敛及余和的定义不难推出，级数收敛的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0 \tag{11.7}$$

事实上，级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛$\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S \Longleftrightarrow$

$\lim_{n\to\infty}(S - S_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} R_n = 0$。

定理11.3 级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与它的任一余式$\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$同时收敛，同时发散。

证明 对任意固定的k和$m>k$，设级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$的n项部分和与$\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$的$m$项部分和分别为$S_n$与$\bar{S}_{k+m}$，有

$$S_{k+m} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) + (a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+m})$$
$$= S_k + \bar{S}_{k+m}$$

即 $\bar{S}_{k+m} = S_{k+m} - S_k$（$S_k$为常数）。

不难看出，对上式取极限，当$m\to\infty$时，$\bar{S}_{k+m}$与S_{k+m}同时收敛，同时发散，即级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与它的任一余式$\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$同时收敛，同时发散。 □

推论 在级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$前面去掉、增添或改变有限项，不改变原级数的敛散性（如果收敛，其和一般是要变的）。

证明 因为在级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$前面去掉、增添或改变有限项之后，当n充分大时，所得到的新级数与原级数有相同的余式R_n，所以，根据定理11.3，变化后的新级数与原级数有相同的敛散性。 □

定理11.4 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$。

证明 设级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$的部分和为 S_n，和为S，有

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$
$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$$

于是，

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

从而，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0 \quad \square$$

该定理指出：如果级数收敛，则它的一般项必收敛于0。换言之，一般项收敛于0是级数收敛的必要条件。定理11.4的等价命题（逆否定理）是：如果 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。利用 $\lim_{n\to\infty} a \neq 0$ 来判别某些级数的发散性是很方便的。

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ 有两种情形：一是，$\lim_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$，例如级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$，因为 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}$发散；二是，$\{a_n\}$不存在极限，如级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$，$a_n = (-1)^{n+1}$，因为$\{(-1)^{n+1}\}$不存在极限，所以$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$发散。

由于级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$的敛散性就是用级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列$\{S_n\}$的敛散性定义的，而$\{S_n\}$的敛散性可用数列的柯西收敛准则来判别。因此，把数列的柯西收敛准则转移到级数上来就有判别级数敛散性的柯西收敛准则。我们知道数列$\{S_n\}$的柯西收

敛准则是：数列$\{S_n\}$收敛的充要条件是，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$n_0\in N$，当 $n>n_0$时，对任意的$p\in N$，有$|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$。

如果数列$\{S_n\}$就是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的部分和数列，则有

$$|S_{n+p}-S_n|=\left|\sum_{k=1}^{n+p}a_k-\sum_{k=1}^{n}a_k\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k\right|$$

$$=|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon$$

由此，我们得到下面关于级数的柯西收敛准则：

定理11.5 （柯西收敛准则）级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛的充要条件是：对任意给定的$\varepsilon>0$，存在 $n_0\in$ N，当$n>n_0$时，对任意的$p\in$ N，有

$$|S_{n+p}-S_n|=|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k\right|<\varepsilon$$

该准则表明，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛的充分必要条件是：它的充分远的任意片断$\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}a_k$的绝对值$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}a_k\right|$可以任意小。

显然，定理11.3定理11.4都是柯西收敛准则的推论。

事实上，由于级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_n$和它的余式$\sum\limits_{n=k+1}^{\infty}a_n$有共同的充分远的片断，因此，它们就同时满足或同时不满足柯西收敛准则的条件，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与它的余式$\sum\limits_{n=k+1}^{\infty}a_n$有相同的敛散性，这就证明了定理11.3。

至于定理11.4，已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，根据柯西收敛准则，

对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在$n_0\in N$，当 $n>n_0$时，特别是取 $p=1$，有

$$|S_{n+1}-S_n|=|a_{n+1}|<\varepsilon$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}=0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$

上面用柯西收敛准则证明定理11.3时，曾提到级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$与它的余式$\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n$可同时满足或同时不满足柯西收敛准则条件。那么什么叫级数不满足柯西收敛准则呢？即柯西收敛准则的否定叙述，否定的方法是：将柯西收敛准则中的“收敛”改为“发散”，“任意”改为“某个”，“某个”改为“任意”，不等号“<”改为“≥”。这时我们得到：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$发散的充要条件是：存在某个 $\varepsilon_0>0$，对任意的 $n\in N$存在某个 $n_0\geqslant n$ 和某个$p_0\in N$，有

$$|S_{n_0+p_0}-S_{n_0}|=\left|\sum_{k=n_0+1}^{n_0+p_0} a_k\right|\geqslant\varepsilon_0$$

为了更好地掌握两种形式的叙述，现列表对比如下：

级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$的柯西收敛准则	柯西收敛准则的否定叙述
级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛$\Longleftrightarrow$	级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$发散$\Longleftrightarrow$
对任意给定的$\varepsilon>0$	存在某个$\varepsilon_0>0$
存在某个$n_0\in N$	对任意的 $n\in N$
当(任意的)$n>n_0$ 时	存在某个$n_0>n$
对任意 $p\in N$	和某个$p_0\in N$
有$\|S_{n+p}-S_n\|=\left\|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k\right\|<\varepsilon$	$\|S_{n_0+p_0}-S_{n_0}\|=\left\|\sum\limits_{k=n_0+1}^{n_0+p_0} a_k\right\|\geqslant\varepsilon_0$

例 1 判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}\right)$的敛散性。

解 因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}$ 都是几何级数， 而公比分别是$\frac{1}{3}$与$\frac{1}{4}$， 它们的绝对值皆小于 1， 所以都收敛（见§11.1 例 1）。根据定理11.2知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}\right)$收敛。

例 2 证明，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 是发散的。

证明 根据定理11.1推论知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 具有相同的敛散性。已知调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$也发散。

例 3 利用柯西收敛准则，判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{3^n}$的敛散性。

解 对任意给定的$\varepsilon>0$和任意的 $p\in N$，有

$$\left|\frac{\cos(n+1)x}{2^{n+1}}+\frac{\cos(n+2)x}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{\cos(n+p)x}{2^{n+p}}\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{\cos(n+1)x}{2^{n+1}}\right|+\left|\frac{\cos(n+2)x}{2^{n+2}}\right|+\cdots+\left|\frac{\cos(n+p)x}{2^{n+p}}\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}}=\frac{\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^{n+p+1}}}{1-\frac{1}{2}}<\frac{1}{2^n}<\varepsilon$$

即$2^n>\frac{1}{\varepsilon}$，或$n>\dfrac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}$。取 $n_0=\left[\dfrac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}\right]$。于是对任意给定的$\varepsilon>0$，存在 $n_0\in N$，当$n>n_0$时，对任意的 $p\in N$，有

$$\left|\frac{\cos(n+1)x}{2^{n+1}}+\frac{\cos(n+2)x}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{\cos(n+p)x}{2^{n+p}}\right|<\varepsilon$$

即该级数收敛。

例 4　利用柯西收敛准则的否定叙述，证明级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\sqrt{n}}$发散。

证明　存在某个 $\varepsilon_0=\frac{1}{8}>0$，对任意的 $n\in\mathbf{N}$，存在某个 $n_0>n$和某个 $p_0=n_0$，有

$$|S_{n_0+p_0}-S_{n_0}|=|S_{2n_0}-S_{n_0}|=\left|\frac{1}{n_0+1+\sqrt{n_0+1}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n_0+2+\sqrt{n_0+2}}+\cdots\frac{1}{2n_0+\sqrt{2n_0}}\right|\geqslant\frac{n_0}{2n_0+\sqrt{2n_0}}$$

$$\geqslant\frac{n_0}{2n_0+2n_0}=\frac{1}{4}>\frac{1}{8}=\varepsilon_0$$

即级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\sqrt{n}}$发散。

§11.3　同号级数

定义　如果 $a_n\geqslant 0\ (n=1,2,\cdots)$，则称级数

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \tag{11.8}$$

为正项级数（实际上是非负级数）。

如果 $b_n\leqslant 0\ (n=1,2,\cdots)$，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$为负项级数。

正项级数与负项级数统称为同号级数。

将负项级数各项乘以 -1就变成正项级数，且敛散性不变（定理11.1）。因此，本书主要讨论正项级数。

对于正项级数

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots, \tag{11.8}$$

因为 $a_n\geqslant 0\ (n=1,2,\cdots)$ ，所以

$$S_n\leqslant S_n+a_{n+1}=S_{n+1} \qquad (n=1,2,\cdots)$$

于是，正项级数（11.8）的部分和数列$\{S_n\}$是递增数列．如果正项级数的部分和数列$\{S_n\}$有上界，根据单调有界定理知，部分和数列$\{S_n\}$收敛，即级数收敛．反之，如果部分和数列$\{S_n\}$无上界，则部分和数列$S_n\to+\infty(n\to\infty)$，从而级数发散．综上所述有如下定理：

定理11.6 （正项级数收敛原理） (i) 如果正项级数（11.8）的部分和数列$\{S_n\}$有上界，则此级数收敛． (ii) 如果正项级数（11.8）的部分和数列$\{S_n\}$无上界，则此级数发散．

例1 研究广义调和级数（又称P级数）

$$1+\frac{1}{2^P}+\frac{1}{3^P}+\cdots+\frac{1}{n^P}+\cdots \tag{11.9}$$

（其中P为任意实数）的敛散性．

解 1° 当$P=1$时级数（11.9）就是调和级数（11.5），故发散．

2° 当$P<1$时，因为$\frac{1}{n^P}>\frac{1}{n}$，所以，

$$S_n=1+\frac{1}{2^P}+\frac{1}{3^P}+\cdots+\frac{1}{n^P}>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=S_n' \tag{1}$$

由于调和级数的部分和数列$\{S_n'\}$发散到$+\infty$（见§11.1例4），因此，调和级数的部分和数列$\{S_n'\}$无上界，故由（1）式知$\{S_n\}$也无上界，于是根据正项级收敛原理知，当$P<1$时广义调和级数发散．

3° 当$P>1$时，对任意$n\in \boldsymbol{N}$，取充分大的自然数k，使得$2^k>n$，有

$$S_n=1+\frac{1}{2^P}+\frac{1}{3^P}+\frac{1}{4^P}+\frac{1}{5^P}+\frac{1}{6^P}+\frac{1}{7^P}+\frac{1}{8^P}+\cdots+\frac{1}{n^P}$$

$$\leqslant 1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{(2^{k-1})^p}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(2^k-1)^p}\right)<1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{8^p}+\frac{1}{8^p}+\frac{1}{8^p}+\frac{1}{8^p}+\frac{1}{8^p}+\frac{1}{8^p}+\frac{1}{8^p}+\frac{1}{8^p}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{(2^{k-1})^p}+\frac{1}{(2^{k-1})^p}+\cdots+\frac{1}{(2^{k-1})^p}\right)$$

$$=1+\frac{2}{2^p}+\frac{4}{4^p}+\frac{8}{8^p}+\cdots+\frac{2^{k-1}}{(2^{k-1})^p}$$

$$=1+\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{4^{p-1}}+\frac{1}{8^{p-1}}+\cdots+\frac{1}{(2^{k-1})^{p-1}}$$

$$=1+\frac{1}{2^{p-1}}+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{k-1}$$

$$=\frac{1-\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{k-1+1}}{1-\frac{1}{2^{p-1}}}<\frac{2^{p-1}}{2^{p-1}-1}$$

这说明级数（11.9）的部分和数列$\{S_n\}$有上界，根据正项级数收敛原理知，该级数收敛。

总之，广义调和级数当$P\leqslant 1$时发散；当$P>1$时收敛。

判别某些正项级数敛散性，常常要与广义调和级数进行比较，因此，广义调和级数处于一个重要的地位。

正项级数收敛原理是判别正项级数敛散性的基本定理。由此定理出发，可以导出一个比较判别法，再根据比较判别法，又可导出几个简便的敛散性判别法。

定理11.7　（比较判别法）设有二正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$，存在自然数$N$，当$n\geqslant N$时，有

$a_n\leqslant cb_n$（c为正的常数）

1° 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛；

2° 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$发散.

证明 1° 根据定理11.3推论，不妨设对任意$n\in N$，有$a_n\leqslant cb_n$这样，并不失去证明的一般性.

设级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$的部分和分别是A_n与B_n，有

$$A_n=\sum_{k=1}^{n} a_k\leqslant\sum_{k=1}^{n} cb_k=cB_n\ (n=1,2,\cdots) \qquad (2)$$

若$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，则B_n有上界，设为M，即$B_n\leqslant M$ ($n=1,2,\cdots$)，由不等式（2）得级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$的部分和A_n有上界cM. 根据正项级数收敛原理知，级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛.

2° 用反证法. 假设级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，由1°可推得级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$也收敛，这与题设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散矛盾. □

推论 设有二正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ($b_n>0$，$n=1,2,\cdots$)，如果有极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=c,$$

则 1° 当$0<c<+\infty$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$同时收敛，或

同时发散；

2° 当 $c=0$ 时， 由级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，可推得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$也收敛；

3° 当 $c=+\infty$时， 由级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散，可推得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$也发散。

证明 1° 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=c$，且 $0<c<+\infty$，根据极限定义，对 $\varepsilon_0=\frac{c}{2}>0$，存在 $n_0\in N$，当 $n>n_0$时，有

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-c\right|<\frac{c}{2}\text{或}\frac{c}{2}b_n<a_n<\frac{3c}{2}b_n \qquad (3)$$

由不等式（3）的右端和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，根据比较判别法之1°知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛；而由不等式（3）的左端和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散，根据比较判别法之2°知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散。

2° 当 $c=0$ 时， 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$，即对$\varepsilon=1$，存在$n_0\in N$，当 $n>n_0$ 时，有 $0<\frac{a_n}{b_n}<1$，即

$$a_n<b_n \ (\text{当}n>n_0\in N\text{时})$$

根据比较判别法之1°，由级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛推得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛。

3° 当 $c=+\infty$时，有$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=+\infty$，（$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$为正无穷

大量）根据正无穷大的定义，对 $M=1$，存在 $n_0\in N$，当$n>n_0$时，有$\frac{a_n}{b_n}>1$，即

$$b_n<a_n\ (\text{当}\ (n>n_0\in N\text{时})$$

根据比较判别法之2°，由级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$发散，推得级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$也发散。 □

例 2　判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^4+1}}$的敛散性。

解　因为 $\frac{1}{\sqrt[3]{n^4+1}}<\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ $(n=1, 2,\cdots)$，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$收敛（$P$级数，$P=\frac{4}{3}>1$），所以，根据比较判别法之1°知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^4+1}}$收敛。

例 3　判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(16n-1)^{\frac{5}{4}}}$的敛散性。

解　因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(16n-1)^{\frac{5}{4}}}}{\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}}=\frac{1}{32}$，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$收敛（$P$级数，$P=\frac{5}{4}>1$），所以，根据比较判别法推论知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(16n-1)^{\frac{5}{4}}}$收敛。

比较判别法不但可用来直接判别某些给定的正项级数的敛散性，而且可导出许多既简单又实用的判别法．下面就用比较

判别法推导出著名的柯西及达兰贝尔[①]两个判别法。

定理11.8 （柯西判别法）设有正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，

1° 如果存在正数 $r<1$ 和 $n_0\in N$，当 $n\geqslant n_0$时，有

$$\sqrt[n]{a_n}\leqslant r<1$$

则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛；

2° 如果有无穷多个 n，使得

$$\sqrt[n]{a_n}\geqslant 1$$

则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散。

证明 1° 设当 $n\geqslant n_0$时，$\sqrt[n]{a_n}\leqslant r<1$，即

$$a_n\leqslant r^n$$

而几何级数$\sum_{n=1}^{\infty} r^n$收敛（公比$|r|<1$），根据比较判别法知，级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛。

2° 设有无穷多个 n，使得$\sqrt[n]{a_n}\geqslant 1$，即有无穷多个 n 使得$a_n\geqslant 1$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\neq 0$，根据级数收敛的必要性知，级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散。 □

推论（又称根值判别法）设有正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$。如果

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}=l$$

---

① 达兰贝尔：D'Alembert, J.L.R.法国数学家，1717—1783。

则　1°当 $l<1$ 时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛；

2°　当 $l>1$ 时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散；

3°　当 $l=1$ 时，敛散性不能确定。

证明　1°　设 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$，且$l<1$．存在 $\varepsilon_0>0$，使得 $l+\varepsilon_0<1$．于是存在 $n_0\in N$，当 $n\geqslant n_0$ 时，有

$$\sqrt[n]{a_n}<l+\varepsilon_0<1$$

根据柯西判别法1°知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛。

2°　设 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$，且 $l>1$，存在$\varepsilon_0>0$，使得 $l-\varepsilon_0>1$．于是，存在 $n_0\in N$，当 $n\geqslant n_0$时，有

$$\sqrt[n]{a_n}>l-\varepsilon_0>1$$

根据柯西判别法之2°知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散。

3°　例如级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，虽然都有

$l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}=1$①，但前者发散，后者收敛．故当 $l=1$ 时，级的数散性不能确定，这时不能用此判别法判别级数的敛散性。　□

---

①因为 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$，所以，$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim e^{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln x$ $=e^0=1$。

例 4 判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3^n}$的敛散性。

解 因为，

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2n}{3^n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}}{3}=\frac{1}{3}<1$$

所以，根据柯西判别法推论知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3^n}$收敛。

定理11.9(达兰贝尔判别法) 设有正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ $(a_n>0,$ $n=1,2,\cdots)$.

1° 如果存在正数$r<1$和 $n_0\in N$，使得当$n\geqslant n_0$时，有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant r<1$$

则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛；

2° 如果存在 $n_0\in N$，使得当 $n\geqslant n_0$时，有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant 1$$

则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散。

证明 1° 根据定理11.3，不妨设 $n_0=1$，即当 $n\geqslant 1$时，有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant r<1 \qquad (n=1,2,\cdots)$$

从而有

$$a_2\leqslant a_1r$$
$$a_3\leqslant a_2r\leqslant a_1r^2$$
$$\cdots\cdots$$

$$a_n \leqslant a_{n-1} r \leqslant \cdots \leqslant a_1 r^{n-1}$$

即 $$a_n \leqslant a_1 r^{n-1}$$

由于几何级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 r^{n-1}$ （$|r|<1$）收敛，于是，根据比较判别法知，级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛。

2° 由于当$n \geqslant n_0$时，有$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$，即

$$a_{n+1} \geqslant a_n \qquad (n \geqslant n_0)$$

于是$\{a_n\}$为递增的正数列，故 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$，根据定理11.4（级数收敛的必要性）知，级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散。 □

推论（比值判别法）设有正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$（$a_n > 0$，$n \in N$）。如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

则 1° 当$l < 1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛；

2° 当$l > 1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散；

3° 当$l = 1$时，敛散性不能确定。

证明 1° 设 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$，且$l < 1$。存在$\varepsilon_0 > 0$，使得$l + \varepsilon_0 < 1$，于是存在 $n_0 \in N$，当 $n \geqslant n_0$时，有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon_0 < 1$$

根据达兰贝尔判别法1°知，级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛。

2° 当$l>1$时，存在 $\varepsilon_0>0$，使得$l-\varepsilon_0>1$。于是，存在自然数 n_0，当 $n\geq n_0$时，有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}>l-\varepsilon_0>1$$

根据达兰贝尔判别法2°知，级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散。

3° 例如，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，虽然都有$l=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}=1$，但前者发散，后者收敛，故当 $l=1$ 时，级数的敛散性不能确定。 □

例 5 判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$的敛散性。

解 因为，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1$$

所以，根据达兰贝尔判别法知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$收敛。

判别级数的敛散性，经常使用的是柯西判别法和达兰贝尔判别法的推论。一般说来，级数的通项a_n的表达式含有 n 次方

的因子时，应用柯西判别法较为方便；而含$n!$因子时，则应用达兰贝尔判别法较为适宜。

最后，我们再介绍一种比柯西判别法和达兰贝尔判别法更精确的判别法——拉阿伯① 判别法．在第十三章中，我们要用拉阿伯判别法判别某些函数的马克劳林级数在收敛区间端点上的收敛性．但是，由于用的不多，因此在本章只给出判别法内容，而不加证明②．

拉阿伯判别法 设有正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n>0, n\in N)$．

如果

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=l$$

则 1° 当 $l>1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛；

2° 当 $l<1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散；

3° 当 $l=1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$的敛散性不能确定。

例如，级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}$ 用达兰贝尔判别法不能判定它的敛散性，但用拉阿伯判别法能判定它是收敛的。

事实上，因为

$$l=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}}{\dfrac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!(2n+3)}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+5n}{4n^2+4n+1}$$

①拉阿伯：Raabe, J.L瑞士数学家．1801—1868．

②证明见微积分学教程第二卷第二分册（Г．М菲赫金哥尔茨著）第360页。

$$=\frac{3}{2}>1$$

所以，根据拉阿伯判别法知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}$收敛。

§11.4 变号级数

上节我们讨论了数值级数中一类比较特殊的级数——同号级数（主要是正项级数），这一节将讨论一般的数值级数——变号级数。所谓变号级数是指在级数中，既有无限多个正项，又有无限多个负项的级数。只有有限个负项（或正项）的级数，实际上就是从某一项a_N起，它后面的所有项皆为正项（或负项）的级数。这类级数的敛散性实质上可化为正项级数去讨论。我们先讨论一种特殊的变号级数——交错级数，然后再转向研究一般的变号级数。

一 交错级数收敛判别法

定义 如果级数各项是正负相间的，即

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+(-1)^{n+1}a_n+\cdots \quad (11.10)$$

其中 $a_n>0$，$n=1,2,\cdots$，则称此级数是交错级数。

下面给出莱布尼茨①关于交错级数收敛的判别法：

定理11.10（莱布尼茨判别法） 如果交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$（$a_n>0$，$n=1,2,\cdots$）满足条件：

（1）$a_n\geqslant a_{n+1}$（$n=1,2,\cdots$）；

（2）$a_n\to 0$（$n\to\infty$）。

①莱布尼茨，Leibniz, G. W，德国数学家，1646—1716。

则 1° 交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$收敛；

2° 余和 $|R_n|<a_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$.

分析 根据级数收敛定义，证明交错级数部分和数列$\{S_n\}$存在极限。为此，只须证明$\{S_n\}$的偶子列$\{S_{2n}\}$与奇子列$\{S_{2n+1}\}$皆收敛，且收敛于同一极限 S 即可(见第二章学习指导例11).

证明 1° 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ 的部分和为 S_n. 讨论$\{S_n\}$的偶子列$\{S_{2n}\}$

$$S_{2n}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{2n-1}-a_{2n})$$

一方面，因为$a_n\geqslant a_{n+1}$，即$a_n-a_{n+1}\geqslant 0$，所以$a_{2n-1}-a_{2n}\geqslant 0$ $(n=1,2,\cdots)$，故数列$\{S_{2n}\}$为递增数列；另一方面，因为$a_{2n-2}-a_{2n-1}>0$ $(n=2,3,\cdots)$，所以

$$S_{2n}=a_1-(a_2-a_3)-\cdots-(a_{2n-2}-a_{2n-1})-a_{2n}\leqslant a_1$$

故数列$\{S_{2n}\}$又是有上界的。于是，$\{S_{2n}\}$为递增有上界的数列。根据单调有界定理（定理2.8）知，偶子列$\{S_{2n}\}$存在极限，设极限为S，即

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=S \tag{1}$$

讨论$\{S_n\}$的奇子列$\{S_{2n+1}\}$我们有

$$S_{2n+1}=S_{2n}+a_{2n+1}$$

对上式取极限，由$a_n\to 0$ $(n\to\infty)$和（1）式有

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}+\lim_{n\to\infty}a_{2n+1}=S+0=S \tag{2}$$

由（1）与（2）有$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$，即交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ $(a_n>0,\ n=1,2,\cdots)$ 收敛.

2° 因为 $a_n>0$和 $a_n\geqslant a_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$，所以

$$\begin{aligned}|R_n|&=|(-1)^{n+2}a_{n+1}+(-1)^{n+3}a_{n+2}+\cdots|\\&=|a_{n+1}-a_{n+2}+a_{n+3}-a_{n+4}+\cdots|\end{aligned}$$

$$= (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \cdots$$

$$= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \cdots \leqslant a_{n+1}$$

即 $$|R_n| \leqslant a_{n+1}$$ □

2° 指出：收敛的交错级数，其余和的绝对值不超过余式中第一项的绝对值，它给出用 n 项部分和 S_n 近似代替和 S 所产生的误差的简便估算公式。

例1 证明，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \cdots \quad (11.11)$$

是收敛的。

证明 显然，给定级数满足条件：

(1) $a_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = a_{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

根据莱布尼茨判别法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 收敛。

现在我们来研究一般的变号级数的敛散性判别法。

二 绝对收敛级数收敛判别法

定理11.11（绝对收敛定理） 如果变号级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的每一项的绝对值所组成的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛。

证明 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛，所以，根据柯西收敛准则有，对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $n_0 \in N$，当 $n > n_0$ 时，对任意 $P \in N$，有

$$\left|\,|a_{n+1}|+|a_{n+2}|+\cdots+|a_{n+p}|\,\right|=(|a_{n+1}|+|a_{n+2}|+\cdots+|a_{n+p}|)<\varepsilon$$

而

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|\leqslant\left(|a_{n+1}|+|a_{n+2}|+\cdots+|a_{n+p}|\right)<\varepsilon$$

根据柯西收敛准则知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛。 □

例 2 判别$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-5)^n n!}{(2n)^n}$的敛散性。

解 考虑给定级数的绝对值级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(-5)^n n!}{(2n)^n}\right|$

$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(\frac{5}{2}\right)^n n!}{n^n}$。因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{\left(\frac{5}{2}\right)^n n!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{5}{2e}<1$$

所以，根据达兰贝尔判别法知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(-5)^n n!}{(2n)^n}\right|$收敛。由绝对收敛定理知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-5)^n n!}{(2n)^n}$收敛。

定理11.11 指出：凡是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，那么，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$一定收敛。从而，我们有如下定义。

定义 如果变号级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$的每一项绝对值所构成的（正项）级数$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$收敛，则称变号级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$是绝对收敛的。

定义 如果变号级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，而其绝对值级数$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$是发散的，则称此变号级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$是条件收敛的。

例如，上述的例2中给定的级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n n!}{(2n)^n}$是绝对收敛的。而例1中的级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$，由于它本身收敛，而其绝对值级数是调和级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$，是发散的，根据条件收敛定义知，级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$是条件收敛的。

三 一般变号级数收敛判别法

绝对收敛定理只能判别级数的绝对收敛性，而不能判别级数的条件收敛性。为了讨论级数的条件收敛性，本段将给出两个常用的一般变号级数收敛判别法：狄利克莱判别法与阿贝尔[①]判别法。为此，先给出阿贝尔变换和阿贝尔引理。

阿贝尔变换 设有两组实数

$$a_1, a_2, \cdots, a_n \text{ 和 } b_1, b_2, \cdots, b_n$$

如果 $B_k = b_1 + b_2 + \cdots + b_k$，$\Delta a_k = a_k - a_{k+1}$（$k = 1, 2, \cdots, n-1$），则

---

① 阿贝尔，Abel, N. H. 挪威数学家，1802—1829。

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} B_k \Delta a_k + B_n a_n \tag{11.12}$$

证明 $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$

由于 $b_1 = B_1, b_2 = B_2 - B_1, \cdots, b_n = B_n - B_{n-1}$，因此，有

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_1 B_1 + a_2 (B_2 - B_1) + \cdots + a_n (B_n - B_{n-1})$$

$$= B_1(a_1 - a_2) + B_2(a_2 - a_3) + \cdots + B_{n-1}(a_{n-1} - a_n) + B_n a_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} B_k \Delta a_k + B_n a_n$$

□

引理（阿贝尔） 如果两组实数

$a_1, a_2, \cdots, a_n$和 $b_1, b_2, \cdots, b_n$

满足条件：

（1）$a_1, a_2, \cdots, a_n$是单调的；

（2）存在正数A，对任一自然数 $k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 有

$|B_k| = |b_1 + b_2 + \cdots + b_k| \leqslant A$

则

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k a_k\right| \leqslant A(|a_1| + 2|a_n|) \tag{11.13}$$

证明 因为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是单调的，所以，$a_1 - a_2, a_2 - a_3, \cdots, a_{n-1} - a_n$是同号的。根据阿贝尔变换及$|B_k| \leqslant A$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$，有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| = |(a_1 - a_2)B_1 + (a_2 - a_3)B_2 + \cdots + (a_{n-1} - a_n)B_{n-1} + a_n B_n| \leqslant |a_1 - a_2||B_1| + |a_2 - a_3||B_2| + \cdots + |a_{n-1} - a_n||B_{n-1}| + |a_n||B_n|$$

$$\leqslant (|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \cdots + |a_{n-1} - a_n|)A + |a_n|A$$

$$=|a_1-a_2+a_2-a_3+\cdots+a_{n-1}-a_n|A+|a_n|A$$
$$\leqslant(|a_1|+|a_n|)A+|a_n|A$$
$$=(|a_1|+2|a_n|)A \qquad \square$$

特别地，当阿贝尔引理中的数组 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足条件

$$a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant 0$$

时，不等式(11.13)化为

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right|\leqslant a_1 A \tag{11.14}$$

下面利用阿贝尔引理，来证明狄利克莱判别法。

定理11.12 （狄利克莱判别法） 如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 满足条件：

（1）$a_n\geqslant a_{n+1}(n=1,2,\cdots)$，且 $a_n\to 0\ (n\to\infty)$；

（2）存在与n无关的正数 k，使得

$$|B_n|=|b_1+b_2+\cdots+b_n|\leqslant k \quad (n=1,2,\cdots)$$

则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛。

证明 由（1）有

$$a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant\cdots\geqslant 0 \tag{3}$$

由（2），对任意的 $n\in N$和 $p\in N$，有

$$|b_{n+1}+b_{n+2}+\cdots+b_{n+p}|=|B_{n+p}-B_n|$$
$$\leqslant(|B_{n+p}|+|B_n|)\leqslant 2k \tag{4}$$

由（3）和（4），根据阿贝尔引理有

$$|a_{n+1}b_{n+1}+a_{n+2}b_{n+2}+\cdots+a_{n+p}b_{n+p}|\leqslant 2ka_{n+1} \tag{5}$$

由（1）$a_{n+1}\to 0\ (n\to\infty)$，即对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$n_0\in N$，当 $n>n_0$时，有$|a_{n+1}|<\dfrac{\varepsilon}{2k}$。由（3）有$|a_{n+1}|=a_{n+1}$，故有

$$a_{n+1} < \frac{\varepsilon}{2k} \tag{6}$$

将（6）代入（5）中得

$$|a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + \cdots + a_{n+p}b_{n+p}| < \varepsilon$$

总之，对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在$n_0 \in N$，当 $n > n_0$时，对任意 $p \in N$，有

$$|a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + \cdots + a_{n+p}b_{n+p}| < \varepsilon$$

根据柯西收敛准则知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛。 □

仔细观察狄利克莱判别法，不难发现，当级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$中的 $b_n = (-1)^{n+1}$时，狄利克莱判别法就变成了莱布尼茨判别法，因此可以说，狄利克莱判别法是莱布尼茨判别法的推广，而莱布尼茨判别法是狄利克莱判别法的特殊情形。

例 3 判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos\frac{n\pi}{4}}{n}$的敛散性。

解 令$a_n = \dfrac{1}{n}$，$b_n = \cos\dfrac{n\pi}{4}$， 容易验证给定级数满足条件：

（1）$a_n = \dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n+1} = a_{n+1}$， 且$\dfrac{1}{n} \to 0\ (n \to \infty)$

（2）$|B_n| = \left|\cos\dfrac{\pi}{4} + \cos 2\cdot\dfrac{\pi}{4} + \cdots + \cos n\dfrac{\pi}{4}\right|$

$$=\left|\frac{\cos\frac{(n+1)\frac{\pi}{4}}{2}\sin\frac{n\frac{\pi}{4}}{2}}{\sin\frac{\frac{\pi}{4}}{2}}\right|^{①}\leqslant\frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}}\quad(n=1,2,\cdots)$$

由（1）和（2），根据狄利克莱判别法知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{4}}{n}$收敛。

定理11.13 （阿贝尔判别法）如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$满足条件：

---

①这里我们给出两个常用的三角公式：

$$1°\quad \sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\cos\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\ (x\neq 2j\pi,\ j=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

$$2°\quad \sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}(x\neq 2j\pi,\ j=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots).$$

只证1°，2°留给读者。

事实上，由三角函数的积化和差公式有

$$\sin\frac{x}{2}\cos kx=\frac{1}{2}\left[\sin\frac{(2k+1)x}{2}-\sin\frac{(2k-1)x}{2}\right]$$

对上式从$k=1$到n作和得，

$$\begin{aligned}\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos kx&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\sin(2k+1)\frac{x}{2}-\sin(2k-1)\frac{x}{2}\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\sin(2n+1)\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right]\\&=\cos(n+1)\frac{x}{2}\sin n\frac{x}{2}\end{aligned}$$

即
$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\cos\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}(x\neq 2j\pi,j=0,\ \pm1,\ \cdots)$$

（1）数列 $\{a_n\}$单调、有界；

（2）级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，

则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛。

证明 由（1），不妨设 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant \cdots \geqslant M$。从而，对任意固定的 $n \in \boldsymbol{N}$和任意的 $m \in \boldsymbol{N}$，有

$$a_n \geqslant a_{n+m}$$

根据单调有界定理（定理2.8）令 $m \to +\infty$，对上式取极限得

$$a_n \geqslant \lim_{m \to \infty} a_{n+m} = c \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

于是有

$$a_1 - c \geqslant a_2 - c \geqslant \cdots \geqslant a_n - c \geqslant \cdots, \text{ 且}$$
$$\lim_{n \to \infty} (a_n - c) = 0 \tag{7}$$

由（2），$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，即部分和数列 $\{B_n\}$ 收敛。根据定理2.1知，部分和数列$\{B_n\}$有界。即存在 $K > 0$，有

$$|B_n| = |b_1 + b_2 + \cdots + b_n| \leqslant K \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{8}$$

由（7）与（8）式，根据狄利克莱判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - c) b_n$ 收敛。

由（2），再根据定理11.1知，级数$\sum_{n=1}^{\infty} c b_n$收敛。

最后，根据定理11.2知，二收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - c) b_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} c b_n$的和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n - c) b_n + c b_n] = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - c) b_n + \sum_{n=1}^{\infty} c b_n$$

必收敛。 □

例 4 判别变号级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \operatorname{arctg} n}{n}$是绝对收敛还是条件收敛。

解 令 $a_n = \operatorname{arctg} n$, $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, 容易验证给定级数满足条件：

（1）$a_n = \operatorname{arctg} n < \operatorname{arc\ tg}(n+1) = a_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$，且有 $0 < \operatorname{arctg} n < \frac{\pi}{2}$ $(n = 1, 2, \cdots)$，即$\{a_n\}$严格递增且有界。

（2）级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 收敛(见本节例1)。

由（1）和（2），根据阿贝尔判别法知，级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \operatorname{arctg} n}{n}$收敛。

但其绝对值级数$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \operatorname{arctg} n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n}$ 显然发散。

事实上，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\operatorname{arctg} n}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{2}$$

而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散（调和级数），根据比较判别法推论知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\text{arctg}n}{n}$发散，即级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\text{arctg}n}{n}$是条件收敛的。

§11.5 级数的运算

在§11.2中，我们已经研究了级数的一些简单运算性质，如数与级数相乘，两个收敛级数的代数和运算等。现在继续讨论级数的运算性质。

我们知道，有限个数相加满足加法的结合律和交换律，两个含有限项的代数和的乘法满足乘法对加减法的分配律，即有限和具有结合律、交换律与分配律；但对无限和——级数，这些性质，除结合律外，都未必成立。这是因为，从有限到无限，不是简单的数量上的增加，而是经过了从量变到有质变的极限过程。

定理11.14 （结合律）如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，其和为$S$，则不变更级数中每一项的位置，而任意将其若干项结合在一起，所得到的新级数

$$A_1+A_2+\cdots+A_k+\cdots=(a_1+a_2+\cdots+a_{n_1})\\+(a_{n_1+1}+a_{n_1+2}+\cdots+a_{n_2})+\cdots+(a_{n_{k-1}+1}\\+a_{n_{k-1}+2}+\cdots+a_{n_k})+\cdots$$

也收敛，其和仍为S。

证明 设$S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$，结合后的新级数的$k$项部分和是$T_k$，有

$$T_k=\sum_{i=1}^{k}A_i=(a_1+a_2+\cdots+a_{n_1})+(a_{n_1+1}+a_{n_1+2}+\cdots$$
$$+a_{n_2})+\cdots+(a_{n_{k-1}+1}+a_{n_{k-1}+2}+\cdots+a_{n_k})=S_{n_k}$$

即结合后的新级数的部分和数列 $\{T_k\}$ 是原级数的部分和数列 $\{S_n\}$的子数列。因为$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$，所以，$\lim\limits_{k\to\infty}T_k=\lim\limits_{k\to\infty}S_{n_k}=S$，即结合后的新级数也收敛，其和仍为 S。 □

定理11.15 （交换律） 如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛，其和为 S，则将级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 中的各项交换位置所得到的新级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$①也收敛，其和仍为 S。

证明 首先证明新级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$绝对收敛。

设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$的 n 项部分和分别为 S_n与$\bar{S}_n$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|=\bar{S}$。又设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$与级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$的 n 项部分和分别为T_n与$\bar{T}_n$。

因为对任意的自然数 n，恒有不等式

$$\bar{T}_n=|\alpha_1|+|\alpha_2|+\cdots+|\alpha_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$$
$$+\cdots+=\bar{S}$$

---

①一方面，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$中每一项必在新级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$中出现；另一方面，新级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$中的每一项都是原级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$中的项。

所以，级数$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$的部分和数列$\{\overline{T}_n\}$有上界$\overline{S}$. 根据正项级数收敛原理知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，即新级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛。

其次，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的和仍为S。

因为，$\overline{S}=\lim_{n\to\infty}\overline{S}_n=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$，所以，根据数列极限定义有，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$n_0\in N$，当$n>n_0$时，

$$|\overline{S}_n-\overline{S}|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|-\sum_{k=1}^{n}|a_k|\right|=\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|<\varepsilon \tag{1}$$

令 $a_1=\alpha_{i_1}$， $a_2=\alpha_{i_2}$， $\cdots$， $a_{n_0}=\alpha_{i_{n_0}}$，
$m_{n_0}=\max\{i_1,i_2,\cdots,i_{n_0}\}$，当$m>m_{n_0}$时，由于在新级数$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$的$m$项的部分和

$$T_m=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k$$

中，除了包含$a_1,a_2,\cdots,a_{n_0}$外，还含有$m-n_0$个下标$k>n_0$的项a_k。因此，如果用A表示这$m-n_0$次的和，则

$$T_m=\sum_{k=1}^{n_0}a_k+A=S_{n_0}+A$$

由(1)知

$$|A|\leqslant\sum_{k=n_0+1}^{\infty}|a_k|<\varepsilon \tag{2}$$

于是，当$m>m_N$时，由（1）式与（2）式有

$$|T_m - S| = |S_{n_0} + A - S| \leqslant |S_{n_0} - S| + |A| = \left|\sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_k\right| + |A| < 2\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |a_k| < 2\varepsilon$$

即

$\lim\limits_{m\to\infty} T_m = S$. 这就证明了交换各项位置的新级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的和仍为 S. □

注意，如果把级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的绝对收敛改为条件收敛，则结论不成立。例如级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ 是条件收敛的，设其和为 S，即

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \cdots$$

现将它的项的位置作如下的交换，得到新级数

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + - - \cdots \quad (3)$$

再将（3）中每个正项与右边紧跟随它的第一负项结合（根据定理11.14知，这样作不影响（3）的和）得级数

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + - \cdots$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + - \cdots$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots\right) = \frac{1}{2} S$$

这说明交换项后的新级数（3）的和已经变了. 甚至交换后的新级数可能没有和，即新级数发散. 总之，条件收敛级数不

具有交换性。

事实上，关于条件收敛级数，我们有如下的一般定理——黎曼定理：

定理11.16 （黎曼定理） 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$条件收敛，则适当地交换各项的位置，可以作成发散级数，也可以作成收敛于事先任意给定的数 σ的收敛级数。

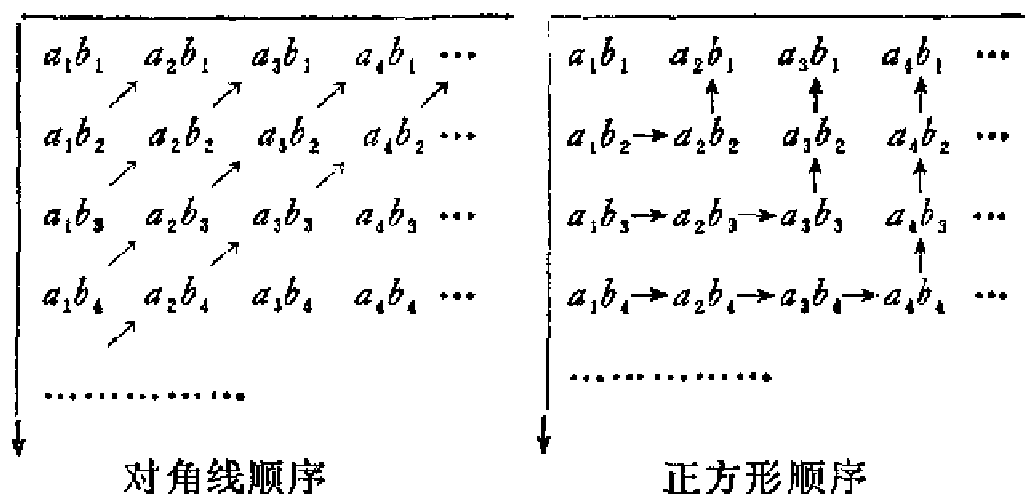
证明从略。

最后来研究级数的乘法运算，讨论在什么条件下两个级数相乘可以象有限项和一样的逐项相乘。

设有二级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$，仿照有限项和数相乘积的规则，同样可作出在每个级数中任取一项的所有可能的乘积$a_i b_k$ $(i=1,2,\cdots;\ k=1,2,\cdots)$，把这些乘积列成下表：

$$
\begin{array}{|lllllll}
\hline
a_1b_1, & a_2b_1, & a_3b_1, & a_4b_1, & \cdots, & a_nb_1, & \cdots \\
a_1b_2, & a_2b_2, & a_3b_2, & a_4b_2, & \cdots, & a_nb_2, & \cdots \\
a_1b_3, & a_2b_3, & a_3b_3, & a_4b_3, & \cdots, & a_nb_3, & \cdots \\
a_1b_4, & a_2b_4, & a_3b_4, & a_4b_4, & \cdots, & a_nb_4, & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_1b_n, & a_2b_n, & a_3b_n, & a_4b_n, & \cdots, & a_nb_n, & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

这些项$a_i b_j$可以按照不同的顺序排成一个级数。通常的有按对角线顺序或按正方形顺序相加，按对角线顺序排成的级数是：



对角线顺序　　　　正方形顺序

$$a_1b_1+a_1b_2+a_2b_1+a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1+a_1b_4+a_2b_3+a_3b_2+ \\ +a_4b_1+\cdots \tag{11.15}$$

按正方形顺序排成的级数是：

$$a_1b_1+a_1b_2+a_2b_2+a_2b_1+a_1b_3+a_2b_3+a_3b_3+a_3b_2+a_3b_1+\cdots \tag{11.16}$$

定义　设有二级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$，在每个级数中任取一项的所有可能的乘积　$a_ib_k(i=1,2,\cdots;\ k=1,2,\cdots)$，按照某种顺序排成的级数 $\sum_{i,j=1}^{\infty}a_ib_j$①，称为级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$的乘积。

级数(11.15)与(11.16)皆是级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$的乘积。特别是把按对角线顺序排成的级数，并将

$$a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1$$

结合在一起的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n，其中c_n=a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1$$

① $\sum_{i,j=1}^{\infty}a_ib_j$中的$i$与$j$各自独立的取遍一切自然数。

称为级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$的柯西乘积。

定理11.17 **（柯西定理）** 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$和级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$皆绝对收敛，其和分别为A和B，则它们乘积各项$a_i b_j (i,j=1,2,\cdots)$按任何方式（顺序）所构成的级数也绝对收敛，其和为$A\cdot B$.

证明 首先证明乘积级数的绝对收敛性。

用$w_1, w_2, w_3, \cdots, w_n, \cdots$表示按某种顺序排列$a_i b_j (i,j=1,2,\cdots)$所构成的一个数列，考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i} b_{m_i} \text{①} \tag{11.17}$$

及其绝对值级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |w_n| = \sum_{i=1}^{\infty} |a_{n_i} \ b_{m_i}| \tag{11.18}$$

令 $$S_k^* = \sum_{i=1}^{k} |w_i| = \sum_{i=1}^{k} |a_{n_i} \ a_{m_i}|$$

$$P = \max\{n_1, m_1, n_2, m_2, \cdots, n_k, m_k\}$$

$$A^*_p = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_p|$$

$$B^*_p = |b_1| + |b_2| + \cdots + |b_p|$$

由题设$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$和$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$皆收敛，令其和分别是$A^*$与$B^*$，显然有

$$A^*_p \leqslant A^*, \qquad B^*_p \leqslant B^*$$

---

① 级数$\sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i} b_{m_i}$中的$\{n_i\}$与$\{m_i\}$皆为正整数列，且当$i\neq j$时，$n_i \neq n_j$，$m_i \neq m_j$. 此外$\{n_i\}$与$\{m_i\}$的值域皆为自然数集$N$。

因为对任意的自然数 k，有

$$S^*_k = |a_{n_1} b_{m_1}| + |a_{n_2} b_{m_2}| + \cdots + |a_{n_k} b_{m_k}|$$
$$\leqslant (|a_1| + |a_2| + \cdots n_2 + |a_p|)(|b_1| + |b_2| + \cdots + |b_p|)$$
$$\leqslant A^* B^*$$

所以，级数(11.18)的部分和数列$\{S_k^*\}$有上界．从而，根据正项级数收敛原理知，级数(11.18) 收敛，即级数$\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 绝对收敛。

其次证明级数(11.17)收敛于$A \cdot B$。

把级数(11.17)按正方形顺序重新排成级数

$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3 + a_3b_2 + a_3b_1) + \cdots \qquad (11.19)$$

根据定理11.15（交换律）其和不变，即级数(11.19)的和等于级数(11.17)的和。

设级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$的部分和分别为A_n与B_n，即

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

则级数(11.19)的前n项和

$$S_n = a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3 + a_3b_2 + a_3b_1) + \cdots + (a_1b_n + a_2b_n + \cdots + a_nb_n + a_nb_{n-1} + \cdots + a_nb_2 + a_nb_1)$$
$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = A_nB_n$$

因此，有

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (A_nB_n) = AB$$

这就证明了级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$的乘积级数$\sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i} b_{m_i}$ 收敛于$A \cdot B$。 □

通常级数乘法，其项多采用对角线顺序排列，并把在同一对角线上的项加在一起（根据定理11.14和不变），即

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1)$$

$$+ \cdots + (a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_2 + a_nb_1) + \cdots$$

例如已知级数 $1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + \cdots = \dfrac{1}{1-q}(|q| < 1)$ 是绝对收敛的。将此级数自乘，得

$$\frac{1}{(1-q)^2} = (1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + \cdots)(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + \cdots)$$

$$= 1 + (1\cdot q + q\cdot 1) + (1\cdot q^2 + q\cdot q + q^2\cdot 1) + \cdots + (1\cdot q^{n-1} + q\cdot q^{n-2} + q^2\cdot q^{n-3} + \cdots + q^{n-2}\cdot q + q^{n-1}\cdot 1) + \cdots$$

$$= 1 + 2q + 3q^2 + \cdots + nq^{n-1} + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}$$

即
$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

学 习 指 导

一 内容概要

1 重点及要求

这一章主要是讨论无穷级数的敛散性及其判别法。要理解和掌握级数的收敛和发散概念。要会直接应用收敛定义，判别某些级数的敛散性。对各种不同的级数，要会选择相应的判别法，判别它们的收敛性。

正项级数收敛原理是直接从定义出发，利用单调有界定理建立起来的判别法，是正项级数一系列别判法的基础。比较判

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

第二种方法较简单，但不能求和。选用比较的几何级数的公比 $r=\frac{1}{3}$ 并不唯一，实际上，满足不等式 $\frac{1}{5}<r<1$ 的任何实数 r 皆可作为公比。

例 2 试用收敛定义，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 收敛，并求它的和。

解 因为

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

所以，

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{4\cdot5\cdot6}+\cdots\\&\quad+\frac{1}{(n-1)n(n+1)}+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4}-\frac{1}{4\cdot5}+\cdots\right.\\&\quad\left.+\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]\end{aligned}$$

于是，有

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]=\frac{1}{4}$$

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 收敛，其和为 $\frac{1}{4}$。

例 3 判别下面二级数的发散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}}$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n$。

解 （1）因为 $1\leqslant\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}}\leqslant\sqrt[n]{2}$ （$n=1,2,\cdots$），而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$，所以，根据两边夹法则知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}}=1\neq 0$$

于是，根据级数收敛的必要条件知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}}$发散。

另解 因为

$$\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}}>1\quad(n=1,2,\cdots)$$

所以，根据比较判别法知，给定级数发散。

（2）因为

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}\neq 0$$

所以该级数不满足收敛的必要条件，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n$ 发散。

例 4 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e^n}$ 收敛。

解法一 因为$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$ （$n=1,2,\cdots$），所以，对任意的 n，$p\in \boldsymbol{N}$，有

$$\left|\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{e^{n+1}}+\frac{\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}}{e^{n+2}}+\cdots+\frac{\left(1+\frac{1}{n+p}\right)^{n+p}}{e^{n+p}}\right|$$

$$<\frac{e}{e^{n+1}}+\frac{e}{e^{n+2}}+\cdots+\frac{e}{e^{n+p}}+\cdots$$

$$=\frac{1}{e^n}+\frac{1}{e^{n+1}}+\cdots=\frac{\frac{1}{e^n}}{1-\frac{1}{e}}=\frac{e}{e-1}\frac{1}{e^n}\to 0\quad(n\to\infty)$$

从而，根据柯西收敛准则知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e^n}$ 收敛。

解法二 由不等式

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e^n}<\frac{1}{e^{n-1}}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

和几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{n-1}}$（公比 $r=\frac{1}{e}<1$）的收敛性，根据比较判别法立即推得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e^n}$ 收敛。

解法三 因为，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e^n}}{\frac{1}{e^n}}=e<+\infty$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^n}$ 收敛，所以，根据比较判别法的推论知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e^n}$ 收敛。

例 5 应用柯西收敛准则，判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ 的敛散性。

解 因为

$$\frac{1}{(2n-1)^2}<\frac{1}{(2n-2)(2n-1)}=\frac{1}{2n-2}-\frac{1}{2n-1}\quad(n=2,3,\cdots),$$

所以，对任意的 $n, p\in N$，有

$$\left|\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+3)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n+2p-1)^2}\right|$$

$$=\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+3)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n+2p-1)^2}$$

$$\leqslant\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+3}+-\cdots$$

$$+\frac{1}{2n+2p-2}-\frac{1}{2n+2p-1}$$

$$=\frac{1}{2n}-\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right)-\left(\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+4}\right)-\cdots$$

$$-\left(\frac{1}{2n+2p-3}-\frac{1}{n+2p-2}\right)-\frac{1}{2n+2p-1}$$

$$<\frac{1}{2n}\to 0\quad(n\to\infty)$$

于是，根据柯西收敛准则知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ 收敛。

显然，用比较判别法及其推论也可以判别它的收敛性，且更简单些。事实上，由不等式

$$\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{1}{4n^2-4n+1}=\frac{1}{n^3+3n^2-4n+1}\leqslant\frac{1}{n^2}\quad(n=1,2,\cdots)$$

或
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(2n-1)^2}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{4}<+\infty$$

又已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，立即得到级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ 收敛。

例 4 与例 5 除了可用柯西收敛准则来判别其收敛性外，还可以用比较判别法及其推论去判别，而且往往更简单；而例 3 还可以用柯西与达兰贝尔判别法去作，这里不一一介绍了。

例 6　利用柯西收敛准则的否定叙述，证明级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots\cdots$$

发散。

证明　事实上，存在 $\varepsilon_0=\frac{1}{8}>0$，对任意的$n\in N$，存在某个$n_0=4m>n$及 $p_0=4m$，有

$$\begin{aligned}
&|a_{n_0+1}+a_{n_0+2}+\cdots+a_{n_0+p_0}|\\
&=\left|\frac{1}{4m+1}+\frac{1}{4m+2}+\frac{1}{4m+3}-\frac{1}{4m+4}+\frac{1}{4m+5}\right.\\
&\quad+\frac{1}{4m+6}+\frac{1}{4m+7}-\frac{1}{4m+8}+\cdots+\frac{1}{8m-3}\\
&\quad\left.+\frac{1}{8m-2}+\frac{1}{8m-1}-\frac{1}{8m}\right|\\
&=\frac{1}{4m+1}+\frac{1}{4m+2}+\left(\frac{1}{4m+3}-\frac{1}{4m+4}\right)+\frac{1}{4m+5}\\
&\quad+\frac{1}{4m+6}+\left(\frac{1}{4m+7}-\frac{1}{4m+8}\right)+\cdots+\frac{1}{8m-3}\\
&\quad+\frac{1}{8m-2}+\left(\frac{1}{8m-1}-\frac{1}{8m}\right)\\
&>\frac{1}{4m+1}+\frac{1}{4m+2}+\frac{1}{4m+5}+\frac{1}{4m+6}+\cdots+\frac{1}{8m-3}\\
&\quad+\frac{1}{8m-2}>\underbrace{\frac{1}{8m}+\frac{1}{8m}+\cdots+\frac{1}{8m}}_{2m\text{项}}=\frac{2m}{8m}=\frac{1}{4}>\frac{1}{8}=\varepsilon_0
\end{aligned}$$

根据柯西准则的否定叙述知，给定级数发散。

用柯西准则判别级数的敛散性，通常情况是比较麻烦的，

但这丝毫不能降低它的作用，例 6 就充分说明了这个事实. 因为对例 6 的这种级数其它判别法都无能为力了.

例 7 证明，如果数列$\{a_n\}$递减，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

基本思路 证明数列 $\{na_n\}$ 的偶、奇子列 $\{2na_{2n}\}$ 与$\{(2n+1)a_{2n+1}\}$皆收敛于 0.

证明 因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，所以 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ （必要性），又因 $\{a_n\}$是递减的，故必有

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant \cdots \geqslant 0 \qquad (3)$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，因此，根据柯西收敛准则有，对任意给定的$\frac{\varepsilon}{2}>0$，存在$n_0\in N$，当$n>n_0$时，对 $p=n$，注意（3）式有

$$\frac{\varepsilon}{2} > |a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}| = a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n} \geqslant na_{2n} \geqslant 0$$

即 $0 \leqslant 2na_{2n} < \varepsilon$. 这就证明了 $\lim_{n\to\infty} 2na_{2n} = 0 \qquad (4)$

再由（4）式，有

$$0 \leqslant (2n+1)a_{2n+1} \leqslant \frac{2n+1}{2n}\cdot 2na_{2n} \to 0 \qquad (n\to\infty)$$

这样又证明了

$$\lim_{n\to\infty} (2n+1)\ a_{2n+1} = 0 \qquad (5)$$

（4）式（与 5）式就证明了$\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

例 8 利用比较判别法判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}\right)$的敛

散性。

解 因为 $\ln(1+x)<x\ (x>0)$，所以有

$$\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}\right)<\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} \qquad (n=1,2,\cdots)$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$收敛（"$P$级数" $P=\frac{4}{3}>1$），于是，根据比较判别法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}\right)$收敛。

例 9 证明，如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 皆收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$也收敛。

证明 因为

$$|a_nb_n|\leqslant\frac{|a_n|^2+|b_n|^2}{2}=\frac{a_n^2+b_n^2}{2}$$

根据定理11.2及定理11.1知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2+b_n^2}{2}$收敛，所以，根据比较判别法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$收敛（从而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$绝对收敛）。

例10 利用达兰贝尔判别法，判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^nn!}{(2n)^n}$ 的敛散性。

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}(n+1)!}{2^{n+1}(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{2^nn^n}{5^nn!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{5}{2e}<1$$

所以，根据达兰贝尔判别法的推论知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n n!}{(2n)^n}$收敛。

例11 利用柯西判别法，判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3+(-1)^n}{3^n}$的敛散性。

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3+(-1)^n}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{3+(-1)^n}}{3}\text{①}$$

$$=\frac{1}{3}<1$$

所以，根据柯西判别法推论知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3+(-1)^n}{3^n}$收敛。

此级数也可以用比较判别法，它的推论及达兰贝尔判别法去判别。事实上，

$$\frac{3+(-1)^n}{3_n}\leqslant\frac{4}{3^n}\quad(n=1,2,\cdots)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3+(-1)^n}{3^n}}{\dfrac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n[3+(-1)^n]=0$$

$$\frac{\dfrac{3+(-1)^{n+1}}{3^{n+1}}}{\dfrac{3+(-1)^n}{3^n}}=\frac{1}{3}\,\frac{3+(-1)^{n+1}}{3+(-1)^n}\leqslant\frac{2}{3}<1\quad(n=1,$$

$$2,\cdots)$$

不难分别根据上述三个判别法，推得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3+(-1)^n}{3^n}$是收

---

① 由于$\sqrt[n]{2}\leqslant\sqrt[n]{3+(-1)^n}\leqslant\sqrt[n]{4}$ $(n=1,2,\cdots)$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{4}=1$

根据两边夹法则知，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3+(-)^n}=1$。

敛的。

例12 讨论下列级数，当x为何值时收敛，何值时发散。

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)$；　　（2）$\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$ $(x\geqslant 0)$。

解 （1）因为对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{x}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sin^2\frac{x}{2n}}{\left(\frac{x}{2n}\right)^2}\cdot\frac{x^2}{4}=\frac{x^2}{2}<+\infty$$

而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，所以，根据比较判别法推论知，对任意$x\in(-\infty,+\infty)$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)$收敛。

（2）因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{n!\left(\frac{x}{n}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}x(n+1)\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{x}{e}$$

所以，根据达兰贝尔判别法推论知，

（1）当$\frac{x}{e}<1$时，即当$0\leqslant x<e$时，该级数收敛；

（2）当$\frac{x}{e}>1$时，即当$x>e$时，该级数发散；

（3）当$\frac{x}{e}=1$时，即当$x=e$时，敛散性不能确定。

例13 判别下列变号级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^{n^2}}{(2n-1)!!}$.

解 (1) 讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n\right|$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n$. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+2}=\frac{2}{3}<1$$

所以，根据柯西判别法推论知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n\right|$

收敛，即级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n$绝对收敛。

(2) 讨论绝对值级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{3^{n^2}}{(2n-1)!!}\right|$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n^2}}{(2n-1)!!}$. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{(n+1)^2}}{(2n+1)!!}\cdot\frac{(2n-1)!!}{3^{n^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{2n+1}}{2n+1}①=+\infty>1$$

于是，根据达兰贝尔判别法知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{3^{n^2}}{(2n-1)!!}\right|$

---

① $\lim_{n\to\infty}\frac{3^{2n+1}}{2n+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x\ln 3}{1}=+\infty>1$.

发散，由学习指导第二段几点说明之4知，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3n^2}{(2n-1)!!}$$发散。

例14　判别变号级数

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}++--\cdots \qquad (6)$$

的绝对或条件收敛性。

基本思路　因为级数

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\left(-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+\cdots$$

是两个收敛的交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$与$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n}$

的和，所以收敛，即$\lim_{n\to\infty}\bar{S}_n=\bar{S}$。证明给定级数的部分和数列

$\{S_n\}$的奇、偶子列$\{S_{2n+1}\}$与$\{S_{2n}\}$皆收敛于$\bar{S}$（见第二章学习指导例题选讲之例11）。

解　显然，交错级数

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+-\cdots$$

及
$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+-\cdots$$

皆收敛，故根据定理11.2知，级数

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\left(-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+-\cdots \qquad (7)$$

也收敛。

设级数（7）的部分和为$\bar{S}_n$，和为$\bar{S}$，级数（6）的部分和为S_n，则$S_{2n}=\bar{S}_n$，$S_{2n+1}=\bar{S}_n\pm\frac{1}{2n+1}$。于是，

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\bar{S}_n=\bar{S}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\bar{S}_n\pm\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\bar{S}_n\pm\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=\bar{S}$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\bar{S}$，即级数（6）收敛。

因为，给定级数（6）的各项绝对值级数是调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，所以是发散的，故给定的级数（6）为条件收敛级数。

例15 讨论变号级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$的绝对收敛或条件收敛。

基本思路 首先利用公式 $\sin^2 n=\frac{1-\cos 2n}{2}$，把给定级数化为$\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}-\frac{(-1)^n}{n}\cos 2n\right]$。此级数可以看作两个收敛级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cos 2n$之差，故给定级数收敛；其次考虑其绝对值级数的敛散性。

解 由公式 $\sin^2 n=\frac{1-\cos 2n}{2}$，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}-\frac{(-1)^n}{n}\cos 2n\right]$$

由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$是收敛的．于是，只须讨论

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cos 2n$的收敛性即可。

设$a_n=\frac{1}{n}$，$b_n=(-1)^n\cos 2n$，根据35页注中给出的

三角恒等式，不难验证级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos 2n}{n}$ 满足条件：

（1）$a_n=\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}=a_{n+1}\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$，且

$$a_n=\frac{1}{n}\to 0\quad(n\to\infty);$$

（2）$|B_n|=|-\cos 2+\cos 4-\cos 6+-\cdots$

$$+(-1)^n\cos 2n|$$

$$=|\cos(\pi-2)+\cos 2(\pi-2)+\cos 3(\pi-2)+\cdots+\cos n(\pi-2)|$$

$$=\left|\frac{\cos\frac{(n+1)(\pi-2)}{2}\sin\frac{n(\pi-2)}{2}}{\sin\frac{\pi-2}{2}}\right|\leqslant\frac{1}{\cos 1}\quad(n=1,2,\cdots)$$

根据狄利克莱判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos 2n}{n}$ 收敛。

下面进一步考虑绝对值级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\cos 2n\right)$$

的敛散性。

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos 2n$ 收敛。

事实上，它满足狄利克莱判别法条件：

（1）$a_n=\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}=a_n$，且 $a_n=\frac{1}{n}\to 0\ (n\to\infty)$；

(2) $|B_n|=|\cos 2+\cos 4+\cdots+\cos n\cdot 2|$

$$=\left|\frac{\sin\frac{n\cdot 2}{2}\cdot\cos\frac{(n+1)2}{2}}{\sin\frac{2}{2}}\right|\leqslant\frac{1}{\sin 1}\quad(n=1,2,\cdots)$$

而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，故根据定理11.2推论知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n}$发散。

综上所述，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$条件收敛。

例16　讨论变号级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^P}$当参数$P$为何值时发散？何值时条件收敛？何值时绝对收敛？

解　1°　当$P\leqslant 0$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^P}$发散。

分两种情形讨论：

当　$P<0$　时，$a_n=(-1)^{n+1}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^P}\longrightarrow\infty\neq 0$

$(n\to\infty)$；

当$P=0$时，$\{a_n\}=\left\{(-1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$极限不存在。

总之，当$P\leqslant 0$时，$a_n=\frac{(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^P}\not\to 0\ (n\to\infty)$，故此时级数发散。

2° 当 $0<P\leqslant 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^p}$ 条件收敛.

事实上，设 $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，$b_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 有

（1） $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=a_{n+1}$ 且 $0<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$，，即数列 $\{a_n\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 为递增且有上界的数列.

（2）不难验证，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 满足莱布尼茨判别法条件，故收敛。

由阿贝尔判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^p}$ 收敛。

但是其绝对值级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^p}$ 发散。

事实上，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^p}}{\frac{1}{n^p}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \qquad (8)$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散，（$0<P\leqslant 1$），于是，根据比较判别法推论知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^p}$ 发散。

即当$0<P\leqslant 1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^p}$为条件收敛。

3° 当$P>1$时，绝对值级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^p}$收敛。

事实上，由（8）式和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收敛（$P>1$），根据比较判别法推论知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^p}$收敛。即当$P>1$时绝对收敛。

综上所述，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^p}$当$P\leqslant 0$时发散，当 $0<P\leqslant 1$ 时条件收敛，当$P>1$时绝对收敛。

例17 判别变号级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$的敛散性

基本思路 它虽然是交错级数，但由于$\left\{\frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}\right\}$不是递减的，因此不能应用莱布尼茨判别法判别它的收敛性。将级数的一般项分母有理化，分解为两项差。从而给定级数可以看作一个收敛的交错级数与一个发散的级数之差，于是，根据定理11.2的推论知，给定级数发散。

解 因为

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\frac{(-1)^n[\sqrt{n}-(-1)^n]}{[\sqrt{n}+(-1)^n][\sqrt{n}-(-1)^n]}$$

$$=(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1}+\frac{1}{n-1}$$

而交错级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1}$收敛．事实上，它满足莱布尼茨判别法条件：

（1）$a_n=\frac{\sqrt{n}}{n-1}>\frac{\sqrt{n+1}}{n+1-1}=a_{n+1}$ $(n=2,3,\cdots)$ ．这是因为，令 $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-1}$，$f'(x)=\left(\frac{\sqrt{x}}{x-1}\right)'$

$$=-\frac{x+1}{2\sqrt{x}(x-1)^2}<0\ (x\geqslant 2)$$．根据定理6.2知，$f(x)$是严格递减的．即

$$a_n=f(n)>f(n+1)=a_{n+1}\ (n=2,3,\cdots)$$

（2）$a_n=\frac{\sqrt{n}}{n-1}\to 0\ (n\to\infty)$ ．但是级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散．所以，根据定理11.2推论知，级数

$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$发散．

例18 证明：如果将收敛级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的各项重新排列，使得每一项离开原有的位置不超过$m$个位置（$m$为任一给定的自然数），则重排的新级数仍收敛，且和不变．

基本思路 重排级数的$n+m$项部分和 σ_{n+m}为原级数的前n项和与原级数的第$n+1$项至第$n+2m$项中的m项的和，考虑极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{n+m}$即可．

证明 设已知收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的$n$项部分和为$S_n$，和为$S$，

即

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \tag{9}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{10}$$

由（9）、(10) 二式有，对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在$n_0 \in N$，当 $n > n_0$ 时，有

$$|S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |a_{n+1}| < \frac{\varepsilon}{2m}, \ |a_{n+2}| < \frac{\varepsilon}{2m}, \ \cdots \tag{11}$$

设重排的级数n项和为σ_n. 由题设知，

$$\sigma_{n+m} = S_n + b_1 + b_2 + \cdots + b_m$$

其中 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 为原级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$的第$n+1$项至第 $n+2m$ 中的某 m项. 从而，由 (11) 知，当 $n > n_0$时，有

$$|b_k| < \frac{\varepsilon}{2m} \quad (k = 1, 2, \cdots, m)$$

于是，

$$|\sigma_{n+m} - S| = |S_n + b_1 + b_2 + \cdots + b_m - S|$$

$$\leqslant |S_n - S| + |b_1| + |b_2| + \cdots + |b_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{2m} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2m}}_{m\text{项}}$$

$$= \varepsilon$$

即 $$\lim_{n\to\infty} \sigma_{n+m} = S$$

这就证明了按照此题的要求重排的级数收敛，且和也不变.

习　　题

§11.1

1　利用几何级数敛散性，判别下列几何级数的敛散性，如收敛，求出它们的和：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}$,　　　　（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n$,

（3）$\sum\limits_{n=1}^{6} \sin\frac{n\pi}{3}$，　　　　（4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{n}$。

2　利用级数收敛定义，判别下列级数的敛散性，如收敛，并求其和：

（1）$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\cdots$，

（2）$\frac{1}{3}+\frac{4}{3^2}+\frac{7}{3^3}+\cdots+\frac{3n-2}{3^n}+\cdots$，

（3）$\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\frac{1}{9\cdot13}+\cdots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}+\cdots$，

（5）$\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+\cdots$，

（5）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$。

§ 11.2

3　利用级数的基本性质，判别下列级数的敛散性：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)$，　　　　（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2^n}\right)$，

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}\right)$，　　　　（4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5^n}$，

（5）$3+2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，　　　　（6）$3^2+2^2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，

（7）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{n}$，　　　　（8）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1000n+1}$，

（9）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$，　　　　（10）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$。

4　利用柯西收敛准则，判别下列级数的敛散性：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}$ （$|a_n|<10, n=1,2,\cdots$），　　（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$，　　　　（4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$，

5　利用柯西收敛准则证明：若

$$\lim_{n\to\infty} na_n = c \neq 0,$$

则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$发散。

6　证明：若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$（$A$）及$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$（$B$）皆收敛，且$a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$（$n=1,2,\cdots$），则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$（$C$）也收敛。若级数（$A$）与（$B$）皆发散，问级数（$C$）的敛散性如何？

7　证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n^2$发散。

§11.3

8　利用各种判别法，判别下列级数的敛散性：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$，　　　　（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)$，

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{1}{n}+n}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$，　　　　（4）$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$，

（5）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{c}{n}$　（$c>0$），　　　　（6）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$，

（7）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$，　　　　（8）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt{n^3+1}}$，

（9）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{1}{n^2}$，　　　　（10）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$，

(11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(10)^n}{n!}$,　　(12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{3^n \cdot n!}$,

(13) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{\pi}{2^n}$,　　(14) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{3^n}$,

(15) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\arcsin^n \frac{1}{n}}$.

9　证明，由等差级数各项倒数所组成的级数发散。

10　证明：如果正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则

(1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$收敛。反之，不真，举例说明；

(2) 当 $\lim_{n \to \infty} na_n = a$时，必有 $a = 0$。

11　讨论下列级数，当 x为何值时收敛，何值时发散：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+2n)^x}$,　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$　$(x>0)$，

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ $(x \geqslant 0)$.

12　如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 及$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 皆收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)^2$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ 也都收敛。

§11.4

13　判别下列变号级数收敛（绝对、条件）性和发散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{3^n}$,　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\left(\frac{n+100}{2n+1}\right)^n$,

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\ln n}$,　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos\frac{n\pi}{3}}{2^n}$,

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{\sqrt{n}}{n+100}$;　　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{n}$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{arc\ tg}\frac{1}{n^2}$.

14　研究下列变号级数，当参数P为何值时绝对收敛，何值时条件收敛，何值时发散？

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$,　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$.

15　如果数列$\{na_n\}$收敛，且级数$\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$也收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$也收敛。

§11.5

16　已知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2$，求把已知级数各项重排后所成的级数

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}++-\cdots$$

的和。

17　如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$满足下列条件：

(1) $a_n\to 0\ (n\to\infty)$；

(2) 不变更原有级数项的顺序所作的某一组合级数$\sum_{n=1}^{\infty}A_n$收敛；

(3) $A_n=\sum_{i=P_n}^{P_{n+1}-1}a_i\ (1=P_1<P_2<\cdots;n=1,2,\cdots)$中相加的项$a_i$的数目是有界的。

则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛。

18 证明等式 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=1$。

19 证明收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ 的平方是发散级数。

20 已知 $e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$，　　证明 $e^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$。

第十二章　函数级数

本章将在数值级数的基础上，讨论函数级数的一般理论。函数级数是数学分析中定义和研究新函数（非初等函数）的重要工具之一，同时函数级数的基本理论又是研究两种特殊的重要的函数级数——幂级数和傅立叶[①]级数的理论基础。

§12.1　函数级数的收敛域

定义　设定义在实数集合 E 上的函数列为

$$u_1(x),\ u_2(x),\ \cdots,\ u_n(x),\ \cdots \tag{12.1}$$

将（12.1）各项用加号联接起来，即

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \tag{12.2}$$

称为定义在实数集 E 上的函数级数。

函数级数（12.2）简单记作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$。

对于 E 内每一个给定点 x_0，函数级数（12.2）就变成了数值级数

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+\cdots+u_n(x_0)+\cdots \tag{12.3}$$

如果数值级数(12.3)收敛，则称点 x_0 为函数级数(12.2)的收敛点，或称函数级数（12.2）在点 x_0 收敛。如果数值级数（12.3）发散，则称点 x_0 为函数级数（12.2）的发散点，或称函数级数（12.2）在点 x_0 发散。

所有收敛点组成的集合 $X\subset E$，称为函数级数（12.2）的

---

① 傅立叶：Fourier，J.B.J，法国数学家，1768—1830。

收敛域。所有发散点组成的集合$Y\subset E$，称为函数级数(12.2)的发散域。如果收敛域X是一个区间，则称X为收敛区间。

对于收敛域X的任意一点x，值数级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$都收敛，设它的和为$S(x)$。按照这个对应规律，在收敛域$X$上就定义了一个函数$S(x)$，称此函数$S(x)$为函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的和函数。即对任意$x\in X$，有

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)$$

同数值级数一样，去掉函数级数（12.2）的前n项后的级数

$$u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots \tag{12.4}$$

称为函数级数（12.2）的第n项余式，记作$R_n(x)$，即

$$R_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots$$

显然，如果点x是收敛点，则

$$R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)=S(x)-S_n(x) \tag{12.5}$$

且

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)=\lim_{n\to\infty}[S(x)-S_n(x)]=0 \tag{12.6}$$

例 1 求函数级数

$$\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2}+\cdots+\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^{n-1}}+\cdots \tag{12.7}$$

的收敛域及和函数$S(x)$。

解 显然，函数级数（12.7）的每项 $u_n(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^{n-1}}$ $(n=1,2,\cdots)$的定义域是区间$[0,+\infty)$。

当 $x=0$ 时，由于函数级数所有项皆为 0，因此它收敛于 0，即 $S(0)=0$

当 $x>0$ 时，函数级数（12.7）是公比为 $r=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$ $\left(0<\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}<1\right)$的收敛几何级数，其和函数$S(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{1-\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}}$ $=1+\sqrt{x}$。

于是，函数级数（12.7）的收敛域为区间$[0,+\infty)$，和函数

$$S(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x=0 \text{ 时}\\ 1+\sqrt{x}, & \text{当 } x>0 \text{ 时}\end{cases}$$

例 2 讨论函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2nx}{\sqrt{n}}$的收敛域。

解 因为对任意 $x\neq k\pi$，有

（1） $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}=a_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$，且

$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\to 0$ $(n\to\infty)$；

$$（2）\ |B_n|=\left|\sum_{k=1}^{n}\cos(k\cdot 2x)\right|$$

$$=\left|\frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}\cdot 2x\right)\cdot\sin\left(\frac{n}{2}\cdot 2x\right)}{\sin\frac{2x}{2}}\right|^{①}$$

---

① 见35页注①

$$\leqslant \frac{1}{|\sin x|} \quad (n=1,2,\cdots,\ x\neq k\pi)$$

所以，根据狄利克莱判别法知，函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{\sqrt{n}}$收敛，即函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{\sqrt{n}}$除 $x=k\pi$ ($k=0,\pm1,\ \pm2,\ \cdots$) 外皆收敛，亦即收敛域是除去 $x=k\pi$ ($k=0,\pm1,\pm2,\cdots$) 以外的一切实数。

§12.2 一致收敛性

由上一节的讨论我们知道，函数级数在收敛域上定义了一类新函数——和函数．下一步的任务是讨论这类函数的分析性质。那么如何研究和函数的分析性质（连续性、可微性、可积性）呢？自然地想到，应该通过函数级数每一项 $u_n(x)$的分析性质去研究。换言之，就是要通过函数级数的每一项的连续性、可微性与可积性分别讨论和函数的连续性、可微性与可积性。

我们知道，对于有限个函数的和

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$$

如果 $u_k(x)$ ($k=1,2\cdots,n$)在开区间(a,b)内都连续，则$S_n(x)$在开区间(a,b)内也连续．同样，如果 $u_k(x)$ ($k=1,2,\cdots n$)在开区间(a,b)内都可微，则 $S_n(x)$ ($n=1,2,\cdots$) 在开区间(a,b)内也可微，且有等式

$$S_n'(x)=\left[\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\right]'=\sum_{k=1}^{n}u'_k(x)$$

对于积分也有类似的结论．

但是，作为有无穷多项的函数级数的和函数 $S(x)$，一般

说来，这些性质不能保持．如上节例1给出的函数级数

$$\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}+\cdots+\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^{n-1}}+\cdots$$

虽然每项 $u_n(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^{n-1}}$ $(n=1,2,\cdots)$ 都在收敛区间$[0,+\infty)$上连续，可是和函数

$$S(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x=0 \text{ 时}\\ 1+\sqrt{x}, & \text{当 } x>0 \text{ 时}\end{cases}$$

却在点 $x=0$ 处不连续，从而和函数 $S(x)$ 在收敛区间 $[0,+\infty)$ 上不连续．

同样，可微性与可积性对函数级数来说，一般也不成立．那么，在什么条件下，由函数级数每一项所具有的性质，能推出和函数也具有相应的性质呢？为了解决这个问题，我们引进一个新概念——一致收敛．一致收敛是函数级数的重要概念．

为了对一致收敛的概念有比较清楚的理解，我们先从级数收敛概念入手，进一步分析函数级数在收敛区间上各点的收敛"速度"的快慢情况，最后再给出一致收敛的定义．

当我们说函数级数

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \tag{1}$$

在开区间 (a,b)内收敛，指的是它在开区间 (a,b)内每一点都收敛，设级数（1）的和函数为 $S(x)$． 如果点 $x_1\in(a,b)$，则数级数

$$u_1(x_1)+u_2(x_1)+\cdots+u_n(x_1)+\cdots \tag{2}$$

收敛于 $S(x_1)$，即

对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在自然数 N_{x_1}（设 N_{x_1} 是使不等式（3）成立的最小自然数），当 $n>N_{x_1}$ 时，有

$$|R_n(x_1)|=|S(x_1)-S_n(x_1)|<\varepsilon \tag{3}$$

如果点 $x_2\in(a,b)$，且 $x_2\neq x_1$，则数级数

$$u_1(x_2)+u_2(x_2)+\cdots+u_n(x_2)+\cdots \tag{4}$$

收敛于 $S(x_2)$，即对任意给定的 $\varepsilon>0$，也存在自然数 N_{x_2}（设

N_{x_2} 是使不等式（5）成立的最小自然数），当 $n > N_{x_2}$ 时，有

$$|R_n(x_2)| = |S(x_2) - S_n(x_2)| < \varepsilon \qquad (5)$$

一般说来，由于 $x_1 \neq x_2$，数值级数（2）与（4）是不相同的。因此，对给定的同一个 $\varepsilon > 0$，使不等式（3）与(5)成立的 N_{x_1} 与 N_{x_2} 也不相同。对应于收敛速度快的就小些，慢的就大些。由此可见，在 $\varepsilon > 0$ 给定的情况下，对于收敛区间 (a,b) 内的不同点，使不等式（3）成立的自然数 N 不仅与给定的 ε 有关，而且与 (a,b) 内点 x 的位置有关。

于是，就产生一个问题，对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，能否找到一个共同的自然数 N，对收敛区间 (a,b) 内的所有点 x，使不等式

$$|R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon \qquad (6)$$

都成立呢？事实告诉我们，有的函数级数存在使不等式(6)成立的共同的自然数 N，有的函数级数并不具有这样性质。

现在，让我们来研究上节例3给出的函数项级数

$$\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2} + \cdots + \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^{n-1}} + \cdots$$

在它的收敛区间 $(0, +\infty)$ 内（收敛点0未包括在内）的情况。已知

部分和 $S_n(x)$ 及和数函 $S(x)$ 分别为

$$S_n(x) = (1+\sqrt{x})\left[1 - \frac{1}{(1+\sqrt{x})^n}\right], \quad S(x) = 1+\sqrt{x}$$

于是，对任意一点 $x \in (0, +\infty)$，我们有：对任意给定的 $\varepsilon > 0$，解不等式

$$|R_n(x)| = \left|1+\sqrt{x} - (1+\sqrt{x})\left[1 - \frac{1}{(1+\sqrt{x})^n}\right]\right|$$

$$= \frac{1}{(1+\sqrt{x})^{n-1}} < \varepsilon$$

为此，将不等式两边取倒数得

$$(1+\sqrt{x})^{n-1}>\frac{1}{\varepsilon}$$

两边取常用对数得

$$(n-1)\lg(1+\sqrt{x})>\lg\frac{1}{\varepsilon}$$

两边除以$\lg(1+\sqrt{x})>0$，并移项得

$$n>\frac{\lg\frac{1}{\varepsilon}}{\lg(1+\sqrt{x})}+1$$

取 $N_x=\left[\frac{\lg\frac{1}{\varepsilon}}{\lg(1+\sqrt{x})}+1\right]$，当 $n>N_x$ 时，有不等式

$$|R_n(x)|=\frac{1}{(1+\sqrt{x})^{n-1}}<\varepsilon$$

于是，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在自然数 $N_x=\left[\frac{\lg\frac{1}{\varepsilon}}{\lg(1+\sqrt{x})}+1\right]$，当 $n>N_x$ 时，不等式

$$|R_n(x)|=\frac{1}{(1+\sqrt{x})^{n-1}}<\varepsilon$$

成立。我们看到，自然数 $N_x=\left[\frac{\lg\frac{1}{\varepsilon}}{\lg(1+\sqrt{x})}+1\right]$ 不仅与 ε 有关，而且也与 x 有关。不仅如此，我们还看到，当 x 趋近于0时，N 可以变得任意大。因此，不存在自然数N，当 $n>N$ 时，对区间$(0,+\infty)$内所有 x，都能使 $|R_n(x)|<\varepsilon$成立。

同样是这个级数，如果限定在区间 $[\delta,+\infty)(\delta>0)$ 上，由于对任意 $x\in[\delta,+\infty)$，有

$$N_x=\left[\frac{\lg\frac{1}{\varepsilon}}{\lg(1+\sqrt{x})}+1\right]\leqslant\left[\frac{\lg\frac{1}{\varepsilon}}{\lg(1+\sqrt{\delta})}+1\right]=N$$

于是，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在自然数$N=\left[\dfrac{\lg\frac{1}{\varepsilon}}{\lg(1+\sqrt{\delta})}+1\right]$，当 $n>N$ 时，对任意 $x\in[\delta,+\infty)$，有

$$|R_n(x)|=\frac{1}{(1+\sqrt{x})^{n-1}}<\varepsilon$$

我们看到，这个自然数$N=\left[\dfrac{\lg\frac{1}{\varepsilon}}{\lg(1+\sqrt{\delta})}+1\right]$仅与 ε 有关，而与 x在区间 $[\delta,+\infty)$ 上的位置无关。

从上述的分析看到，上节例 1 给出的函数级数，尽管在区间$(0,+\infty)$与 $[\delta,+\infty)$ 上都收敛，但却有重要的区别，由此引出如下的一致收敛的概念。

定义 设函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$与 $S(x)$皆定义在开区间(a,b) 内①。如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $n_0\in N$，当$n<n_0$时，对任意 $x\in(a,b)$，有

$$|R_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)\right|=|S(x)-S_n(x)|<\varepsilon \tag{12.8}$$

则称函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在开区间 (a,b) 内**一致收敛**，或称函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在开区间 (a,b)内**一致收敛于**$S(x)$。

从一致收敛定义容易看到，一致收敛必收敛，但收敛未必一致收敛。如上节例3 中的函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^{n-1}}$ 在区间

---

① 将开区间换成闭区间或半开区间亦可。

$(0, +\infty)$上收敛，但不一致收敛。

函数级数的一致收敛概念，有明显的几何意义：将不等式（12.8）改写为

$$S(x)-\varepsilon<S_n(x)<S(x)+\varepsilon$$

将和函数$S(x)$的图象，沿 y轴向上平移一段 ε，向下平移一段 ε，得到一个以

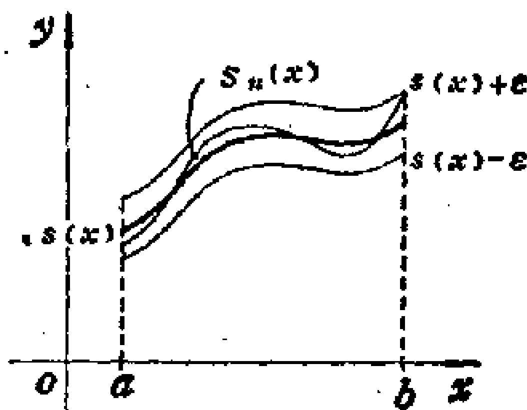


图12.1

曲线 $S(x)-\varepsilon$ 和 $S(x)+\varepsilon$ 为边界的弯曲带形。这样，一致收敛定义就可以释解为：不论"宽"为 2ε 的弯曲带形区域怎样"窄"，总存在 $n_0\in N$，当 $n>n_0$ 时，部分和函数 $S_n(x)$ 的图象，在开区间 (a,b) 内，必全部落在以曲线 $S(x)+\varepsilon$ 和曲线 $S(x)-\varepsilon$ 为上、下边界的弯曲带形区域之内（如图12.1）。

例 1 证明函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$在闭区间$[-a,a]$ $(0<a<1)$上一致收敛。

证明 对任意 $x\in[-a,a]$，函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ 是公比为 $x(|x|\leqslant a<1)$ 收敛的几何级数。于是，为任意给定的 $\varepsilon>0$，解不等式

$$|R_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} x^{k-1}\right|=\frac{|x|^n}{1-x}\leqslant\frac{a^n}{1-a}<\varepsilon$$

或 $\quad a^n<(1-a)\varepsilon$

两边取常用对数得

$$n\lg a<\lg[(1-a)\varepsilon]$$

不等式两边除以 $\lg a(<0)$ 得

$$n>\frac{\lg[(1-a)\varepsilon]}{\lg a}，\text{取 } n_0=\left[\frac{\lg[(1-a)\varepsilon]}{\lg a}\right]$$

于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $n_0\in N$，当 $n>n_0$ 时，对任意 $x\in[-\alpha,\alpha]$，有

$$|R_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}x^{k-1}\right|<\varepsilon$$

即函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$在闭区间 $[-\alpha,\alpha]$ 上一致收敛。

例 2 证明，函数级数

$$\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2+x^2}\right)+\left(\frac{1}{2+x^2}-\frac{1}{3+x^2}\right)+\cdots$$

$$\left(\frac{1}{n+x^2}-\frac{1}{n+1+x^2}\right)+\cdots$$

在$(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于 $S(x)=\dfrac{1}{n+x^2}$。

证明 因为对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$S_n(x)=\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2+x^2}\right)+\left(\frac{1}{2+x^2}-\frac{1}{3+x^2}\right)+$$

$$\cdots+\left(\frac{1}{n+x^2}-\frac{1}{n+1+x^2}\right)$$

$$=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{n+1+x^2}$$

所以，$S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{n+1+x^2}\right)=\dfrac{1}{1+x^2}$。

对任意给定的 $\varepsilon>0$ 和任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，解不等式

$$|R_n(x)|=|S(x)-S_n(x)|$$

$$=\left|\frac{1}{1+x^2}-\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{n+1+x^2}\right)\right|$$

$$=\frac{1}{n+1+x^2}<\frac{1}{n}<\varepsilon$$

即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$，取 $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $n_0\in N$，当 $n>n_0$ 时，对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有

$$|R_n(x)|=|S(x)-S_n(x)|=\frac{1}{n+1+x^2}<\varepsilon$$

即给定的函数级数在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛于$S(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

为了深入理解函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 (a,b)内一致收敛的概念，下面给出函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 (a,b)内一致收敛于和函数 $S(x)$ 的否定叙述. 否定的方法是：将一致收敛定义中的"一致"改为"非一致"，"任意"改为 "某个" "某个"，改为 "任意"，不等号 "<" 改为 "≥". 于是有：设函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 与$S(x)$皆定义在区间 (a,b)内. 如果存在某个$\varepsilon_0>0$，对任意 $n\in N$，存在某个 $n_0>n$ 和某个 $x_{n_0}\in(a,b)$，有

$$|R_{n_0}(x_{n_0})|=\left|\sum_{k=n_0+1}^{\infty}u_k(x_{n_0})\right|=|S(x_{n_0})-S_{n_0}(x_{n_0})|\geq\varepsilon_0$$

则函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 (a,b) 内非一敛致收于 和 函 数 $S(x)$.

为了更好地掌握函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 (a,b) 内一致和非一致收敛于和函数 $S(x)$ 的两种叙述，现对比列表如下：

函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$(a,b)$一致收敛于$S(x)\Longleftrightarrow$	函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$(a,b)$内非一致收敛于$S(x)\Longleftrightarrow$
对任意给定的$\varepsilon>0$	存在某个$\varepsilon_0>0$
存在(某个)$n_0\in N$	对任意的n
当(任意)$n>n_0$时，对任意$x\in(a,b)$	存在某个$n_0>n$和某个$x_{n_0}\in(a,b)$
有$\lvert R_n(x)\rvert=\left\lvert\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)\right\rvert=\lvert S(x)-S_n(x)\rvert<\varepsilon$	有$\lvert R_{n_0}(x_{n_0})\rvert=\left\lvert\sum_{k=n_0+1}^{\infty}u_k(x_{n_0})\right\rvert=\lvert S(x_{n_0})-S_{n_0}(x_{n_0})\rvert\geqslant\varepsilon_0$

例3 证明，函数级数

$$\frac{x}{1+x^2}+\left(\frac{2x}{1+4x^2}-\frac{x}{1+x^2}\right)+\cdots+\left(\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right)+\cdots$$

在闭区间[0，1]上非一致收敛。

证明 对任意 $x\in[0,1]$，有

$$S_n(x)=\frac{x}{1+x^2}+\left(\frac{2x}{1+4x^2}-\frac{x}{1+x^2}\right)+\cdots+\left(\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right)$$

$$=\frac{nx}{1+n^2x^2}$$

于是，

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n^2x^2}=0,\quad x\in[0,1]$$

即该函数级数在闭区间[0，1]上收敛于和函数 $S(x)\equiv0$。下面证明它非一致收敛。

事实上，存在 $\varepsilon_0=\frac{1}{3}$①$>0$，对任意的 $n\in N$，存在某个 $n_0>n$ 和某个 $x_{n_0}=\frac{1}{n_0}\in[0,1]$，有

$$|S(x_{n_0})-S_{n_0}(x_{n_0})|=\left|0-\frac{n_0\cdot\frac{1}{n_0}}{1+n_0^2\cdot\frac{1}{n_0^2}}\right|$$

$$=\frac{1}{2}>\frac{1}{3}=\varepsilon_0$$

即给定的函数级数在闭区间[0，1]上非一致收敛于 $S(x)\equiv 0$.

例 4　证明，函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}[nxe^{-nx}-(n-1)xe^{-(n-1)x}]$在闭区间[0,1]上非一致收敛于和函数 $S(x)\equiv 0$.

证明　对任意 $x\in[0,1]$，有

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}[kxe^{-kx}-(k-1)xe^{-(k-1)x}]=nxe^{-nx}$$

于是，

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}nxe^{-nx}=0$$

这就证明了，给定函数级数在闭区间[0,1]上收敛于$S(x)\equiv 0$.

下面证明该函数级数在闭区间[0,1]上非一致收敛.

事实上，存在 $\varepsilon_0=\frac{1}{2e}$②$>0$，对任意的 $n\in N$，存在某个 $n_0>n$ 和某个 $x_{n_0}=\frac{1}{n_0}\in[0,1]$，有

---

① 把ε_0取为$\frac{1}{3}$，主要考虑点x_{n_0}取为$\frac{1}{n_0}$时，使得$\left|0-\frac{n_0\frac{1}{n_0}}{1+n_0^2\cdot\frac{1}{n_0^2}}\right|=\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$.

② 把ε_0取为$\frac{1}{2e}$，是因为x_{n_0}取为$\frac{1}{n_0}$时，有$\left|0-n_0\cdot\frac{1}{n_0}e^{-n_0\frac{1}{n_0}}\right|=\frac{1}{e}>\frac{1}{2e}$,

$$|R_{n_0}(x_{n_0})|=\left|\sum_{k=n_0+1}^{\infty}u_k(x_{n_0})\right|=\left|S\left(\frac{1}{n_0}\right)-S_{n_0}\left(\frac{1}{n_0}\right)\right|$$

$$=\left|0-n_0\cdot\frac{1}{n_0}e^{-n_0\frac{1}{n_0}}\right|=e^{-1}>\frac{1}{2e}=\varepsilon_0$$

即给定的函数级数在闭区间[0,1]上非一致收敛于 $S(x)\equiv 0$。

例 5 证明，如果函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于 $S(x)$，函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，则函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f(x)u_n(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于 $f(x)S(x)$。

证明 已知 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，即存在 $M>0$，对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$|f(x)|<M$$

因为函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛，所以，根据函数级数一致收敛的定义，对任意给定的 $\frac{\varepsilon}{M}>0$，存在 $n_0\in N$，当 $n>n_0$ 时，对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有

$$|R_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)\right|=|S(x)-S_n(x)|<\frac{\varepsilon}{M}$$

设函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f(x)u_n(x)$ 的部分和为 $\sigma_n(x)$，那么

$$\sigma_n(x)=\sum_{k=1}^{n}f(x)u_k(x)=f(x)\sum_{k=1}^{n}u_k(x)=f(x)S_n(x)$$

于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$（同上述 ε），存在 $n_0\in N$（上述的 n_0），当 $n>n_0$ 时，对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有

$$|f(x)S(x)-\sigma_n(x)|=|f(x)S(x)-f(x)S_n(x)|$$

$$=|f(x)||S(x)-S_n(x)|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$$

即函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}f(x)u_n(x)$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上一致收敛。

§12.3 一致收敛判别法

一致收敛是函数级数中重要的概念，无论是研究一般的函数级数的和函数的分析性质，还是讨论幂级数等特殊的函数级数的和函数的分析性质，经常要判别函数级数的一致收敛性。如果每次判别都根据一致收敛的定义，那就太麻烦了。因此，我们给出几种常用的一致收敛判别法。

定理12.1（柯西一致收敛准则） 函数级数

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \tag{12.2}$$

在区间 (a,b)内一致收敛的充要条件是：对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $n_0\in N$，当 $n>n_0$时，对任意 $P\in N$和任意 $x\in(a,b)$，有

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)|=|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon$$

证明 **必要性** 设函数级数 (12.2) 在区间 (a,b)内一致收敛，根据一致收敛定义，则对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $n_0\in N$，当 $n>n_0$ 时，对任意 $x\in(a,b)$，有

$$|S(x)-S_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

特别是对 $n+P>n_0$，也有

$$|S(x)-S_{n+p}(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

于是，由（1）与（2）有

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)|=|S_{n+p}(x)-S(x)+S(x)-S_n(x)|$$
$$\leqslant|S(x)-S_{n+p}(x)|+|S(x)-S_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

充分性 由题设，根据数值级数的柯西收敛准则知，对任意给定的 $x\in(a,b)$ （x 暂时固定）数值级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛，即对任意给定的 $x\in(a,b)$有

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)=S(x) \qquad (3)$$

又由题设，当 $n>n_0$ 时，对任意 $P\in N$ 和任意 $x\in(a,b)$，有

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)|<\varepsilon \qquad (4)$$

令 $P\to+\infty$，对不等式（4）取极限（可在绝对值号里取极限），由（3）式得

$$|S(x)-S_n(x)|\leqslant\varepsilon$$

于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $n_0\in N$，当 $n>n_0$ 时，对任意 $x\in(a,b)$ 有

$$|S(x)-S_n(x)|\leqslant\varepsilon$$

即函数级数（12.2）在区间(a,b)内一致收敛。 □

为了更好地掌握函数级数的柯西一致收敛准则，现将柯西一致收敛准则的正否两种叙述列表如下：

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 (a,b) 内一致收敛 $\Longleftrightarrow$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 (a,b) 内非一致收敛 $\Longleftrightarrow$
对任意给定的 $\varepsilon>0$,	存在某个 $\varepsilon_0>0$,
存在(某个) $n_0\in$n,	对任意的 $n\in$n,
当(任意) $n>n_0$ 时和任意 $P\in N$,	存在某个$n_0>n$ 和某个 $P_0\in$n,
对任意的 $x\in(a,b)$,	存在某个 $x_{n_0}\in(a,b)$,
有 $\lvert S_{n+p}(x)-S_n(x)\rvert=\lvert u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)\rvert<\varepsilon$	有$\lvert S_{n_0+p_0}(x_{n_0})-S_{n_0}(x_{n_0})\rvert=\lvert u_{n_0+1}(x_{n_0})+u_{n_0+2}(x_{n_0})+\cdots+u_{n_0+p_0}(x_{n_0})\rvert\geqslant\varepsilon_0$

例 1 证明，函数级数

$$\sin x+\frac{\sin 2x}{2^2}+\cdots+\frac{\sin nx}{n^2}+\cdots$$

在区间$(-\infty,+\infty)$上一致收敛。

证明 对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$和任意 $P\in N$，有

$$
\begin{aligned}
|S_{n+P}(x)-S_n(x)| &= \left|\frac{\sin(n+1)x}{(n+1)^2}+\frac{\sin(n+2)x}{(n+2)^2}+\cdots\right.\\
&\left.+\frac{\sin(n+P)x}{(n+P)^2}\right| \leqslant \left|\frac{\sin(n+1)x}{(n+1)^2}\right|+\left|\frac{\sin(n+2)x}{(n+2)^2}\right|\\
&+\cdots+\left|\frac{\sin(n+P)x}{(n+P)^2}\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)^2}\\
&+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+P)^2} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

因为， $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\quad(n=2,3,\cdots)$

所以，由（5）式有

$$
\begin{aligned}
|S_{n+P}(x)-S_n(x)| &< \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots\\
&+\left(\frac{1}{n+P-1}-\frac{1}{n+P}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+P}<\frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

对任意给定的 $\varepsilon>0$，解不等式

$$|S_{n+P}(x)-S_n(x)|<\frac{1}{n}<\varepsilon$$

得 $n>\frac{1}{\varepsilon}$，取 $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$。于是，

对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>n_0$时，对任意 $P\in N$ 和任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$|S_{n+P}(x)-S_n(x)|<\varepsilon$$

即给定的函数级数在区间$(-\infty,+\infty)$上一致收敛．

例 2 利用柯西一致收敛准则的否定叙述，证明函数项级数

$$x^2+\left(\frac{x^2}{2}-x^2\right)+\cdots+\left(\frac{x^2}{n}-\frac{x^2}{n-1}\right)+\cdots$$

在区间$(-\infty, +\infty)$上非一致收敛。

证明 存在$\varepsilon_0=\frac{1}{3}$①$>0$，对任意的$n\in N$，存在某个$n_0>n$和$P_0=n_0\in N$，存在某个$x_{n_0}=\sqrt{n_0}\in(-\infty,+\infty)$，有

$$|S_{n_0+p_0}(x_{n_0})-S_{n_0}(x_{n_0})|=\left|\frac{x_{n_0}^2}{n_0+P_0}-\frac{x_{n_0}^2}{n_0}\right|$$

$$=\left|\frac{n_0}{n_0+n_0}-\frac{n_0}{n_0}\right|=\frac{1}{2}>\frac{1}{3}=\varepsilon_0$$

于是，根据柯西一致收敛准则的否定叙述，该函数级数非一致收敛。

例 3 利用柯西一致收敛准则的否定叙述，证明函数级数$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$在区间$(0,+\infty)$上非一致收敛。

证明 存在$\varepsilon_0=\frac{1}{e^2}>0$，对任意的$n\in N$，存在某个$n_0>n$和某个$P_0=n_0$，存在某个$x_{n_0}=\frac{1}{n_0}\in(0,+\infty)$，有

$$|S_{n_0+p_0}(x_{n_0})-S_{n_0}(x_{n_0})|=\left|S_{n_0+n_0}\left(\frac{1}{n_0}\right)-S_{n_0}\left(\frac{1}{n_0}\right)\right|$$

$$=|(n_0+1)e^{-(n_0+1)\frac{1}{n_0}}+(n_0+2)e^{-(n_0+2)\frac{1}{n_0}}+\cdots$$

$$+2n_0e^{-2n_0\frac{1}{n_0}}|>n_0e^{-2n_0\frac{1}{n_0}}+n_0e^{-2n_0\frac{1}{n_0}}+\cdots+n_0e^{-2n_0\frac{1}{n_0}}$$

$$=n_0^2e^{-2}>\frac{1}{e^2}=\varepsilon_0$$

于是，根据柯西一致收敛准则的否定叙述，给定函数级数在区间$(0,+\infty)$上非一致收敛。

由例1看到，应用柯西一致收敛准则，判别函数级数的一

---

① ε_0取为$\frac{1}{3}$，主要考虑当$x_{n_0}=\sqrt{n_0}$时，有$\left|\frac{x_{n_0}^2}{n_0+p_0}-\frac{x_{n_0}^2}{n_0}\right|>\frac{1}{3}$.

致收敛性也是比较麻烦的，但是有了这个准则，可以导出一些应用起来很方便的一致收敛判别法。

定理12.2（外尔斯特拉斯①或M—判别法） 如果函数级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的每一项 $u_n(x)$，对任意 $x\in(a,b)$，有

$$|u_n(x)|\leqslant a_n \quad (n=1,2,\cdots)$$

而正项数值级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则函数级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间(a,b)内一致收敛。

证明 因为正项数值级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，所以，根据数值级数的柯西收敛准则有，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $n_0\in \boldsymbol{N}$，当 $n>n_0$ 时，对任意 $P\in \boldsymbol{N}$，有

$$|S_{n+p}-S_n|=(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p})<\varepsilon \qquad (6)$$

又因对任意 $x\in(a,b)$，$|u_n(x)|\leqslant a_n$ $(n=1,2,\cdots)$，故由（6）式有

$$\begin{aligned}|S_{n+p}(x)-S_n(x)|&=|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|\\&\leqslant|u_{n+1}(x)|+|u_{n+2}(x)|+\cdots+|u_{n+p}(x)|\\&\leqslant(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p})<\varepsilon\end{aligned}$$

这就证明了，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $n_0\in \boldsymbol{N}$，当$n>n_0$时，对任意 $P\in \boldsymbol{N}$ 和任意 $x\in(a,b)$，有

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)|<\varepsilon$$

根据柯西一致收敛准则知，函数级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间(a,b)内一致收敛。

此判别法称为**外尔斯特拉斯优级数判别法**。正项数值级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$称为**优级数**。

---

① 外尔斯特拉斯：Weierstrass, K. 德国数学家，1815—1897。

例 4 判别函数级数

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots$$

在区间 $[-a,a]$ $(a>0)$ 上的一致收敛性。

解 因为对任意 $x\in[-a,a]$，有

$$|u_n(x)|=\left|(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right|\leqslant\frac{a^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$(n=1,2,\cdots)$$

而正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^{2n-1}}{(2n-1)!}$收敛①，所以，根据 M—判别法知，给定函数级数在区间$[-a,a]$ 上一致收敛。

现在再来考察例 1 中的函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$，如果用 M—判别法判别它在区间$(-\infty,+\infty)$上的一致收敛性，那是非常简单的。事实上，因为对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}\quad(n=1,2,\cdots)$$

而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，所以，根据 M—判别法知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$在区间$(-\infty,+\infty)$上一致收敛。

上述二例已充分地说明了，M—判别法是判别某些函数级数的一致收敛性的非常简便而又有效的方法。但是读者不难发现，凡是能用M—判别法判别它的一致收敛性的函数级数，它必是绝对收敛的。因此，对那些虽然是一致收敛，但却非绝对收敛的函数级数，M—判别法就失效了。对于判别一致而又条件收敛的函数级数的一致收敛性，这里有与判别数值级数条件

---

① 用达兰贝尔判别法，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\frac{(2n-1)!}{a^{2n-1}}=0<1$。

收敛性相对应的，关于判别一致收敛性的狄利克莱判别法和阿贝尔判别法。

定理12.3（狄利克莱判别法） 如果函数级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$满足条件：

（1）对任意固定的 $x\in(a,b)$，数列 $\{a_n(x)\}$ 单调，且对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $n_0\in N$，当 $n>n_0$ 时，对任意 $x\in(a,b)$，有 $|a_n(x)|<\varepsilon$；

（2）存在数 $M>0$，对任意 $x\in(a,b)$，有

$$|B_n(x)|=|b_1(x)+b_2(x)+\cdots+b_n(x)|\leqslant M \quad (n=1,2,\cdots)$$

则函数级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 (a,b)内一致收敛。

证明 由（2），对任意 $x\in(a,b)$ 和任意 $P\in N$，有

$$\begin{aligned}&|b_{n+1}(x)+b_{n+2}(x)+\cdots+b_{n+P}(x)|\\&=|B_{n+P}(x)-B_n(x)|\leqslant(|B_{n+P}(x)|+|B_n(x)|)\leqslant 2M\end{aligned}$$

由（1），不妨设，对任意固定的$x\in(a,b)$，数列$\{a_n(x)\}$递减①。又由于对任意固定的$x\in(a,b)$，$a_n(x)$ 收敛于0，故必有

$$\begin{aligned}&a_1(x)\geqslant a_2(x)\geqslant\cdots\geqslant a_n(x)\geqslant a_{n+1}(x)\geqslant\cdots\\&\geqslant a_{n+P}(x)\geqslant\cdots\geqslant 0\end{aligned}$$

于是，根据阿贝尔引理，有

$$\begin{aligned}&|a_{n+1}(x)b_{n+1}(x)+a_{n+2}(x)b_{n+2}(x)+\cdots\\&+a_{n+P}(x)b_{n+P}(x)|\leqslant 2Ma_{n+1}(x)\end{aligned} \qquad (7)$$

由（1），对任意给定的$\dfrac{\varepsilon}{2M}>0$，存在 $n_0\in N$，当 $n>n_0$ 时，

---

① 若$\{a_n(x)\}$递增，则$\{-a_n(x)\}$递减，这时考虑级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n(x))(-b_n(x))$的一致收敛性。

对任意 $x\in(a,b)$，有

$$0\leqslant a_{n+1}(x)<\frac{\varepsilon}{2M} \tag{8}$$

所以，由（7）与（8）式，立即推得

$$|a_{n+1}(x)b_{n+1}(x)+\cdots+a_{n+p}(x)b_{n+p}(x)|<\varepsilon$$

根据函数级数的柯西一致收敛准则知，函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$在区间$(a,b)$内一致收敛. □

定理12.4（阿贝尔判别法） 如果函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$满足条件：

（1）对任意固定的 $x\in(a,b)$，数列 $\{a_n(x)\}$ 单调，且函数列 $\{a_n(x)\}$在区间 (a,b) 内一致有界，即存在数 $M>0$，对任意 $x\in(a,b)$ 有

$$|a_n(x)|\leqslant M \quad (n=1,2,\cdots)$$

（2）函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n(x)$在区间 (a,b)内一致收敛。

则函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$ 在区间 (a,b) 内一致收敛。

证明 由（2），根据柯西一致收敛准则，为任意给定的$\varepsilon>0$，存在 $n_0\in \mathbf{N}$，当 $n>n_0$时，对任意 $P\in \mathbf{N}$和任意$x\in(a,b)$，有

$$|b_{n+1}(x)+b_{n+2}(x)+\cdots+b_{n+p}(x)|<\varepsilon \tag{9}$$

由条件（1）和（9）式，根据阿贝尔引理，有

$$\begin{aligned}&|a_{n+1}(x)b_{n+1}(x)+a_{n+2}(x)b_{n+2}(x)+\cdots\\&\qquad+a_{n+p}(x)b_{n+p}(x)|\\&\leqslant\varepsilon(|a_{n+1}(x)|+2|a_{n+p}(x)|)\leqslant 3M\varepsilon\end{aligned}$$

根据函数级数的柯西一致收敛准则知，函数级数$\sum_{n=1}^{\infty} a(x)b_n(x)$

在区间 (a,b)内一致收敛. □

例 5 判别函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{\sqrt{n}}$ 在闭区间 $[\alpha,\pi-\alpha]$

$(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$上的一致收敛性.

解 用狄利克莱判别法. 设 $a_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n}}$, $b_n(x)=\sin 2nx$

$(n=1,2,\cdots)$. 显然满足下列条件:

(1) 对任意固定的 $x\in[\alpha,\pi-\alpha]$, 数列 $a_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n}}$递

减, 且对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $n_0\in N$, 当 $n>n_0$时, 对任意

$x\in[\alpha,\pi-\alpha]$, 有 $|a_n(x)|=\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right|=\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$.

(2) 对任意 $x\in[\alpha,\pi-\alpha]$, 有

$$|B_n(x)|=\left|\sum_{k=1}^{n}\sin 2kx\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}\sin k\cdot 2x\right|$$

$$=\left|\frac{\sin\frac{(n+1)2x}{2}\cdot\sin\frac{n\cdot 2x}{2}}{\sin\frac{2x}{2}}\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{\sin x}\leqslant\frac{1}{\sin\alpha}\quad(n=1,2,\cdots;0<\alpha<\frac{\pi}{2})$$

于是, 根据狄利克莱判别法知, 函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{\sqrt{n}}$ 在闭区间

$[\alpha,\pi-\alpha]$ $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$ 上一致放敛.

例 6 证明函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\operatorname{arctg}nx^2}{n}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛。

证明 用阿贝尔判别法。设 $a_n(x)=\operatorname{arctg}nx^2$，$b_n(x)=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$，显然，满足下列条件：

（1）$\{a_n(x)\}=\{\operatorname{arctg}nx^2\}$对任意固定的$x\in(-\infty,+\infty)$递增，且一致有界，这是因为，对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有 $|\operatorname{arctg}nx^2|<\frac{\pi}{2}$ $(n=1,2,\cdots)$；

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 收敛（见§11.4例 1），故它在区间$(-\infty,+\infty)$上一致收敛。

于是，根据阿贝尔判别法知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\operatorname{arctg}nx^2}{n}$在区间$(-\infty,+\infty)$上一致收敛。

§12.4 和函数的分析性质

我们在 §12.1 的例 3 中看到了，一般说来，函数级数的每项所具有的分析性质不能推得和函数也具有同样分析性质。但是，如果函数级数是一致收敛的，则每项所具有的分析性质，就可以推得和函数也具有同样的分析性质。

定理12.5 如果函数级数

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \tag{12.2}$$

在闭区间$[a,b]$上一致收敛于 $S(x)$，且它的每一项 $u_n(x)$ 在闭区间 $[a,b]$上皆连续，则函数级数(12.2)的和函数 $S(x)$ 在闭区间 $[a,b]$上也连续。

分析 只须证明 $S(x)$ 在闭区间$[a,b]$ 上任意一点 x_0 连

续，即证明，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|S(x)-S(x_0)|<\varepsilon$ 即可.

证明 任取一点 $x_0\in(a,b)$. 因为函数级数(12.2)在闭区间 $[a,b]$上一致收敛，所以，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $n_0\in$ $\boldsymbol{N}$，当 $n>n_0$ 时，对任意 $x\in[a,b]$，有

$$|S(x)-S_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{1}$$

特别地，当 $x=x_0$ 时，有

$$|S(x_0)-S_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{2}$$

又因函数级数(12.2)的每一项 $u_n(x)$在闭区间$[a,b]$ 上连续，所以 $S_n(x)$在闭区间 $[a,b]$上也连续，当然在点 x_0 连续. 根据函数在一点连续的定义知，对同一个 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|S_n(x)-S_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{3}$$

于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，当 $|x-x_0|<\delta$，且 $x\in[a,b]$时，由（1）、（2）和（3）式，有

$$\begin{aligned}|S(x)-S(x_0)| &= |S(x)-S_n(x)+S_n(x_0)\\&\quad -S_n(x_0)+S_n(x_0)-S(x_0)|\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\end{aligned}$$

故和函数 $S(x)$ 在点 x_0 连续，再由点 $x_0\in[a,b]$ 的任意性知，$S(x)$ 在闭区间$[a,b]$ 上连续.

定理12.6 如果函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$，并且每一项 $u_n(x)$ 在闭区间$[a,b]$ 上连续，则和函数 $S(x)$在闭区间 $[a,b]$ 上可积，且有等式

$$\int_a^b S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx \tag{12.9}$$

函数级数的这种性质简称为逐项可积。

分析 由于

$$\int_a^b S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_a^b u_k(x)dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_a^b\left[\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\right]dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)dx$$

只须证明，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $n_0\in N$，当$n>n_0$时，有

$$\left|\int_a^b S_n(x)dx-\int_a^b S(x)dx\right|\leqslant\int_a^b|S(x)-S_n(x)|\,dx<\varepsilon$$

证明 首先，由于 $u_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$在闭区间$[a,b]$上连续，且函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛。于是，根据定理12.5知，$S(x)$在闭区间 $[a,b]$上连续，故 $S(x)$ 在闭区间 $[a,b]$上可积。

其次，根据一致收敛定义，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在$n_0\in N$，当 $n>n_0$ 时，对任意 $x\in[a,b]$，有

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$$

于是，

$$\left|\int_a^b[S(x)-S_n(x)]dx\right|\leqslant\int_a^b|S(x)-S_n(x)|\,dx$$

$$<\int_a^b\varepsilon dx=\varepsilon(b-a)$$

这就证明了等式（12.9）成立。 □

等式(12.9)也可改写为

$$\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx \tag{12.10}$$

定理12.7 如果函数级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$满足条件:

(1) 闭区间在 $[a,b]$上收敛于和函数 $S(x)$;

(2) $u_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$在闭区间 $[a,b]$ 上有连续的导函数 $u'_n(x)$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ 在闭区间 $[a,b]$上一致收敛.

则和函数 $S(x)$在闭区间 $[a,b]$ 上也有连续的导函数，且

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \tag{12.11}$$

函数级数的这种性质，简称为**逐项可微**.

证明 由(3)，设 $T(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$。再由(2)，根据定理12.5知，$T(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ 在 $[a,x]$($\subset[a,b]$) 上也一致收敛，再由(2)，根据定理12.6，有

$$\int_a^x T(y)dy=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u'_n(y)dy \quad (a\leqslant x\leqslant b)$$

由微积分基本公式，有

$$\int_a^x u'_n(y)dy=u_n(y)\Big|_a^x=u_n(x)-u_n(a)$$

于是，

$$\int_a^x T(y)dy=\sum_{n=1}^{\infty}[u_n(x)-u_n(a)]$$

再由条件(1)知，$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$，$S(a)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)$根据定理11.2，有

$$\int_a^x T(y)dy = S(x) - S(a)$$

即
$$S(x) = \int_a^x T(y)dy + S(a) \tag{4}$$

对（4）式两边求导，注意 $T(y)$在闭区间$[a,x]$上连续，根据定理9.16得

$$S'(x) = \left[\int_a^x T(y)dy + S(a)\right]' = T(x)$$

即
$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$$ □

等式(12.11)也可改写为

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} u_n(x) \tag{12.12}$$

例 1 证明函数 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$在$(0, +\infty)$内连续.

分析 因为级数$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$在区间$(0, +\infty)$内并非一致收敛（见§12.3例3），所以不能直接应用定理12.5，证明$S(x)$在区间$(0, +\infty)$内连续. 但由于$S(x)$在区间$(0, +\infty)$内连续，即函数$S(x)$在每一点$x_0 \in (0, +\infty)$连续，因此，要证明$S(x)$在区间$(0, +\infty)$内连续就转化为证明$S(x)$在任意一点$x_0 \in (0, +\infty)$连续. 而要证明$S(x)$在任意一点$x_0 \in (0, +\infty)$连续，可任取$a>0$，使得$0<a<x_0$，证明级数在区间$[a, +\infty)$上一致收敛. 从而，根据定理12.5知，$S(x)$在区间$[a, +\infty)$上连续，这就证明了$S(x)$在区间$(0, +\infty)$内连续.

证明 设x_0是区间$(0, +\infty)$内任意给定的一点，存在正数a，使$0<a<x_0$，给定函数级数满足条件：

（1）$u_n(x) = ne^{-nx}$在区间$(a, +\infty)$上连续$(n = 1, 2, \cdots)$；

（2）级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$在区间$(\alpha,+\infty)$上一致收敛。

事实上，对任意$x\in(\alpha,+\infty)$，有

$$|ne^{-nx}|\leqslant ne^{-n\alpha}\quad(n=1,2,\cdots)$$

而级数$\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-n\alpha}$收敛①，根据$M$—判别法知，函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$在区间$(\alpha,+\infty)$上一致收敛。

根据定理12.5知，$S(x)$在区间$(\alpha,+\infty)$上连续，从而在点x_0连续。由$x_0\in(0,+\infty)$的任意性知，和函数$S(x)$在区间$(0,+\infty)$内连续。

例 2 证明，$\theta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}$在区间$(-\infty,+\infty)$上可微，且$\theta'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}\right]'$。

证明 因为函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}$满足条件：

（1）函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}$在$(-\infty,+\infty)$上收敛②。

（2）$\left[\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}\right]'=\frac{n^2}{n^4+x^2}\quad(n=1,2,\cdots)$在$(-\infty,+\infty)$

---

① 由于$\lim_{n\to\infty}\frac{ne^{-n\alpha}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{e^{n\alpha}}=0<+\infty$，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛．于是，根据比较判别法推论知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-n\alpha}$收敛．

② 对任意$x\in(-\infty,+\infty)$，有$\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}}{\frac{x}{n^2}}=1<+\infty$，

上连续。

（3）函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^4+x^2}$在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛。

这是因为，对任意 $x\in(-\infty, +\infty)$ 有

$$\left|\frac{n^2}{n^4+x^2}\right|=\frac{n^2}{n^4+x^2}\leqslant\frac{1}{n^2}\quad(n=1,2,\cdots)$$

而数值级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故由M—判别法知，函数级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^4+x^2}$$

在区间$(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛。

由（1）、（2）和（3），根据定理12.7知，$\theta(x)$在区间$(-\infty, +\infty)$ 上有连续导数，且 $\theta'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}\right]'$。

§12.5 函 数 列

一 函数列概念

定义 设 $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 是定义在集合 E 上的一列函数，即

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_n(x),\cdots \tag{12.13}$$

称它是定义在E上的函数列，记作 $\{f_n(x)\}$，$x\in E$。

对于E 上每一个给定点 x_0，函数列(12.13)就变成了数列

$$f_1(x_0),\ f_2(x_0),\ \cdots,\ f_n(x_0),\cdots \tag{12.14}$$

如果数列(12.14)收敛，则称点 x_0 为函数列（12.13）的**收敛点**，或称函数列 $\{f_n(x)\}$ 在点 x_0 收敛。如果(12.14)发散，

则称点 x_0 为函数列(12.13)的**发散点**，或称函数列 $\{f_n(x)\}$ 在点 x_0 发散。

所有收敛点组成的集合 $X\subset E$，称为函数列 $\{f_n(x)\}$ 的**收敛域**，所有发散点组成的集合 $Y\subset E$，称为函数列$\{f_n(x)\}$ 的**发散域**。显然，$X\cup Y=E$。如果收敛域 X 是一个区间，则称X为**收敛区间**。

对于收敛域X内每一个确定点 x，数列 $\{f_n(x)\}$在点x收敛于它的极限$f(x)$。于是，在函数列 $\{f_n(x)\}$的收敛域X上，就定义了一个函数 $f(x)$，称 $f(x)$是函数列 $\{f_n(x)\}$的**极限函数**，即

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)，\text{任意 } x\in X$$

例 1 求定义在区间$(-\infty,+\infty)$上的等比数列 $\{f_n(x)\}=\{x^n\}$的收敛域和极限函数。

解 显然，当 $|x|<1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$；

当 $x=1$ 时， $f(1)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(1)=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$；

当 $x=-1$时，数列 $\{(-1)^n\}$发散；

当 $|x|>1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}x^n=\infty$。

于是，等比数列的收敛域为区间$(-1,1]$，极限函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } |x|<1 \text{ 时,}\\ 1, & \text{当 } x=1 \text{ 时.}\end{cases}$$

例 2 求定义在区间 $[0,+\infty)$ 上的函数列 $\{f_n(x)\}=\left\{\dfrac{\sqrt{n}x}{1+n^2x^2}\right\}$的收敛域和极限函数。

解 当 $x=0$ 时， $f_n(0)=0$，从而

$$f(0)=\lim_{n\to\infty}f_n(0)=0$$

当 $x\in(0,+\infty)$时，有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}x}{1+n^2x^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{x}}{n^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{n^2}+x^2}=0$$

即函数列 $\{f_n(x)\}=\left\{\frac{\sqrt{nx}}{1+n^2x^2}\right\}$的收敛域 $X=(0,+\infty)$，其极限函数 $f(x)\equiv 0$。

二　一致收敛性

不难看出，函数级数的收敛域及其和函数 $S(x)$，实质上就是部分和函数列 $\{S_n(x)\}$ 的收敛域及其极限函数 $S(x)$. 而函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间 (a,b) 内一致收敛于和函数 $S(x)$，实质上就是函数级数的部分和函数列 $\{S_n(x)\}$在区间 (a,b)内一致收敛于极限函数 $S(x)$。 对一般函数列，有如下定义。

定义　设函数列 $\{f_n(x)\}$ 与函数 $f(x)$皆在区间 (a,b)内有定义，如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $n_0\in N$，当 $n>n_0$ 时，对任意 $x\in(a,b)$，有

$$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

则称函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 (a,b) 内一致收敛，或称函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 (a,b)内一致收敛于极限函数 $f(x)$。

例 3　证明，函数列

$$\frac{\sqrt{x-1}}{1+(x-1)},\ \frac{\sqrt{x-1}}{1+2^2(x-1)},\ \cdots,$$

$$\frac{\sqrt{x-1}}{1+n^2(x-1)},\ \cdots$$

在区间$[1,+\infty)$上一致收敛于极限函数 $f(x)\equiv 0$.

证明　对任意给定的 $\varepsilon>0$ 和任意 $x\in[1,+\infty)$，解不等式

$$|f(x)-f_n(x)|=\left|0-\frac{\sqrt{x-1}}{1+n^2(x-1)}\right|=\frac{\sqrt{x-1}}{1+n^2(x-1)}$$

$$=\frac{1}{2n}\cdot\frac{2\cdot1\cdot n\sqrt{x-1}}{1^2+(n\sqrt{x-1})^2}①\leqslant\frac{1}{2n}<\varepsilon$$

得 $n>\frac{1}{2\varepsilon}$. 取 $n_0=\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$. 于是，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在 $n_0\in N$，当 $n>n_0$ 时，对任意 $x\in[1,+\infty)$，有

$$|f(x)-f_n(x)|=\left|0-\frac{\sqrt{x-1}}{1+n^2(x-1)}\right|<\varepsilon$$

即函数列 $\{f_n(x)\}=\left\{\frac{\sqrt{x-1}}{1+n^2(x-1)}\right\}$ 在区间 $[1,+\infty)$上一致收敛于极限函数 $f(x)\equiv0$.

为了应用函数列的一致收敛定义判别函数列的一致收敛性和非一致收敛性，我们将函数列的一致收敛与非一致收敛列表对比如下：

函数列$\{f_n(x)\}$在区间 (a,b)内一致收敛于 $f(x)\Longleftrightarrow$	函数列 $\{f_n(x)\}$在区间(a,b)内非一致收敛于 $f(x)\Longleftrightarrow$
对任意给定的 $\varepsilon>0$	存在某个 $\varepsilon_0>0$
存在（某个）$n_0\in n$	对任意的 $n\in N$
当（任意）$n>n_0$ 和任意 $x\in(a,b)$	存在某个 $n_0>n$和某个$x_{n_0}\in(a,b)$
有 $\|f(x)-f_n(x)\|<\varepsilon$	有 $\|f(x_{n_0})-f_{n_0}(x_{n_0})\|\geqslant\varepsilon_0$

例 4 证明，函数列$\{f_n(x)\}=\{nxe^{-nx}\}$在闭区间 $[0,1]$上非一致收敛于极限函数 $f(x)\equiv0$.

解 不难证明，函数列 $\{f_n(x)\}=\{nxe^{-nx}\}$ 在闭区间$[0,1]$上收敛于 $f(x)\equiv0$.

当 $x=0$ 时，$f_n(0)=0$，于是，$f(0)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(0)=0$.

---

① 由不等式 $2ab\leqslant a^2+b^2$，得$\frac{2ab}{a^2+b^2}\leqslant1$，故$\frac{2\cdot1\cdot n\sqrt{x-1}}{1^2+(n\sqrt{x-1})^2}\leqslant1$.

当 $0<x\leqslant 1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}nxe^{-nx}$①$\equiv 0$。

即 $\{f_n(x)\}$在闭区间$[0,1]$上收敛于极限函数 $f(x)\equiv 0$。

存在 $\varepsilon_0=\frac{1}{3}$②$>0$，对任意的 $n\in N$，存在某个 $n_0>n$ 和某个 $x_{n_0}=\frac{1}{n_0}\in[0,1]$，有

$$|f(x_{n_0})-f_{n_0}(x_{n_0})| = \left|0-n_0\frac{1}{n_0}e^{-n_0\frac{1}{n_0}}\right|=e^{-1}>\frac{1}{3}=\varepsilon_0$$

即函数列$\{f_n(x)\}=\{nxe^{-nx}\}$ 在闭区间 $[0,1]$上非一致收敛于极限函数 $f(x)\equiv 0$。

平行于函数级数的柯西一致收敛准则，也有函数列的柯西一致收敛准则。

定理12.8（柯西一致收敛准则） 函数列

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_n(x),\cdots \qquad (12.13)$$

在区间 (a,b)内一致收敛的充要条件是：对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $n_0\in N$，当 $n>n_0$ 时，对任意 $x\in(a,b)$ 和任意 $P\in N$，有

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

证明与级数的柯西一致收敛准则的证明完全类似，留给读者作为练习。

下面将函数列的柯西一致收敛准则的正否两种叙述表列对比如下：

---

① 对任意 $x\in(0,1)$，

$$\lim_{n\to\infty}nxe^{-nx}=\lim_{y\to\infty}\frac{yx}{e^{yx}}=\lim_{y\to\infty}\frac{x}{xe^{yx}}=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{e^{yx}}=0$$

② ε_0 取为 $\frac{1}{3}$，主要考虑当 $x_{n_0}=\frac{1}{n_0}$ 时，有 $|f(x_{n_0})-f_{n_0}(x_{n_0})|>\frac{1}{3}$。

$\{f_n(x)\}$在区间 (a,b) 内一致收敛于极限函数 $f(x)\Longleftrightarrow$	$\{f_n(x)\}$ 在区间(a,b)内非一致收敛于极限函数 $f(x)\Longleftrightarrow$
对任意给定的 $\varepsilon>0$	存在某个 $\varepsilon_0>0$
存在(某个) $n_0\in N$	对任意的 $n\in N$
当(任意) $n>n_0$ 和任意 $P\in N$	存在某个 $n_0>n$ 和某个 $P_0\in N$
对任意的 $x\in(a,b)$	存在某个 $x_{n0}\in(a,b)$,
有 $\|f_{n+P}(x)-f_n(x)\|<\varepsilon$	有$\|f_{n_0+P_0}(x_{n0})-f_{n0}(x_{n0})\|\geq\varepsilon_0$

例 5 证明，函数列$\{f_n(x)\}=\left\{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}\right\}$在区间$(-\infty,+\infty)$内一致收敛。

证明 对任意给定的 $\varepsilon>0$，对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$解不等式

$$|f_{n+P}(x)-f_n(x)|=\left|\sqrt{x^2+\frac{1}{(n+P)^2}}-\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}\right|$$

$$=\frac{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+P)^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{(n+P)^2}}+\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}}$$

$$<\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

得 $n>\frac{1}{\varepsilon}$，取 $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$。于是，

对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $n_0\in\boldsymbol{N}$，当 $n>n_0$ 时，对任意 $P\in\boldsymbol{N}$和任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$|f_{n+P}(x)-f_n(x)|$$

$$=\left|\sqrt{x^2+\frac{1}{(n+P)^2}}-\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}\right|<\varepsilon$$

根据函数列的柯西一致收敛准则，函数列

$$\{f_n(x)\}=\left\{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}\right\}\text{在}(-\infty,+\infty)\text{上一致收敛。}$$

例 6 利用函数列的柯西一致收敛准则的否定叙述，证明函数列 $\{f_n(x)\}=\{\mathrm{arctg}\,nx\}$ 在区间$(0,+\infty)$内非一致收敛。

证明 存在 $\varepsilon_0=\mathrm{arctg}\,\frac{1}{4}>0$，对任意的 $n\in N$，存在$n_0>n$ 和 $P_0=n_0\in N$，存在某个 $x_{n_0}=\frac{1}{n_0}\in(0,+\infty)$，有

$$\begin{aligned}|f_{n_0+P_0}(x_{n_0})-f_{n_0}(x_{n_0})|&=|\mathrm{arctg}(n_0+P_0)x_{n_0}-\mathrm{arctg}\,n_0x_{n_0}|\\&=\left|\mathrm{arctg}\,(n_0+n_0)\frac{1}{n_0}-\mathrm{arctg}\,n_0\frac{1}{n_0}\right|\\&=\left|\mathrm{arctg}\frac{1}{2}-\mathrm{arctg}1\right|\\&=\mathrm{arctg}\,1-\mathrm{arctg}\frac{1}{2}\\&=\mathrm{arctg}\frac{1}{3}>\mathrm{arctg}\frac{1}{4}^{①}=\varepsilon_0\end{aligned}$$

根据柯西一致收敛准则的否定叙述，函数列 $\{f_n(x)\}=\{\mathrm{arctg}\,nx\}$在区间$(0,+\infty)$上非一致收敛。

三　极限函数的分析性质

与函数级数的和函数的分析性质平行地也有函数列的极限函数的分析性质。我们只列出这些性质，证明与级数的和函数分析性质完全类似，留给读者自己去完成。

定理12.9 如果函数列 $\{f_n(x)\}$ 在闭区间 $[a,b]$上一致收敛于极限函数 $f(x)$，且函数列 $\{f_n(x)\}$每一项 $f_n(x)$ 皆在

① 因为 $(\mathrm{arctg}x)'=\frac{1}{1+x^2}>0\ (-\infty<x<+\infty)$，所以，在 $(-\infty,+\infty)$上 $\mathrm{arctg}x$ 严格递增，从而$\mathrm{arctg}\frac{1}{3}>\mathrm{arctg}\frac{1}{4}$。

闭区间 $[a,b]$上连续，则极限函数 $f(x)$在闭区间 $[a,b]$ 上也连续.

定理12.10 如果函数列 $\{f_n(x)\}$在闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛于极限函数 $f(x)$， 且函数列 $\{f_n(x)\}$ 每一项 $f_n(x)$ 皆在闭区间 $[a,b]$上连续，则极限函数 $f(x)$在闭区间 $[a,b]$ 上可积，且有等式

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx \tag{12.15}$$

定理12.11 如果函数列 $\{f_n(x)\}$ 满足下列条件：

（1）在闭区间$[a,b]$ 上收敛于极限函数 $f(x)$；

（2）每一项 $f_n(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有连续的导函数 $f_n'(x)$；

（3）函数列 $\{f_n'(x)\}$ 在闭区间$[a,b]$ 上一致收敛.

则极限函数 $f(x)$在闭区间 $[a,b]$ 上也有连续的导函数，且

$$f'(x)=\lim_{n\to\infty}f'_n(x) \tag{12.16}$$

例 7 证明，函数列 $\{f_n(x)\}=\{nxe^{-nx^2}\}$ 在闭区间$[0,1]$上收敛于 $f(x)\equiv0$，但由于非一致收敛，所以

$$\int_0^1 f(x)dx\neq\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$$

证明 对任意 $x\in[0,1]$，有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{e^{nx^2}}=0$$

存在 $\varepsilon_0=\frac{1}{e}>0$，对任意的 $n\in N$，存在某个 $n_0>n$和某个 $x_{n_0}=\frac{1}{n_0}\in[0,1]$，有

$$|f(x_{n_0})-f_{n_0}(x_{n_0})|=\left|0-n_0\cdot\frac{1}{n_0}\cdot\frac{1}{e^{n_0\cdot\frac{1}{n_0^2}}}\right|$$

$$=\frac{1}{e^{\frac{1}{n_0}}}>\frac{1}{e}=\varepsilon_0$$

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

述的 n_0），当 $n>n_0$ 时，对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$|R_n(x)|=|R_n(x)-0|$$

$$=\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\frac{\cos kx}{k!}\right|\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}<\varepsilon$$

根据一致收敛定义的等价叙述知，函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛。

例 3 证明，函数级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\cos 2x}$在闭区间$[0,\pi]$上是一致收敛的。

基本思路 利用莱布尼兹判别法之余式估计，证明$R_n(x)$一致收敛于0。

证明 由于此级数是交错级数，因此，对任意$x\in[0,\pi]$，根据定理11.10之2°，有

$$|R_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+\cos 2x}\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{n+1+\cos 2x}\leqslant\frac{1}{n}\to 0\quad(n\to\infty)$$

这说明$R_n(x)$在闭区间$[0,\pi]$上一致收敛于0，根据函数级数一致收敛定义的等价叙述知，函数级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\cos 2x}$在闭区间$[0,\pi]$上一致收敛。

例 4 证明，函数列$f_n(x)=\frac{n^2x^2}{1+nx+n^2}$在闭区间$[0,1]$上一致收敛于极限函数$f(x)=x^2$。

证明 对任意$x\in[0,1]$，有

$$|f(x)-f_n(x)|=|(f(x)-f_n(x))-0|$$

$$=\left|x^2-\frac{n^2x^2}{1+nx+n^2}\right|=\left|\frac{x^2(1+nx)}{1+nx+n^2}\right|$$

$$<\frac{1+n}{n^2}<\frac{2n}{n^2}=\frac{2}{n}\to 0\quad(n\to\infty)$$

于是，根据函数列的一致收敛定义的等价叙述知，$f_n(x)$ 在闭区间$[0,1]$上一致收敛于 $f(x)=x^2$。

例 5 证明函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}\{n^2x(2-nx)e^{-nx}-(n-1)^2x[2-(n-1)x]e^{-(n-1)x}\}$在闭区间$[0,1]$上非一致收敛于 $S(x)\equiv 0$.

基本思路 利用一致收敛的否定叙述，存在某个 $\varepsilon_0>0$，对任意 $n\in N$，存在 $n_0>n$ 和 $x_{n_0}=\frac{1}{n_0}\in[0,1]$，有

$$|R_{n_0}(x_{n_0})|=n_0^2\cdot\frac{1}{n_0}\left(2-n_0\frac{1}{n_0}\right)e^{-1}>e^{-1}=\varepsilon_0$$

证明 对任意 $x\in[0,1]$，有

$$S_n(x)=n^2x(2-nx)e^{-nx}$$

于是，

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}n^2x^2(2-nx)e^{-nx}=0$$①

这就证明了给定的函数级数在闭区间$[0,1]$上收敛于 $S(x)\equiv 0$。

下面证明该函数级数在闭区间$[0,1]$上非一致收敛。

---

① 当 $x=0$时，$S(0)=\lim_{n\to\infty}S_n(0)=\lim_{n\to\infty}0=0$；

当 $x\in(0,1]$ 时，$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}n^2x(2-nx)e^{-nx}$

$$=\lim_{y\to+\infty}\frac{y^2(2-y)e^{-y}}{x}=\lim_{y\to+\infty}\frac{2y^2-y^3}{xe^y}$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\frac{4y-3y^2}{xe^y}=\lim_{y\to+\infty}\frac{4-6y}{xe^y}$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\frac{-6}{xe^y}=0\quad(y=nx)$$

事实上，存在某个 $\varepsilon_0=e^{-1}>0$，对任意 $n\in N$，存在$n_0>n$ 和某个 $x_{n_0}=\frac{1}{n_0}\in[0,1]$，有

$$|R_{n_0}(x_{n_0})|=\left|R_{n_0}\left(\frac{1}{n_0}\right)\right|=\left|S\left(\frac{1}{n_0}\right)-S_{n_0}\left(\frac{1}{n_0}\right)\right|$$

$$=\left|0-n_0^2\frac{1}{n_0}\left(2-n_0\frac{1}{n_0}\right)e^{-n_0\frac{1}{n_0}}\right|$$

$$=n_0e^{-1}>e^{-1}=\varepsilon_0$$

根据一致收敛的否定叙述，给定的函数级数在闭区间〔0，1〕上非一致收敛。

例 6 证明，函数列 $f_n(x)=n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}\right)$ 在区间$(0,+\infty)$ 内非一致收敛于 $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$。

证明 首先证明$f_n(x)$在$(0,+\infty)$内收敛于$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

对任意 $x\in(0,+\infty)$，有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

其次证明 $f_n(x)$在区间$(0,+\infty)$内非一致收敛。

对 $\varepsilon_0=\frac{1}{6}$，对任意的 $n\in N$，存在 $n_0>n$ 和 $x_{n_0}=\frac{1}{n_0}\in(0,+\infty)$，有

$$|f(x_{n_0})-f_{n_0}(x_{n_0})|=\left|n_0\left(\sqrt{x_{n_0}+\frac{1}{n_0}}-\sqrt{x_{n_0}}\right)-\frac{1}{2\sqrt{x_{n_0}}}\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n_0}+\frac{1}{n_0}}+\sqrt{\frac{1}{n_0}}}-\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{n_0}}}\right|$$

$$=\sqrt{n_0}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)>\sqrt{n_0}\cdot\frac{1}{6}>\frac{1}{6}=\varepsilon_0>0$$

根据函数的一致收敛的否定叙述知，函数列 $\{f_n(x)\}=\left\{n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}\right)\right\}$在$(0,+\infty)$内非一致收敛于$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

下面我们利用柯西一致收敛准则，判别函数级数与函数列的一致收敛性．为了使证明过程更简单些，避免繁琐的解不等式，找 n_0 的过程，我们给出柯西一致收敛准则的等价叙述。

函数级数的柯西一致收敛准则是，函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 (a,b)内一致收敛的充要条件是：对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $n_0\in N$，当 $n>n_0$时，对任意$x\in(a,b)$和任意 $P\in N$，有

$$|S_{n+P}(x)-S_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{n+P}u_k(x)\right|<\varepsilon$$

该充要条件的实质是说，

$$[S_{n+P}(x)-S_n(x)]=\sum_{k=n+1}^{n+P}u_k(x)$$

关于 $x(a<x<b)$和 $P(\in N)$一致收敛于0 .

于是，柯西一致收敛准则的等价叙述是，函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间 (a,b) 内一致收敛的充要条件是：$[S_{n+P}(x)-S_n(x)]=\sum\limits_{k=n+1}^{n+P}u_k(x)$关于 $x\in(a,b)$和 $P\in N$一致收敛于0 .

函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间(a,b)内一致收敛的充要条件是：$[f_{n+P}(x)-f_n(x)]$关于 $x\in(a,b)$ 和 $P\in N$ 一致收敛于0 .

例 7 利用柯西一致收敛准则，证明函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}n^2x^2}{n^2}$在区间$(-\infty,+\infty)$上一致收敛。

基本思路 利用$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$ $(n=2,3\cdots)$.

解不等式$\left|\sum_{k=n+1}^{n+P}\frac{\operatorname{arctg}k^2x^2}{k^2}\right|<\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+P}\right)<\frac{\pi}{2n}<\varepsilon$.

证明 对任意给定的 $\varepsilon>0$，任意 $x\in(-\infty,+\infty)$和任意 $P\in N$，解不等式

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+P}\frac{\operatorname{arctg}k^2x^2}{k^2}\right|\leqslant\left(\left|\frac{\operatorname{arctg}(n+1)^2x^2}{(n+1)^2}\right|\right.$$
$$\left.+\left|\frac{\operatorname{arctg}(n+2)^2x^2}{(n+2)^2}\right|+\cdots+\left|\frac{\operatorname{arctg}(n+P)^2x^2}{(n+P)^2}\right|\right)$$

$$\leqslant\left[\frac{\frac{\pi}{2}}{(n+1)^2}+\frac{\frac{\pi}{2}}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{\frac{\pi}{2}}{(n+P)^2}\right]$$

$$\leqslant\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+P-1)(n+P)}\right]$$

$$\leqslant\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+-\cdots+\frac{1}{n+P-1}-\frac{1}{n+P}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+P}\right)<\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n}<\varepsilon$$

得 $n>\frac{\pi}{2\varepsilon}$，取 $n_0=\left[\frac{\pi}{2\varepsilon}\right]$。于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $n_0\in N$，当 $n>n_0$ 时，对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$和任意 $P\in N$，有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+P}\frac{\operatorname{arctg}k^2x^2}{k^2}\right|<\varepsilon$$

根据柯西一致收敛准则知，函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}n^2x^2}{n^2}$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上一致收敛。

也可以利用柯西一致收敛准则的等价叙述证明如下：

证明 对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，任意的 n，$P\in N$，有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+P}\frac{\operatorname{arctg}k^2x^2}{k^2}\right|\leqslant\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+P}\right)$$

$$<\frac{\pi}{2n}\to0\quad(n\to\infty)$$

根据柯西一致收敛准则的等价叙述知，函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}n^2x^2}{k^2}$ 在区间 $(-\infty,\ +\infty)$ 上一致收敛。

例 8 利用柯西一致收敛准则，判别函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[nx10^{-nx}-(n-1)x10^{-(n-1)x}]$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的一致收敛性。

基本思路 利用柯西一致收敛准则的否定叙述。

解 对 $\varepsilon_0=\frac{1}{20}>0$；对任意的 $n\in N$，存在某个 $n_0>n$ 与 $P_0=n_0\in N$ 和 $x_{n_0}=\frac{1}{n_0}\in(0,+\infty)$，有

$$\left|\sum_{k=n_0+1}^{n_0+P}[kx10^{-kx}-(k-1)x10^{-(k-1)x}]\right|$$

$$=|(n+P_0)x_n\ 10^{-(n_0+P_0)x_{n_0}}-n_0x_{n_0}10^{-n_0x_{n_0}}|$$

$$=\left|(n_0+n_0)\frac{1}{n_0}10^{-2n_0\frac{1}{n_0}}-n_0\frac{1}{n_0}\cdot10^{-n_0\frac{1}{n_0}}\right|$$

$$=|2\cdot10^{-2}-10^{-1}|=\frac{1}{10}-\frac{2}{100}=\frac{8}{100}>\frac{1}{20}=\varepsilon_0$$

根据柯西一致收敛准则的否定叙述知，函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[nx10^{-nx}-(n-1)x10^{-(n-1)x}]$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内非一致收敛。

用柯西一致收敛准则，从理论上讲，能判别一切函数级数的一致收敛性。但实际上，有时应用起来是很麻烦的。特别是

判别非一致收敛性，则需要一定的技巧和经验，否则 x_{n_0}、n_0 和ε_0 是很难选定的。下面通过例 9 给出一个判别函数级数或函数列的一致收敛性比较适用的方法。

例 9 证明，函数级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间(a,b)内一致收敛（于 $S(x)$）的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sup_{a<x<b}|S(x)-S_n(x)|\right\}=\lim_{n\to\infty}\sup_{a<x<b}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)\right|$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sup_{a<x<b}|R_n(x)|=0 \tag{8}$$

证明 **必要性** 设函数级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 (a,b) 内一致收敛于 $S(x)$，根据一致收敛定义，有对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $n_0\in N$，当 $n>n_0$ 时，对任意 $x\in(a,b)$，有

$$|S(x)-S_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)\right|=|R_n(x)|<\varepsilon$$

于是，当 $n>n_0$ 时，有

$$\sup_{a<x<b}|S(x)-S_n(x)|=\sup_{a<x<b}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)\right|$$
$$=\sup_{a<x<b}|R_n(x)|\leqslant\varepsilon$$

从而，根据数列极限定义知，（8）式成立。

充分性 设 $\lim_{n\to\infty}\left\{\sup_{a<x<b}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)\right|\right\}=\lim_{n\to\infty}\sup_{a<x<b}|R_n(x)|=0$。根据数列极限的定义，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $n_0\in N$，当 $n>n_0$ 时，有

$$\sup_{a<x<b}|S(x)-S_n(x)|=\sup_{a<x<b}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)\right|$$
$$=\sup_{a<x<b}|R_n(x)|<\varepsilon$$

再根据上确界定义，当 $n>n_0$ 时．对任意 $x\in(a,b)$，有

$$|S(x)-S_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)\right|$$

$$=|R_n(x)|\leqslant\sup_{a<x<b}|R_n(x)|<\varepsilon$$

根据一致收敛定义知，函数级数在区间 (a,b)内一致收敛（于 $S(x)$）.

对于函数列 $\{f_n(x)\}$ 我们有类似的结论。

函数列 $\{f_n(x)\}$在区间 (a,b)内一致收敛于 $f(x)$ 的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\{\sup_{a<x<b}|f(x)-f_n(x)|\}=0$$

例10　证明函数列$\left\{\frac{1}{x^2+n}\right\}$在区间$(-\infty,+\infty)$上一致收敛。

证明　设 $f_n(x)=\frac{1}{x^2+n}$。显然，对任意固定的$x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^2+n}=0$$

于是，

$$|f(x)-f_n(x)|=\left|0-\frac{1}{x^2+n}\right|=\frac{1}{x^2+n}$$

$$\sup_{-\infty<x<+\infty}|f(x)-f_n(x)|=\sup_{-\infty<x<+\infty}\frac{1}{x^2+n}=\frac{1}{n}$$

从而，

$$\lim_{n\to\infty}\{\sup_{-\infty<x<+\infty}|f(x)-f_n(x)|\}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

根据例9知，$\{f_n(x)\}=\left\{\frac{1}{x^2+n}\right\}$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上一致收敛于 $f(x)$.

例11 利用例9判别函数级数

$$x+(x^2-x)+\cdots+(x^n-x^{n-1})+\cdots$$

在区间（0，1）内的一致收敛性。

解 因为

$$S_n(x)=x+(x^2-x)+\cdots+(x^n-x^{n-1})=x^n$$

所以，对任意 $x\in(0,1)$，有

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}x^n=0$$

从而，

$$|S(x)-S_n(x)|=|0-x^n|=x^n$$

$$\sup_{0<x<1}|S(x)-S_n(x)|=\sup_{0<x<1}x^n=1$$

于是有

$$\lim_{n\to\infty}\{\sup_{0<x<1}|S(x)-S_n(x)|=1\neq 0$$

根据例9知，给定的函数级数在区间（0，1）内非一致收敛。

例12 证明，部分和为 $S_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ $(n=1,2,\cdots)$的函数级数在闭区间［0，1］上非一致收敛。

基本思路 利用例9．函数级数在［0，1］上的和函数 $S(x)\equiv 0$，$\sup\limits_{0<x<1}|S(x)-S_n(x)|=\max\limits_{0<x<1}\left|0-\dfrac{nx}{1+n^2x^2}\right|$

$=\max\limits_{0<x<1}\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$，为此令 $Z_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$，求 $Z_n(x)$的稳定点，比较稳定点及端点函数值，即可求出 $Z_n(x)$ 的最大值。

证明 由于对任意 $x\in[0,1]$，有

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n^2x^2}=0$$

于是，

$$|S(x)-S_n(x)|=\left|0-\frac{nx}{1+n^2x^2}\right|=\frac{nx}{1+n^2x^2}$$

令 $[Z_n(x)]' = \left[\frac{nx}{1+n^2x^2}\right]' = \frac{n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2} = 0$,

解得稳定点$x_n = \frac{1}{n}$ (稳定点$-\frac{1}{n}$不在所讨论闭区间[0,1]上)。

比较 $Z_n(x)$ 在 $x=0$, 1, $\frac{1}{n}$三点之值知，$Z_n(x)$ 在闭区间[0, 1] 上的最大值为

$$Z_n\left(\frac{1}{n}\right) = \left|S\left(\frac{1}{n}\right) - S_n\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{n\cdot\frac{1}{n}}{1+n^2\cdot\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

即 $$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |S(x) - S_n(x)| = Z\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\{\sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |S(x) - S_n(x)|\} = \frac{1}{2} \neq 0$$

根据例9，给定函数级数在闭区间 [0, 1] 上非一致收敛于 $S(x)\equiv 0$.

例13 利用M—判别法，判别函数级数$\sum_{n=1}^{\infty} x^2e^{-nx}$ 在区间[0, +∞)上的一致收敛性。

基本思路 对任意 $x\in[0,+\infty)$, $|u_n(x)| = |x^2e^{-nx}| \leqslant \max_{0\leqslant x<+\infty} x^2e^{-nx} = a_n$ $(n=1,2,\cdots)$, 利用微分法求最大值 a_n.

解 对任意 $n\in N$, 求 $|u_n(x)| = |x^2e^{-nx}| = x^2e^{-nx}$在[0, +∞)上的最大值，令

$$(x^2e^{-nx})' = 2xe^{-nx} - nx^2e^{-nx} = xe^{-nx}(2-nx) = 0$$

解得 x^2e^{-nx} 的稳定点为 $x=0$, $x=\frac{2}{n}$, 比较稳定点及端点的函数值知，x^2e^{-nx} 在 $x=\frac{2}{n}$ 点取最大值，即对任意 $x\in[0, +\infty)$有

$$|u_n(x)| = x^2 e^{-nx} \leqslant \left(\frac{2}{n}\right)^2 e^{-n \cdot \frac{2}{n}} = \frac{4}{n^2 e^2} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2 e^2}$收敛。于是，根据$M$—判别法知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$在$[0, +\infty)$上一致收敛。

例14 证明，如果各项皆为单调的函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在闭区间 $[a, b]$的二端点皆绝对收敛，则此函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在闭区间 $[a, b]$上必绝对并一致收敛。

基本思路 证明对任意 $x \in [a, b]$，有

$$|u_n(x)| \leqslant |u_n(a)| + |u_n(b)| \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (|u_n(a)| + |u_n(b)|)$ 收敛（定理11.2）。于是，根据M—判别法知级数绝对并一致收敛。

证明 因为函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(a)|$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(b)|$ 皆收敛，所以，根据定理11.2知，数值级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (|u_n(a)| + |u_n(b)|)$ 收敛。

又因 $u_n(x)$单调，不论 $u_n(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上递增还是递减，对任意 $x \in [a, b]$，总有

$$-(|u_n(a)| + |u_n(b)|) \leqslant u_n(x) \leqslant (|u_n(a)| + |u_n(b)|)$$

或
$$|u_n(x)| \leqslant (|u_n(a)| + |u_n(b)|) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

根据M—判别法知，函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上绝对并一致收敛。

例15　研究函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x\cos nx}{\sqrt{n+x^2}}$在$(-\infty,+\infty)$上的一致收敛性。

解　用狄利克莱判别法．令 $a_n(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$， $b_n(x)=\sin x\cos nx$ $(n=1,2,\cdots)$．显然满足条件：

（1）为每个固定的 $x\in(-\infty,+\infty)$，数列 $a_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n+x^2}}$递减，且一致收敛于0．这是因为，对任意$x\in(-\infty,+\infty)$有

$$0<a_n(x)<\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0\quad(n\to\infty)$$

（2）对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$|B_n(x)|=\left|\sum_{k=1}^{n}b_k(x)\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}\sin x\cos kx\right|$$

$$=\left|\sin x\frac{\cos\frac{n+1}{2}x\cdot\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right|$$

$$=\left|2\cdot\cos\frac{x}{2}\cos\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x\right|\leqslant 2$$

$$(n=1,2,\cdots)$$

根据狄利克莱判别法知，函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x\cos nx}{\sqrt{n+x^2}}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛。

例16　证明，如果函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$在闭区间$[a,b]$上一致收敛，则函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在闭区间$[a,b]$上也一致收

敛。反之不真，举例说明。

基本思路　利用柯西一致收敛准则。反之不真，如函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$在闭区间〔0,1〕一致收敛（用例9给出的充要条件去证），而绝对值级数的非一致收敛性，根据定理12.5并用反证法即可证明。

证明　由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$在闭区间〔$a,b$〕上一致收敛，根据柯西一致收敛准则，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在$n_0\in N$，当 $n>n_0$ 时，对任意 $x\in$〔a,b〕和任意 $P\in N$，有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+P}|u_n(x)|\right|=(|u_{n+1}(x)|+\cdots+|u_{n+P}(x)|)<\varepsilon \tag{12}$$

显然，有 $\left|\sum_{k=n+1}^{n+P}u_k(x)\right|\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+P}|u_k(x)|<\varepsilon$

即对任意给定的 $\varepsilon>0$（同上述的 $\varepsilon>0$一般大），存在 $n_0\in \mathbf{N}$（上述的n_0），当 $n>n_0$ 时，对任意 $x\in$〔a,b〕和任意 $P\in \mathbf{N}$，有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+P}u_k(x)\right|<\varepsilon$$

根据柯西一致收敛准则知，函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在闭区间〔$a,b$〕上一致收敛。

反之不真。例如，函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ 在闭区间〔0,1〕上一致收敛，但是绝对值级数$\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n$ 却非一致收敛。

事实上，对任意$x\in[0,1]$，

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k(1-x)x^k=(1-x)\sum_{k=1}^{n}(-x)^k$$

$$=(1-x)\frac{-x-(-x)^{n+1}}{1+x}$$

于是，

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}(1-x)\frac{-x-(-x)^{n+1}}{1+x}$$

$$=\frac{x(x-1)}{1+x}$$

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|S(x)-S_n(x)|$$

$$=\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\left|\frac{x(x-1)}{1+x}-\frac{(1-x)[-x-(-x)^{n+1}]}{1+x}\right|$$

$$=\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\frac{(1-x)x^{n+1}}{1+x}\leqslant\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}(1-x)x^{n+1}$$

$$=\left(1-\frac{n+1}{n+2}\right)\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} ① \leqslant\frac{1}{n+2}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$<\frac{e}{n+2}\to 0\quad(n\to\infty)$$

从而，有

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|S(x)-S_n(x)|=0$$

根据例 9 知，函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$在闭区间 $[0,1]$ 上

---

① 由$[(1-x)x^{n+1}]'=[x^{n+1}-x^{n+2}]'=(n+1)x^n-(n+2)x^{n+1}=x^n[(n+1)-(n+2)x]=0$，解得稳定点 $x=0$ 或 $x=\frac{n+1}{n+2}$，比较 $(1-x)x^{n+1}$ 在稳定点和端点的函数值知，$(1-x)x^{n+1}$ 在 $x=\frac{n+1}{n+2}$ 取最大值，即

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}(1-x)x^{n+1}=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}(1-x)x^{n+1}=\left(1-\frac{n+1}{n+2}\right)\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}$$

$$(n=1,2,\cdots).$$

一致收敛。

但各项绝对值级数$\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^n(1-x)x^n|=(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}x^n$的和函数

$$S(x)=(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\begin{cases}(1-x)\dfrac{x}{1-x}=x, & \text{当} x\in[0,1)\text{时}\\ 0, & \text{当 } x=1 \text{ 时}\end{cases}$$

因为和函数 $S(x)$在 $x=1$处不连续，所以，函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^n(1-x)x^n|$非一致收敛。用反证法。假设函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^n(1-x)x^n|$一致收敛，根据定理12.5知，和函数 $S(x)$必连续，这与 $S(x)=\begin{cases}x, & \text{当 } x\in[0,1)\text{时，}\\ 0, & \text{当 } x=1 \text{ 时，}\end{cases}$ 在 $x=1$ 处不连续矛盾。

例17 证明，如果 $u_1(x)=D(x)$，$u_n(x)=\dfrac{D(x)}{n}-\dfrac{D(x)}{n-1}$ $(n=2,3,\cdots)$ 其中$D(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时，}\\ 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时，}\end{cases}$ 则各项为非连续函数的函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$，其和函数仍连续。

证明 对任意$x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_n(x)=D(x)+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{D(x)}{k}-\frac{D(x)}{k-1}\right)$$
$$=\frac{D(x)}{n}$$

于是，

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{D(x)}{n}=0$$

显然，和函数 $S(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$上连续。

此例说明，关于和函数连续的定理 12.5，在函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在闭区间 $[a,b]$上一致收敛的前提下，每一项 $u_n(x)$皆连续是和函数连续的充分条件，而不是必要条件。

例18 证明黎曼函数$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$在区间$(1,+\infty)$上连续，且有连续的各阶导数。

基本思路 先证明 $\zeta(x)$ 在区间$(1,+\infty)$内连续。因为级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在区间$(1,+\infty)$内非一致收敛，所以定理12.5不能直接应用。于是转向证明 $\zeta(x)$ 在任意一点$x_0\in(1,+\infty)$连续。任取一点 $\alpha>1$，使 $1<\alpha<x_0$，往证 $\zeta(x)$在区间 $[\alpha,+\infty)$上连续（应用定理12.5）。其次证明 $\zeta(x)$ 在区间$(1,+\infty)$存在各阶连续导数，应用定理12.7，其方法与证明连续性类似。

证明 先证明 $\zeta(x)$ 在区间$(1,+\infty)$内连续。

因为对任意固定的$x\in(1,+\infty)$，数值级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 收敛，所以，函数 $\zeta(x)$在区间$(1,+\infty)$内有定义。

设 x_0 是区间$(1,+\infty)$内任意给定的一点，存在数 α，使 $1<\alpha<x_0<+\infty$。用 M—判别法，不难证明函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在区间 $[\alpha,+\infty)$ 上一致收敛，再由 $u_n(x)=\frac{1}{n^x}$ 在区间 $[\alpha,+\infty)$ 上的连续性，根据定理12.5，函数 $\zeta(x)$ 在区间 $[\alpha,+\infty)$ 上连续，从而在点 x_0 连续。因为 $x_0\in(1,+\infty)$ 的任意性，所以，$\zeta(x)$在区间$(1,+\infty)$上连续。

其次证明 $\zeta(x)$在区间$(1,+\infty)$ 内存在各阶连续导数。

设 x_0 是区间$(1,+\infty)$内任意给定一点，存在 $\delta>1$，使 $1<\delta<x_0<+\infty$，不难验证下面事实成立：

（1） $(n^{-x})'=-\dfrac{\ln n}{n^x}$在区间$(1,+\infty)$内连续，当然在区间 $(\delta,+\infty)$上也连续。

（2） 函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^{-x})'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{-\ln n}{n^x}\right)$在区间$[\delta,+\infty)$上一致收敛。

事实上，对任意 $x\in[\delta,+\infty)$ 有

$$\left|\frac{-\ln n}{n^x}\right|\leqslant\frac{\ln n}{n^\delta}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

而数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^\delta}$ 收敛①，于是，根据M—判别法知，函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{-\ln n}{n^x}$在区间 $[\delta,+\infty)$上一致收敛。

根据定理12.7知，$\zeta(x)$ 在区间 $(\delta,+\infty)$上可导，且

$$\zeta'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\ln n}{n^x}$$

从而在点 x_0可导。因为 $x_0\in(1,+\infty)$的任意性，所以$\zeta(x)$在区间$(1,+\infty)$内可导。

---

① 设 $1<\gamma<\delta$，因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\ln n}{n^\delta}}{\dfrac{1}{n^\gamma}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\delta-\gamma}}=0<+\infty$$

而P级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\gamma}$收敛（$P=\gamma>1$），所以，根据比较判别法的推论知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^\delta}$收敛。

同理可证，在区间$(1, +\infty)$内存在 $\zeta''(x)$，$\zeta'''(x)$，…. 这样就证明了 $\zeta(x)$ 在区间$(1, +\infty)$内有连续的各阶导数. 这是因为 $\zeta''(x)$存在，就保证了 $\zeta'(x)$连续（可导必连续）；同样 $\zeta'''(x)$ 在区间$(1, +\infty)$内的存在性，就保证了 $\zeta''(x)$ 在区间$(1, +\infty)$内的连续性. 以此类推.

习　题

§12.1

1　求下列函数级数的收敛域：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$，　　（2）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$，

（3）$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x}{2^n}$，　　（4）$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg}\frac{x}{2^n}$，

（5）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{e^{nx}}$，　　（6）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{e^{nx}}$，

2　求下列函数级数的绝对、条件收敛域：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx^n}$，　　（2）$\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n$，

（3）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$，　　（4）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}$，

（5）$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a(x+n)}{n}\right]^n$，　　（6）$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$.

§12.2

3　用一致收敛或一致收敛的否定叙述，判别下列函数级数在指定区间上的一致收敛或非一致收敛性：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1][nx+1]}$，（a）$a<x<+\infty$　$(a>0)$，

（b）$0<x<+\infty$，

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^3}$, $-\infty<x<+\infty$,

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\arcsin \dfrac{x}{n}}{2^n}$, $-1\leqslant x\leqslant 1$,

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{-n^2x^2}}{n^2}$, $-\infty<x<+\infty$,

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n+e^x}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1+e^x}}\right)$, $-\infty<x<+\infty$,

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n^3xe^{-n^3x}-(n-1)^3xe^{-(n-1)^3x})$, $0\leqslant x<+\infty$,

(7) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, $-1<x<1$.

§12.3

4 利用柯西一致收敛准则，证明函数级数 (1)、(2) 与 (3) 在指定区间上是一致收敛的，而 (4) 是非一致收敛的。

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(x+n)(x+n+1)}$, $0<x<+\infty$,

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} nx}{n(n+1)}$, $-\infty<x<+\infty$,

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{10^n}{n!}$, $-10\leqslant x\leqslant 10$,

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$, $0<x<+\infty$.

5 应用例题选讲中的例 9 所给出的一致收敛的充要条件，判别下面二函数级数在给定区间上的一致收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{\sin(n+1)x}{n+1}-\dfrac{\sin nx}{n}\right)$, $-\infty<x<+\infty$,

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{n+x^2}}\right)$，　$0<x<+\infty$。

6　应用外尔斯特拉斯判别法，证明下列函数级数在给定区间上是一致收敛的：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+x^3}}$，　$0\leqslant x<+\infty$，

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+3^n}$，　$-3<x<+\infty$，

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3x}}{1+n^7x}$，　$0\leqslant x<+\infty$，

（4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})$，　$\frac{1}{2}\leqslant|x|\leqslant 2$，

（5）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}$，　$|x|\leqslant a$，a 为任意正数，

（6）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{\sqrt{(2n+1)^4+x^4}}$，　$|x|<+\infty$，

（7）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{2x}{n^3+x^2}$，　$|x|<+\infty$，

（8）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^3e^{-n^2x^2}$，　$0\leqslant x<+\infty$，

（9）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)$，　$|x|\leqslant e$。

7　证明，函数级数

$$\frac{1}{1+[\varphi(x)]^2}+\frac{1}{4+[\varphi(x)]^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+[\varphi(x)]^2}+\cdots$$

在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛，其中 $\varphi(x)$为定义在$(-\infty,+\infty)$ 上的任意函数.

8　研究下列函数级数在给定区间上的一致收敛性，

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$, (a) $\delta \leqslant x \leqslant 2\pi - \delta$ $(0 < \delta < \pi)$,

(b) $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

(2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{x+n}}$, $0 \leqslant x < +\infty$,

(3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(1+x)+\cos nx}$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$,

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[4]{n^3+3^x}}$, $|x| \leqslant 3$,

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}$, $|x| < +\infty$,

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+x}$, $0 \leqslant x < +\infty$.

9 证明，函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 (a, b) 内一致收敛于 $S(x)$ 的充要条件是，对任意数列 $\{x_n\}$ $(x_n \in (a, b))$ 都有

$$|R_n(x)| = |S(x_n) - S_n(x_n)| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

10 证明，如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则狄利克莱级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 当 $x \geqslant 0$ 时一致收敛。

11 证明，如果对任意 $x \in (a, b)$，有

$$|u_n(x)| \leqslant v_n(x) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

且函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ 在区间 (a, b) 内一致收敛，则函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a, b) 内也一致收敛。

§12.4

12 证明，函数级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{n} - \operatorname{arctg}\frac{x}{n-1}\right)$ 虽在 $(-\infty, +\infty)$ 上

非一致收敛，但其和函数$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{n}-\operatorname{arctg}\frac{x}{n-1}\right)$却在$(-\infty,+\infty)$上连续。此题说明了什么？

13 证明，函数$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续，且有连续的导函数。

14 利用函数级数的逐项可微性求函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$的和函数$S(x)$。

§12.5

15 用一致收敛或一致收敛的否定叙述，判别下列函数列在指定区间上的一致收敛性或非一致收敛性：

（1）$f_n(x)=\frac{1}{x+n}$，$0<x<+\infty$，

（2）$f_n(x)=\frac{nx}{1+n+x}$，$0\leqslant x\leqslant 1$，

（3）$f_n(x)=\sin\sqrt{\frac{x}{n}}$，$0\leqslant x<+\infty$，

（4）$f_n(x)=\frac{\sqrt{nx}}{1+nx}$，$0\leqslant x\leqslant 1$。

16 利用柯西一致收敛准则或柯西一致收敛准则的否定叙述，判别下面二函数列在指定的区间上的一致收敛性或非一致收敛性：

（1）$f_n(x)=\frac{2nx}{1+n^2x^2}$，（a）$0\leqslant x\leqslant 1$，（b）$1<x<+\infty$，

（2）$f_n(x)=e^{n(x-1)}$，$0<x<1$。

17 应用例题选讲的例9 所给出的一致收敛的充要条件，判别下面二函数列在指定区间上的一致收敛性：

（1）$f_n(x)=\frac{\operatorname{arctg} nx}{n}$，$0<x<+\infty$，

（2）$f_n(x)=x^n-x^{2n}$，$0\leqslant x\leqslant 1$。

18 证明，如果$f_0(x)$在闭区间$[0,a]$上可积（a为任意正实数）$f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)dt$，则函数列$\{f_n(x)\}$在闭区间$[0,a]$上一致收敛于

0。

19 如果函数 $f(x)$ 在闭区间[0,1]上连续，且 $f(1)=0$，则函数列 $g_n(x)=x^n f(x)(n=1,2,\cdots)$ 在闭区间[0,1]上一致收敛。

20 证明，函数列 $f_n(x)=nx(1-x)^n\ (n=1,2,\cdots)$ 在闭区间[0,1]上非一致收敛于 $f(x)\equiv 0$，但却可在积分号下取极限，即有等式

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

成立。

21 对于极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4}dx$ 可否在积分号下取极限？

第十三章　幂级数

本章将在上一章函数级数的一般理论基础上，讨论一类特殊的函数级数，即所谓幂级数。

在这一章中，一方面，要讨论幂级数的收敛域、一致收敛性以及幂级数的和函数的分析性质；另一方面，要讨论如何把给定的函数表示成幂级数，这样就可以通过幂级数的部分和（多项式）来研究给定的函数的分析性质，或者近似地计算它的函数值。

§13.1　幂级数的收敛域

一　幂级数的概念

定义　各项皆为幂函数$a_n(x-x_0)^n$（$n=0,1,2,\cdots$）的函数级数，即

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n, \tag{13.1}$$

其中a_0，a_1，a_2，$\cdots$，a_n，$\cdots$ 皆为常数，称为**幂级数**。

常数a_0，a_1，a_2，$\cdots$，a_n，$\cdots$，称为**幂级数（13.1）的系数**。

特别地，当 $x_0=0$ 的情形，即幂级数

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \tag{13.2}$$

更为重要。因为将幂级数（13.2）中的x用 $x-x_0$ 代替，就得到幂级数（13.1），所以，本章主要讨论幂级数（13.1）。

二 幂级数的收敛域

我们已知函数级数的收敛域一般是很复杂的。但对幂级数来说，其收敛域却很简单。先看下面三个例子：

例 1 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$ 在$x=0$ 点收敛，其他任何$x\neq 0$点皆发散，即收敛域是仅有一点$x=0$所组成的数集$X=\{0\}$。

事实上，当 $x=0$时，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$显然收敛。

当 $x\neq 0$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\, x^{n+1}}{n!\, x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}(n+1)|x|=+\infty$$

根据达兰贝尔判别法，并注意十一章几点说明 4 知，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$发散。

例 2 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$ 在任意一点 $x\in(-\infty,\ +\infty)$ 皆收敛，即收敛域是整个数轴 $X=(-\infty,+\infty)$。

事实上，对任意 $x\in(-\infty,\ +\infty)$，有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{x}{n}\right)^n\right|}=\lim_{n=\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{x}{n}\right|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n}=0<1$$

根据柯西判别法知，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^n$ 绝对收敛，当然收敛，即幂级数的收敛域是整个数轴 $X=(-\infty,\ +\infty)$。

例 3 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$ 在任意一点 $x\in(-2,2)$ 收敛，并满

足不等式$|x|\geqslant 2$的点x发散，即收敛域为 $X=(-2,\ 2)$。

事实上，对任意 $x\in(-2,\ 2)$，有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{x}{2}\right|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{2}=\frac{|x|}{2}<1$$

根据柯西判别法知，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$绝对收敛。当然收敛。

当$|x|>2$时，有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{2}\right|^n=+\infty$$

此时级数因不满足收敛的必要条件而发散。

当$|x|=2$时，此时幂级数变为$\sum_{n=1}^{\infty}(\pm 1)^n$。显然此二数值级数，也因一般项不趋向零而发散。

通过这三个例子说明：

1° 点 $x=0$ 总是幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛点。

2° 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛域可能是整个数轴$X=(-\infty,\ +\infty)$，如例2。也可能是以原点为心的一个有穷区间，如例3的收敛域是 $X=(-2,\ 2)$。

关于幂级数的收敛域，我们有如下的三个定理：

定理13.1 如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在点 $x=b$ 收敛，则幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$对满足不等式

$$|x|<b$$

的所有点x皆绝对收敛。

证明 因为，数级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nb^n$收敛，所以，有

$$a_nb^n\to 0\ (n\to\infty)$$

于是，根据数列极限的有界性，存在$M>0$，使得

$$|a_nb^n|\leqslant M\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

从而，对满足不等式$|x|<|b|$的所有x，有

$$|a_nx^n|=|a_nb^n|\cdot\left|\frac{x^n}{b^n}\right|\leqslant M\left|\frac{x}{b}\right|^n\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

因为$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x}{b}\right|^n$是几何级数，且公比$\left|\frac{x}{a}\right|<1$，所以收敛．根据比较判别法（定理11.7）知，级数$\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$收敛，即幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$绝对收敛。 □

推论 如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在点$\beta$发散，则幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在满足不等式

$$|x|>|\beta|$$

的所有点x皆发散．

证明 用反证法．假设存在某点x_0，它满足不等式$|x_0|>|\beta|$，使得幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在点$x_0$收敛。根据定理13.1，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在点$\beta$绝对收敛，这与题设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在点$\beta$发散矛盾。 □

定理13.1及推论指出：如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在点$a$收敛，则

在开区间$(-|\alpha|,|\alpha|)$内每一点皆收敛，如果幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在点$\beta$发散，则在区间$(|\beta|,+\infty)$和$(-\infty,-|\beta|)$内每一点皆发散。

定理13.2 对任意幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$总存在数$r(0\leqslant r\leqslant+\infty)$，

1° 当$|x|<r(0<r\leqslant+\infty)$时，幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$绝对收敛；

2° 当$|x|>r(0\leqslant r<+\infty)$时，幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$发散。

证明 分三种情形来讨论。

(i) 如果幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在任何点$x\in(-\infty,+\infty)$皆收敛（如例2），令$r=+\infty$，当$|x|<+\infty$时，幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$绝对收敛。此时自然取$r=+\infty$。

(ii) 如果幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$仅在一点$x=0$收敛（如例1），令$r=0$，即对任意$x$，当$|x|>0$时，幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$发散。

(iii) 如果幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在点$x=\alpha$收敛，且同时在点$x=\beta(\beta\neq\alpha)$发散。

此时幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛点集合是有界的。

事实上，根据定理13.1推论知，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$对满足不等式$|x|>|\beta|$的所有点$x$皆发散。从而，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的所有收敛点$x$的集合皆满足不等式$|x|\leqslant|\beta|$，即收敛点集合是有界的。于是，收敛点集合有上界$|\beta|$，因而它必有唯一的上确界，记作 r。

1° 当$|x|<r$时，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$绝对收敛。

事实上，对任意满足不等式

$$|x|<r$$

的x，根据上确界定义，对 $\varepsilon=r-|x|>0$，存在幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛点$x_0$，有

$$|x|=r-\varepsilon<|x_0|\leqslant r$$

根据定理13.1知，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在点$x$绝对收敛。

2° 当$|x|>r$ 时，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$发散是显然的。 □

定义 定理13.2中的数 r 称为幂级数的**收敛半径**，而区间$(-r, r)$称为幂级数的**收敛区间**。

定理13.2指出：对任意幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在收敛区间$(-r, r)$内绝对收敛；当$r=0$时，收敛区间$(-r,r)$退缩为一点$x=0$(如例1)；当 $r=+\infty$时，收敛区间是整个数轴$(-\infty, +\infty)$。

总之，任意的幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛域总是以原点为心，以$r$ (0

$\leqslant r \leqslant +\infty$）为半径的区间①.

那么如何求幂级数的收敛半径r呢？有如下定理：

定理13.3　如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的系数有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$$

则幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径

$$r = \begin{cases} \frac{1}{l}, & \text{当} 0 < l < +\infty \\ +\infty, & \text{当} l = 0 \\ 0, & \text{当} l = \infty \end{cases}$$

证明　考虑幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$各项绝对值级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \tag{13.4}$$

由题设，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| = l|x| \tag{13.5}$$

1°　如果　$0 < l < +\infty$，根据达兰贝尔判别法，当　$l|x| < 1$，即当　$|x| < \frac{1}{l}$时，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$　收敛。从而幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$绝对收敛。而当$l|x| > 1$时，即当　$|x| > \frac{1}{l}$时，幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x^n|$发

---

①当$0 < r < +\infty$时，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在收敛区间$(-r, r)$的端点$x = r$及　$x = -r$的收敛性，需要根据给定的幂级数单独讨论。

散．从而幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$也发散(见十一章学习指导几点说明4)。由此可见 $r=\frac{1}{l}$。

2° 如果 $l=0$，因为对任意$x\in(-\infty,\ +\infty)$，皆有$l|x|=0<1$，所以，由（13.5）式，根据达兰贝尔判别法，对任意$x\in(-\infty,+\infty)$，级数$\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$收敛。从而，对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$收敛．因此 $r=+\infty$。

3° 如果 $l=+\infty$，对任意$x\neq0$，由（13.5）得

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=+\infty$$

根据达兰贝尔判别法知，当 $x\neq0$ 时，级数$\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$ 发散，从而 $r=0$。 □

例 4　求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{\sqrt{n}}x^n$的收敛域。

解　因为

$$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{\frac{3^n}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}3\sqrt{\frac{n}{n+1}}=3$$

所以，根据定理13.3，收敛半径 $r=\frac{1}{3}$，收敛区间为$\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$。

在左端点 $x=-\frac{1}{3}$，给定幂级数变为数级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，由

莱布尼茨判别法，它是收敛的。

在右端点 $x=\frac{1}{3}$，级数变为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$，发散（$P$级数，$P=\frac{1}{2}<1$）。

于是，幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{\sqrt{n}}x^n$的收敛域为$\left[-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$。

例5 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^2}x^n$的收敛域。

解 因为

$$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{\frac{5^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{5^n}{n^2}}=5$$

所以，根据定理13.3，收敛半径 $r=\frac{1}{5}$，收敛区间为 $\left(-\frac{1}{5},\ \frac{1}{5}\right)$。

在左右二端点 $x=-\frac{1}{5}$和 $x=\frac{1}{5}$，幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^2}x^n$分别变为数级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，显然它们皆收敛。

于是，幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^2}x^n$的收敛域为$\left[-\frac{1}{5},\ \frac{1}{5}\right]$。

例6 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^n$的收敛域。

解 因为

$$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}(n+1)}{(-1)^{n+1}n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$$

所以，根据定理 13.3，收敛半径 $r=1$，收敛区间为（-1，

1）．

显然在二端点$x=\pm 1$，幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^n$皆发散．于是幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^n$的收敛域为收敛区间$(-1,\ 1)$。

例 7　求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$的收敛区间。

解　因为

$$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

所以，收敛半径 $r=+\infty$，从而收敛区间为$(-\infty,\ +\infty)$。

例 8　求例 1 中的幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}n!\,x^n$的收敛半径。

解　因为

$$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right|=\lim_{n\to\infty}(n+1)=+\infty$$

所以，收敛半径$r=0$。

§13.2　和函数的分析性质

由上节的讨论看到，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛域总是一个以原点为心，以 r（收敛半径）为半径的区间．要讨论幂级数在收敛区间内所定义的和函数的分析性质，自然想到幂级数在收敛区间上是否一致收敛？一般说来，幂级数在收敛域上不一定一致收敛．例如，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}x^n$在开区间（-1，1）内收敛，但非

一致收敛（见十二章习题3．（7））．但是，我们有如下定理：

定理13.4 如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为$r$，对满足不等式 $0<r'<r$ 的任意r'，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在闭区间$[-r', r']$上一致收敛。

证明 由于 $0<r'<r$，根据定理13.2知，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在点$x=r'$绝对收敛，即级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r'^n$$

收敛。显然，对任意 $x\in[-r', r']$，有

$$|a_nx^n|\leqslant|a_n|r'^n\quad(n=1, 2, \cdots)$$

根据M－判别法，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在闭区间 $[-r', r']$ 上一致收敛。 □

定理13.4指出：幂级数在它的收敛区间$(-r, r)$内部的任何闭区间上皆一致收敛．这正是幂级数的优点之一。

根据这个定理，结合函数级数和函数的分析性质，可立即得到下列幂级数的和函数的分析性质。

定理13.5 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数$S(x)$在收敛区间$(-r, r)$内连续。

证明 设 x_0 是收敛区间$(-r, r)$内任意一点，即$|x_0|<r$。于是，必存在 $r'>0$ 使得$|x_0|<r'<r$。根据定理13.4知，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在闭区间 $[-r', r']$ 上一致收敛．再根据定理

12.5知①，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数$S(x)$在闭区间$[-r', r']$上连续，从而函数$S(x)$在点x_0连续。再由点 $x_0\in(-r, r)$的任意性知，和函数$S(x)$在收敛区间（$-r$，r）内连续。 □

定理13.6 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数$S(x)$在收敛区间$(-r, r)$内部的任何闭区间 $[-r', r']$ $(0<r'<r)$上可积，特别是对任意x，且 $0<|x|<r$，有等式

$$\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nt^ndt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1} \qquad (13.6)$$

证明 因为，根据定理13.4，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在闭区间$[-r', r']$上一致收敛。再根据定理12.6知，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的和函数$S(x)$在闭区间$[-r', r']$上可积，

特别是 $S(x)$ 在闭区间 $[0, x]$ $(0<x<r)$（或在闭区间$[x, 0]$ $(-r<x<0)$）上可积，且有等式

$$\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nt^ndt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

即幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$可逐项积分。 □

幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在收敛区间内部的任何闭区间上可以逐项积

---

① 本来应用定理12.5，12.6和12.7时，还要验证$u_n(x)=a_nx^n$或者它的导数na_nx^{n-1}的连续性，但对幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$来说，这是显然的，故在定理证明中省略不提。

分，称为幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在收敛区间$(-r, r)$内可逐项积分。

推论 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$的收敛半径不小于幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径。

证明 设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$的收敛半径为$R$。根据定理13.6知，对任意$x\in(-r, r)$幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$收敛$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}=\int_0^x S(t)dt\right)$，故$(-r,r)\subset(-R,R)$，即$R\geqslant r$。□

定理13.7 (i)幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的和函数$S(x)$在收敛区间$(-r, r)$内可微（即可导），且有等式

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1} \tag{13.7}$$

即幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在收敛区间内可以逐项微分。

(ii) 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$与原幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径相等。

分析 要证明幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的和函数$S(x)$在收敛区间$(-r, r)$内可微，且有等式（13.7）成立，只须证明$S(x)$在任意一点$x\in(-r, r)$内可微，且（13.7）成立即可。为此任取$r'$，使得$|x|<r'<r$，根据定理12.7，只须证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$在

闭区间$[-r', r']$上一致收敛即可。

证明 (i)设x是收敛区间$(-r, r)$内任意给定的一点（暂时固定），存在r'与r_1，使得 $|x|<r'<r_1<r$。

对任意 $x\in[-r', r']$，有

$$|na_nx^{n-1}|\leqslant n|a_n|r'^{n-1}=\frac{1}{r'}n\left(\frac{r'}{r_1}\right)^n\cdot|a_nr_1^n| \qquad (1)$$

因为级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r'}n\left(\frac{r'}{r_1}\right)^n$收敛①，所以，根据级数收敛的必要条件知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r'}n\left(\frac{r'}{r_1}\right)^n=0$$

再根据数列极限的有界性知，存在$M>0$，使得

$$\frac{1}{r'}n\left(\frac{r'}{r_1}\right)^n\leqslant M\quad(n=1, 2, \cdots) \qquad (2)$$

由（1）与（2）知，对任意 $x\in[-r', r']$ 有

$$|na_nx^{n-1}|\leqslant M|a_nr_1^n|\quad(n=1, 2, \cdots)$$

而级数$\sum_{n=1}^{\infty}M|a_nr_1^n|$收敛，故根据$M$—判别法知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$在闭区间$[-r', r']$上一致收敛。

最后，根据定理12.7知，$S(x)$在闭区间$[-r',r']$上可微，当然在点 $x\in(-r',r')$可微，且有

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

---

① 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{r'}(n+1)\left(\frac{r'}{r_1}\right)^{n+1}}{\frac{1}{r'}n\left(\frac{r'}{r_1}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\frac{r'}{r_1}=\frac{r'}{r_1}<1$

所以，根据达兰贝尔判别法知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r'}n\left(\frac{r'}{r_1}\right)^n$ 收敛。

又由点x的任意性知，$S(x)$在$(-r, r)$内可微，且有

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

即幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}$ 可在收敛区间 $(-r, r)$ 内逐项微分。

(ii)设级数 (13.7) 的收敛半径为R。

一方面，由(i)知，对任意 $x_0\in(-r,r)$，级数 (13.7) 收敛$\left(\sum_{n=1}^{\infty}na_nx_0^{n-1}=S'(x_0)\right)$。这说明 $(-r, r)\subset(-R, R)$，即$r\leqslant R$。另一方面，因为级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 是级数$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ 由 0 到x逐项积分的结果，所以，根据定理 13.6 的推论知，$r\geqslant R$。因此$R=r$。 □

推论 1 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$逐项积分后的收敛半径不变。

证明 设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 的收敛半径为 R，根据定理13.7，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 逐项微分的级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径$r=R$。 □

推论 2 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在收敛区间 $(-r, r)$ 内有任意阶导数，且

$$S^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)a_nx^{n-k}\quad(|x|<r,\ k=1,2,\cdots)\tag{13.8}$$

证明 因为幂级数

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1} \tag{13.7}$$

的收敛区间仍为$(-r,\ r)$。根据定理13.7，在收敛区间内，幂级数（13.7）仍可逐项微分，即

$$S''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}\quad(|x|<r)$$

将逐项微分进行 k次$(k=1,\ 2,\ \cdots)$，有

$$S^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)a_nx^{n-k}\quad(|x|<r)\quad\square$$

上面讨论的幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的和函数$S(x)$的分析性质，都是限制在收敛区间$(-r,\ r)$内。为了讨论和函数$S(x)$在收敛区间的端点 $x=r$ 或 $x=-r$ 的连续性、可微性与可积性，我们有下面两个定理。

定理13.8 如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在收敛区间$(-r,\ r)$的右端点 $x=r$ 收敛，则幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在闭区间$[0,\ r]$上一致收敛。

证明 将幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$改写为如下的形式

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^n\left(\frac{x}{r}\right)^n\quad(0\leqslant x\leqslant r)$$

用阿贝尔判别法。令 $a_n(x)=\left(\frac{x}{r}\right)^n$，$b_n(x)=a_nr^n$。

显然满足条件：

(1) $a_n(x)=\left(\frac{x}{r}\right)^n$对每个固定的 $x\in[0,\ r]$，数列递减，

且一致有界。

事实上，对任意$x\in[0, r]$，有

$$1\geqslant\frac{x}{r}\geqslant\left(\frac{x}{r}\right)^2\geqslant\cdots\geqslant\left(\frac{x}{r}\right)^n\geqslant\cdots\geqslant0$$

（2）数值级数$\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^n$收敛。

于是，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在闭区间$[0, r]$上一致收敛。 □

同理，如果幂级数在收敛区间左端点$-r$收敛，则此幂级数必在闭区间$[-r, 0]$上一致收敛。因此，幂级数在收敛域X上的任何闭区间$[a, b]$（$[a, b]\subset X$）上一致收敛。

定理13.9（阿贝尔定理） 如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在点$x=r$（或$x=-r$）收敛，则幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的和函数$S(x)$在点$x=r$左连续（或$x=-r$右连续），即

$$\lim_{x\to r-0}S(x)=S(r)\left(\text{或}\lim_{x\to-r+0}S(x)=S(-r)\right)$$

或者

$$\lim_{x\to r-0}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^n\quad\left(\text{或}\lim_{x\to-r+0}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(-r)^n\right)$$

证明 根据定理13.8，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在闭区间$[0, r]$上一致收敛，再根据定理12.5知，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的和函数$S(x)$在闭区间$[0, r]$上连续，从而，$S(x)$在点$x=r$连续（右连续），即$\lim_{x\to r-0}S(x)=S(r)$。 □

注意：如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在点 $x=r$（或 $x=-r$）收敛，应用定理13.8和定理12.6可推出，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在闭区间$[0, r]$（或$[-r, 0]$）上可逐项积分，即等式（13.6）在$x=r$（或$x=-r$）也成立。而应用定理13.8和定理12.7可推出，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在端点 $x=r$（或$x=-r$）可逐项微分，即等式（13.7）在点 $x=r$（或$x=-r$）也成立。

例1 求幂级数

$$\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{x^n}{n(n+1)}+\cdots$$

的和函数。

解 首先求收敛区间

$$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=1$$

$r=\frac{1}{l}=1$，于是收敛区间为$(-1, 1)$。

其次，在收敛区间（－1，1）内。利用定理13.7，求给定的幂级数的和函数。

设 $S(x)=\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{x^n}{n(n+1)}+\cdots, |x|<1$ （3）

（3）式两边乘以x得

$$xS(x)=\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}+\cdots \qquad (4)$$

根据定理13.7，对幂级数（4）逐项求导得，

$$[xS(x)]'=\left[\frac{x^2}{1\cdot 2}\right]'+\left[\frac{x^3}{2\cdot 3}\right]'+\cdots+\left[\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right]'+\cdots$$

$$= x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots \quad (|x|<1) \qquad (5)$$

再利用定理13.7，对幂级数（5）逐项求导得，

$$[xS(x)]''=1+x+\cdots+x^{n-1}+\cdots=\frac{1}{1-x}(|x|<1) \quad (6)$$

对（6）式从0到x进行积分得，

$$[xS(x)]'=\int_0^x\frac{dt}{1-t}=-\ln(1-x)\ (|x|<1) \qquad (7)$$

对（7）式再从0到x积分一次得

$$xS(x)=\int_0^x -\ln(1-t)dt=(1-x)\ln(1-x)+x$$

故 $$S(x)=\frac{1}{x}[(1-x)\ln(1-x)+x]$$

即 $$\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{x^n}{n(n+1)}+\cdots$$

$$=\frac{1}{x}[(1-x)\ln(1-x)+x] \quad (|x|<1)$$

容易验证，上式左边的幂级数在二端点 $x=\pm 1$ 皆收敛。于是，根据阿贝尔定理知，上式右边的和函数在二端点$x=\pm 1$皆连续。

事实上，$S(x)=\frac{1}{x}[(1-x)\ln(1-x)+x]$在点$x=1$有

$$\lim_{x\to 1-0}S(x)=\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{x}[(1-x)\ln(1-x)+x]=1$$

又当 $x=1$ 时，级数变为

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots=1=S(1)$$

故

$$\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{x^n}{n(n+1)}+\cdots=S(x)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1-x}{x}\ln(1-x)+1, & \text{当} -1\leqslant x<1 \text{ 时}\\ 1, & \text{当 } x=1 \text{ 时}\end{cases}$$

例 2 求幂级数

$$x-4x^2+9x^3-16x^4+\cdots+(-1)^{n-1}n^2x^n+\cdots$$

的和函数。

解 因为 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(-1)^n(n+1)^2}{(-1)^{n-1}n^2}\right|=1$

所以，$r=\dfrac{1}{l}=1$，从而，收敛区间为$(-1,1)$。当$x=\pm1$时，幂级数显然发散，故收敛域为 $(-1,\ 1)$。

设 $S(x)=x-4x^2+9x^3-16x^4+\cdots+(-1)^{n-1}n^2x^n+\cdots$

$$=x(1-4x+9x^2-16x^3+\cdots+(-1)^{n-1}n^2x^{n-1}+\cdots)$$

于是，

$$\frac{S(x)}{x}①=1-4x+9x^2-16x^3+\cdots+(-1)^{n-1}n^2x^{n-1}+\cdots\qquad(-1<x<1)\quad(8)$$

对幂级数（8）从 0 到 $x(|x|<1)$逐项积分得

$$\int_0^x\frac{S(t)}{t}dt=\int_0^x dt-\int_0^x 4t\,dt+\int_0^x 9t^2dt-\int_0^x 16t^3dt+\cdots+\int_0^x(-1)^{n-1}n^2t^{n-1}dt$$

$$=x-2x^2+3x^3-4x^4+\cdots+(-1)^{n-1}nx^n+\cdots$$

$$=x[1-2x+3x^2-4x^3+\cdots+(-1)^{n-1}nx^{n-1}+\cdots]\qquad(9)$$

由（9）式得

---

① $\dfrac{S(x)}{x}$表示幂级数 $1-4x+9x^2+\cdots$之函和数。当 $x=0$时，$S(0)=0$，故认为$\dfrac{S(x)}{x}$当$x=0$时有意义。

$$\frac{1}{x}\int_0^x \frac{S(t)}{t}dt = 1-2x+3x^2-4x^3+\cdots+(-1)^{n-1}nx^{n-1}$$

$$+\cdots \qquad (-1<x<1)\ (10)$$

对幂级数 (10) 从 0 到 x ($|x|<1$) 逐项积分，得

$$\int_0^x \frac{1}{y}\left[\int_0^y \frac{S(t)}{t}dt\right]dy = \int_0^x dy - \int_0^x 2y dy + \int_0^x 3y^2 dy$$

$$-\int_0^x 4y^3 dy + \cdots + \int_0^x (-1)^{n-1} n y^{n-1} dy + \cdots$$

$$= x - x^2 + x^3 - x^4 + \cdots + (-1)^{n-1}x^n + \cdots$$

$$= \frac{x}{1+x}(-1<x<1) \qquad (11)$$

对 (11) 式两边求导得

$$\frac{1}{x}\int_0^x \frac{S(t)}{t}dt = \left(\frac{x}{1+x}\right)' = \frac{1}{(1+x)^2}$$

由此得

$$\int_0^x \frac{S(t)}{t}dt = \frac{x}{(1+x)^2} \qquad (12)$$

对 (12) 式两边求导得

$$\frac{S(x)}{x} = \frac{1-x}{(1+x)^3}$$

即 $$S(x) = \frac{x(1-x)}{(1+x)^3}(-1<x<1)$$

§13.3 泰勒级数

在前两节中，我们讨论了幂级数的收敛域、一致收敛性以及幂级数所确定的和函数的分析性质。从这一节起，我们研究幂级数理论中另一方面问题，即如何把已知函数表示成某一幂级数，亦即所谓的函数幂级数展开问题。

在§5.3中我们已经看到，如果函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 的某

一邻域内，有直到$n+1$阶导数 $f'(x)$, $f''(x)$, $\cdots$, $f^{(n+1)}(x)$, 则函数 $f(x)$在点x_0具有拉格朗日型余项的泰勒公式为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^{n+1}$$

其中ξ介于x_0与x之间，

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (2)$$

称为函数 $f(x)$ 在点x_0的n次泰勒多项式。

如果函数 $f(x)$ 在点x_0存在任意阶导数，则泰勒多项式的项便可以无限写下去，即

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

于是，我们有：

定义 如果函数 $f(x)$ 在点x_0存在任意阶导数，幂级数

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots \qquad (13.9)$$

称为函数 $f(x)$ 在点x_0的泰勒级数。记作

$$f(x)\sim f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

或 $$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$①

幂级数（13.9）的系数$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(n=0, 1, 2, \cdots)$称为泰勒系数。

任何一个函数 $f(x)$，只要它在点 x_0 存在任何阶导数，那么它在点x_0的泰勒级数就一定存在。但是，函数$f(x)$在点x_0的泰勒级数未必收敛到函数 $f(x)$本身，甚至除了在点$x=x_0$外，其余任何点皆发散。如

例 1 因为，函数

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

在点$x_0=0$的任何阶导数皆为 0 （见第四章例题选讲之例11）。

$$f^{(n)}(0)=0 \quad (n=0, 1, 2, \cdots)$$

所以，函数 $f(x)$在点$x_0=0$的泰勒级数为

$$0+0x+\frac{0}{2!}x^2+\cdots+\frac{0}{n!}x^n+\cdots$$

显然它在$(-\infty, +\infty)$上收敛于和函数$S(x)\equiv 0$。但对任意一点 $x\neq 0$，$f(x)\neq 0$，故对一切 $x\neq 0$ 皆有 $f(x)\neq S(x)$。即函数 $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在点 $x_0=0$ 的泰勒级数，在任何 $x\neq 0$ 点皆不收敛于 $f(x)$。

那么在什么条件下，函数 $f(x)$ 的泰勒级数才能收敛到函数 $f(x)$ 本身呢？下面的定理回答了这个问题。

定理13.10 如果函数 $f(x)$在点x_0存在任意阶导数，则函数 $f(x)$ 在点x_0的泰勒级数，在点x_0的某邻域(x_0-r, x_0+r)内收敛到函数 $f(x)$ （即函数 $f(x)$的泰勒级数的和函数等于函数

---

① 函数$f(x)$的零阶导数$f^{(0)}(x)=f(x)$。

$f(x)$）的充要条件是：对任意 $x\in(x_0-r,\ x_0+r)$，有

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$$

其中 $R_n(x)$是函数 $f(x)$在点x_0的泰勒公式的余项。

证明　必要性　如果函数 $f(x)$ 在点x_0的泰勒级数

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

在任意固定的点 $x\in(x_0-r,\ x_0+r)$收敛于函数 $f(x)$，根据级数收敛定义，有

$$\lim_{n\to\infty}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right]=0 \qquad (3)$$

又由函数 $f(x)$在点x_0的泰勒公式，有

$$f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=R_n(x) \qquad (4)$$

将（4）式代入（3）式中得

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$$

充分性　如果对任意 $x\in(x_0-r,\ x_0+r)$，有

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0 \qquad (5)$$

由函数 $f(x)$ 在点x_0的泰勒公式有

$$R_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \qquad (6)$$

将（6）式代入（5）式中得

$$\lim_{n\to\infty}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right]=0 \qquad (7)$$

（7）式说明了函数 $f(x)$ 在点x_0的泰勒级数在任意一点 $x\in(x_0-r,\ x_0+r)$收敛于函数 $f(x)$。 □

定义　如果函数 $f(x)$ 在点x_0的泰勒级数

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots \quad (13.9)$$

在点x_0的某邻域$(x_0-r,\ x_0+r)$内收敛于函数$f(x)$，即对任意$x\in(x_0-r,\ x_0+r)$，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad (13.10)$$

则称函数$f(x)$点在x_0的某邻域$(x_0-r,\ x_0+r)$内**可以展成泰勒级数**。此时的泰勒级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$称为函数$f(x)$在点$x_0$的**泰勒展开式**。

对更一般的情形，我们有如下的定义：

定义 如果函数$f(x)$在点x_0某邻域$(x_0-r,\ x_0+r)$内有任意阶导数①，且存在幂级数

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots \quad (13.2)$$

使得在点x_0的某邻域$(x_0-r,\ x_0+r)$内，收敛于函数$f(x)$，即对任意$x\in(x_0-r,\ x_0+r)$，有

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots \quad (13.11)$$

则称函数$f(x)$在点x_0的某邻域$(x_0-r,\ x_0+r)$可以展成幂级数。并称幂级数(13.2)为函数$f(x)$在点x_0的幂级数展开式。

于是就产生一个问题：若函数$f(x)$在点x_0某邻域内可以展成幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$是否唯一呢？

---

① 根据定理13.7推论2，幂级数的和函数$f(x)$在收敛区间内有任意阶导数，故必须设函数$f(x)$在点x_0的某邻域$(x_0-r,\ x_0+r)$内有任意阶导数。

为了回答这个问题，我们对恒等式（13.11）在任意一点 $x\in(x_0-r,\ x_0+r)$，两边逐次求导得

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+\cdots+na_n(x-x_0)^{n-1}$$
$$+(n+1)a_{n+1}(x-x_0)^n+\cdots$$
$$f''(x)=2!\,a_2+3\cdot 2a_3(x-x_0)+\cdots+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$$
$$+(n+1)na_{n+1}(x-x_0)^{n-1}+\cdots$$
$$f'''(x)=3!\,a_3+\cdots+n(n-1)(n-2)a_n(x-x_0)^{n-3}$$
$$+(n+1)n(n-1)a_{n+1}(x-x_0)^{n-2}+\cdots$$

……

$$f^{(n)}(x)=n!\,a_n+(n+1)n\cdots 2a_{n+1}(x-x_0)+\cdots$$

……

令 $x=x_0$，代入到（13.11）及上述诸式中得

$f(x_0)=a_0$，$f'(x_0)=a_1$，$f''(x_0)=2!\,a_2$，$f'''(x_0)=3!\,a_3$，…，$f^{(n)}(x_0)=n!\,a_n$，…

由此解得

$$a_0=f(x_0),\quad a_1=f'(x_0),\ a_2=\frac{f''(x_0)}{2!},\quad a_3=\frac{f'''(x_0)}{3!},\ \cdots,$$

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\ \cdots$$

这就告诉我们，如果函数 $f(x)$ 在点x_0的某邻域（x_0-r，x_0+r）内部能够展成幂级数(13.11)，它必是泰勒级数(13.9)。亦即函数 $f(x)$ 的展开式必取唯一的形式

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{13.10}$$

综上所述，如果函数 $f(x)$ 在点x_0的某邻域（x_0-r，x_0+r）内存在任意阶导数，且 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$（其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)$为泰勒公式中的拉格朗日余项），则函数 $f(x)$ 在点x_0的某邻域(x_0-r，x_0+r)内可展成唯一形式的幂级数，即

函数 $f(x)$ 的泰勒级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{13.10}$$

在泰勒级数中，最常用的是 $x_0=0$ 的情形。此时泰勒级数（13.9）就变成

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots \tag{13.12}$$

称幂级数（13.12）为函数 $f(x)$ 的**马克劳林级数**。

§13.4 初等函数的幂级数展开

一 直接法展开

定理13.10已给出函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内可展成泰勒级数的充要条件。现在，我们在此定理的基础上，给出函数 $f(x)$ 在点 $x_0=0$ 的某邻域内展成泰勒级数的充分性定理。然后用此定理给出几个基本初等函数的马克劳林展开式。

定理13.11 如果存在数 $M>0$，对任意 $x\in[-r,r]$ 有

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant M \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

则函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-r,r]$（也是原点 0 的某邻域）上可展成幂级数。

证明 对任意 $x\in[-r,r]$，由题设

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|=\frac{|f^{(n+1)}(\xi)||x|^{n+1}}{(n+1)!}\leqslant\frac{Mr^{n+1}}{(n+1)!}$$

其中 ξ 介于 0 与 x 之间，从而 $\xi\in[-r,r]$。

因为级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{Mr^{n+1}}{(n+1)!}$ 收敛（用达兰贝尔判别法很容易判别），所以 $\lim\limits_{n\to\infty}M\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}=0$，从而，对任意 $x\in[-r,r]$ 有

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$$

于是，根据定理13.10知，对任意 $x\in[-r,\ r]$，有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

即函数 $f(x)$ 在闭区间$[-r,\ r]$上可展成幂级数（马克劳林级数）． □

有些基本初等函数，能直接利用定理13.10或13.11求出它的展开式，这种方法就是所谓的直接法．

例1　将函数 $f(x)=\sin x$展成马克劳林级数．

解　因为 $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)(n=1,\ 2,\ \cdots)$，所以，对任意 $x\in(-\infty,\ +\infty)$，皆有

$$|f^{(n)}(x)|=\left|\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\right|\leqslant 1\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

根据定理13.11知，函数 $f(x)=\sin x$ 可在区间$(-\infty,\ +\infty)$上展成马克劳林级数．

马克劳林级数的系数

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{1}{n!}\sin\left(0+\frac{n\pi}{2}\right)\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

将a_n之值代入到（13.12）式中得

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\quad(-\infty<x<+\infty)\quad(13.13)$$

同理，可得

$$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\quad(-\infty<x<+\infty)\qquad(13.14)$$

例 2　将函数 $f(x)=e^x$ 展成马克劳林级数。

解　$f^{(n)}(x)=e^x$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$，对任意 $r>0$，任意 $x\in[-r,\ r]$，有

$$|f^{(n)}(x)|=e^x\leqslant e^r \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

根据定理13.11知，$f(x)=e^x$ 可在闭区间 $[-r,\ r]$ 上展成幂级数。

因为 $a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{e^0}{n!}=\dfrac{1}{n!}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$，所以

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \quad (-r\leqslant x\leqslant r)$$

由 r 的任意性，有

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \quad (-\infty<x<+\infty) \tag{13.15}$$

例 3　将函数 $f(x)=(1+x)^\alpha$（其中α为任意实数）在点 $x_0=0$ 的某邻域内展成马克劳林级数。

解　$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}(n=1,2,\cdots)$

$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1) \quad (n=1,2,\cdots)$$

因此，　$f(x)=(1+x)^\alpha$ 的马克劳林级数是

$$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots \tag{1}$$

因为 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\alpha-n}{n+1}\right|=1$，所以 $r=1$，即收敛区间为$(-1,\ 1)$。

下面利用定理13.10，证明幂级数（1）在收敛区间$(-1,\ 1)$内收敛于$(1+x)^\alpha$，即 $f(x)=(1+x)^\alpha$ 在开区间$(-1,1)$内可展成幂级数。

由§5.3泰勒公式的柯西余项知，函数 $f(x)=(1+x)^\alpha$ 的马克劳林公式的柯西余项为

$$R_n(x)=\frac{(1-\theta)^n x^{n+1}\cdot\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{n!}$$

$$=\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-1-n+1)}{n!}x^n\alpha x$$

$$(1+\theta x)^{\alpha-1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$$

其中 $0<\theta<1$，因为$x>-1$，所以$0<1-\theta<1+\theta x$，从而

$$0<\frac{1-\theta}{1+\theta x}<1$$

而 $\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}$，由于 $0<\theta<1$，于是 $|\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}|$ 介于与n无关的二正数

$$|\alpha x|(1+|x|)^{\alpha-1} \text{ 与 } |\alpha x|(1-|x|)^{\alpha-1}$$

之间，令 $\max\{|\alpha x|(1+|x|)^{\alpha-1}, |\alpha x|(1-|x|)^{\alpha-1}\}=k$，所以对任意的 $n\in N$，皆有

$$|\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}|\leqslant k$$

于是，

$$|R_n(x)|=|\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}|\left|\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n\right|$$

$$\left|\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-1-n+1)}{n!}x^n\right|$$

$$\leqslant k\left|\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-1-n+1)}{n!}x^n\right|$$

而此不等式右端的$\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-1-n+1)}{n!}x^n$正是函数

$(1+x)^{\alpha-1}$ 的马克劳林级数的 $n+1$ 项。由上面的讨论知，当$|x|<1$时，函数 $(1+x)^{\alpha-1}$ 的马克劳林级数收敛，从而

$$\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-1-n+1)}{n!}x^n\to 0 \quad (n\to\infty)$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0 \quad (|x|<1)$$

于是，函数 $f(x)=(1+x)^\alpha$在开区间 $(-1, 1)$ 内可以展成马克劳林级数，即所谓的二项式展开式

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots(-1<x<1) \quad (13.16)$$

在 (13.16) 式中，令$\alpha=-1,\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}$，分别得到

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n$$

$$+\cdots \quad (-1<x<1) \quad (13.17)$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot4}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}x^3-\cdots+$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n+\cdots \quad (-1\leqslant x\leqslant1) \quad (13.18)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2-\cdots+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$$

$$+\cdots \quad (-1<x\leqslant1) \quad (13.19)$$

在例 3 中给出的二项式展开式，本来可展区间是 $(-1,1)$，但在函数$\sqrt{1+x}$与$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ 的展式中分别扩展到左、右二端点和右端点。这是由阿贝尔定理保证的。

事实上，如果函数 $f(x)$在开区间 $(-r, r)$可展成幂级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \quad (-r<x<r) \quad (2)$$

且函数 $f(x)$ 在某一端点，比如右端点 $x=r$ 连续，另外级数（2）在端点$x=r$仍然收敛，则根据阿贝尔定理有

$$f(r)=\lim_{x\to r-0}f(x)=\lim_{x\to r-0}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n r^n \quad (13.20)$$

这说明展开式在端点$x=r$也成立，例如，

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n \quad (-1<x<1)$$

但由莱布尼兹判别法不难判别级数

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

是收敛的①，而函数$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$在点 $x=1$ 连续，所以，根据(13.20)知

$$\frac{1}{\sqrt{2}}==1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

即上面的展开式在区间$(-1,1)$的右端点也成立。

对函数 $f(x)=\sqrt{1+x}$ 可作类似的讨论。

二 间接法展开

从上段我们看到，用直接法求函数的幂级数展开式是很麻烦的。通常是从已知展开式出发，通过变量代换、四则运算以及幂级数的逐项微分或逐项积分等方法求出它的展开式的。这种方法，就是所谓的间接法。

1. 变量代换法

例 4　求函数 e^{-x^2} 的马克劳林级数。

解　已知 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \quad (-\infty<x<+\infty)$

在e^x的展开式中，用$-x^2$代替x得

$$e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\cdots \quad (-\infty<x<+\infty) \tag{13.21}$$

例 5　将函数$\sqrt{1-x}$展成马克劳林级数。

---

① 在证明 $a^n=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\to 0$ 时，要用到不等式$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$（可用数学归纳法证明此不等式）。

解 在已知展开式（13.18）中，用$-x$代替x得

$$\sqrt{1-x}=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\cdots$$

$$-\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n-\cdots \quad (-1\leqslant x\leqslant 1)$$

例 6 将函数$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$展成马克劳林级数。

解 在已知展开式（13.19）

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\cdots$$

$$+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n+\cdots \quad (-1<x\leqslant 1)$$

中，用$-x^2$代替 x 得

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$$

$$+\cdots(-1<x<1) \tag{13.22}$$

2. 逐项微分法与逐项积分法

当待展函数是某已展成幂级数的函数的导数或原函数时，就可以利用幂级数在它的收敛区间内逐项微分或逐项积分的方法，把待展函数展成幂级数。

例 7 将函数$\operatorname{arctg}x$展成马克劳林级数。

解 因为

$$\operatorname{arctg}x=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2} \tag{3}$$

而$\frac{1}{1+t^2}$是公比为$-t^2$的几何级数的和函数，故

$$\frac{1}{1+t^2}=1-t^2+t^4-t^6+\cdots+(-1)^n t^{2n}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n} \quad (-1<t<1) \tag{4}$$

所以，将（4）式代入（3）式中，并根据幂级数可逐项积分，有

$$\operatorname{arctg} x=\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n} dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^{2n} dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1) \qquad (13.23)$$

因为函数 $\operatorname{arctg} x$ 在收敛区间 $(-1,1)$ 的二端点 $x=\pm 1$ 皆连续，且幂级数（13.23）在端点 $x=-1$，1 分别为数级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$，二者皆是收敛的交错级数，所以，根据阿贝尔定理知，展开式（13.23）在二端点 $x=\pm 1$ 也成立。

当 $x=1$ 时，有

$$\frac{\pi}{4}=\operatorname{arctg} 1=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

例 8　将函数 $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$ 展成马克劳林级数。

解　因为 $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=\left(\frac{1}{1-x}\right)'$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' \quad (-1<x<1)$$

所以，根据幂级数在其收敛区间内可逐项微分，有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(x^n)'=\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \quad (-1<x<1)$$

例 9　将函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 展成马克劳林级数。

解　因为

$$[\ln(1+x)]'=\frac{1}{1+x}$$

而$\frac{1}{1+x}$是首项为1，公比为$-x$的几何级数的和函数，从而，有

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad (-1<x<1)$$

所以，

$$[\ln(1+x)]'=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad (-1<x<1)$$

根据定理13.6，对任意$x\in(-1,1)$，有

$$\ln(1+x)=\int_0^x[\ln(1+t)]'dt=\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n\right]dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^n dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad (-1<x\leqslant 1) \quad (13.24)$$

展开式（13.24）的收敛区间已扩展到右端点$x=1$，这是由于和函数$\ln(1+x)$在右端点$x=1$连续，幂级数（13.24）在右端点$x=1$变为收敛的交错级数$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}$（阿贝尔定理）。

当$x=1$时，有

$$\ln 2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} \quad (13.25)$$

3 四则运算

利用级数的代数和运算法则，把给定的函数展成幂级数。

例10 将函数 $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$展成马克劳林级数

解 已知 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$

$$+\cdots \quad (-1<x\leqslant 1) \qquad (13.24)$$

在（13.24）式中，用 $-x$ 代替 x 得

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^n}{n}-\cdots(-1\leqslant x<1)\ (5)$$

（13.24）－（5），根据对数性质和定理11.2有

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\right)\quad(-1<x<1)$$

$$(13.26)$$

利用级数乘法可把二函数之积展成幂级数．例如，设

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots(-r<x<r)$$

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots(-R<x<R)$$

则函数 $h(x)=f(x)g(x)$ 可在它们的公共收敛区间 $(-\rho,\ \rho)$ 内，根据定理13.2和定理 11.17，按级数乘法（对角线排列）展成幂级数

$$h(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$$

$$=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2$$

$$+\cdots+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)x^n+\cdots(13.27)$$

例11 写出函数 $f(x)=e^x\mathrm{arctg}x$ 的马克劳林级数的前四项．

解 由幂级数的乘积公式（13.27）及 e^x 与 $\mathrm{arctg}x$ 的展开式（13.15）与（13.23）有

$$f(x)=e^x\mathrm{arctg}x$$

$$=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots\right)$$

$$= x + x^2 + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3}\right)x^3 + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{3}\right)x^4 + \cdots$$

$$= x + x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \cdots$$

§13.5　幂级数在近似计算中的应用

有了函数 $f(x)$的幂级数展开式，对于收敛区间内任意一点x的函数值 $f(x)$，可以用 $f(x)$ 的前 $n+1$ 项部分和，即 n 次多项式之值，近似代替$f(x)$之值. 因为所产生的误差$R_n(x) \to 0$ ($n \to \infty$)，所以，对预先任意给定的精确度（即最大误差界），总可以选取适当大的n，使之所产生的误差不超过给定的最大误差界.

一　数 e 的近似计算

在这一段里，我们以 e^x 的展开式（13.15）为基础，来讨论无理数 e 的近似计算.

在（13.15）式中，令 $x=1$ 得

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots \qquad (13.28)$$

应用等式（13.28）可近似计算数 e . 例如，要求精确到 $\frac{1}{10^7}$. 为此，首先必须确定在（13.28）中应取多少项，即n取何值时，才能使得用前$n+1$项

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

之值代替数e，其误差

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots\right]$$

$$<\frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\ \frac{1}{1-\frac{1}{n+2}}=\frac{1}{(n+1)!}\ \frac{n+2}{n+1}<\frac{1}{n!}\ \frac{n+2}{(n+1)^2}$$

$$<\frac{1}{n!}\ \frac{n+2}{n^2+2n}=\frac{1}{n\cdot n!}<\frac{1}{10^7}$$

经过计算知道，当取$n\geqslant10$，这时截断误差

$$R_{10}<\frac{1}{10!\,10}<0.00000003=3\times10^{-8}=10^{-7}\cdot\frac{3}{10}<10^{-7}$$

这样，我们取e的展开式的前11项，且每一项计算到小数点后第八位，将第九位四舍五入得，

$$e\approx1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{10!}$$

这里，后八项计算所产生的舍入误差的绝对值不超过$0.5\times10^{-8}\times8=4\times10^{-8}$，而截断误差不超过$3\times10^{-8}$。于是，整个计算过程的总误差不超过$4\times10^{-8}+3\times10^{-8}<10\times10^{-8}=10^{-7}$。因此$e\approx2.7182818$，精确度达到$\frac{1}{10^7}$。

二　三角函数值的计算

从$\sin x$的展开式（13.13）中不难看出，当$|x|$较小时，级数的收敛“速度”较“快”。事实上，当$0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$时，取展开式（13.13）的不为0的前四项得

$$\sin x\approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\quad\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}\right)\qquad(1)$$

因为级数（13.13）是收敛的交错级数，所以，其截断误差

$$|R_8| = \left|\frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots\right| \leqslant \frac{x^9}{9!} < \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^9}{9!} \leqslant \frac{(0.8)^9}{9!}$$

$$< \frac{0.2}{362880} < 0.000005$$

上述结果告诉我们，当 $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$时，由近似公式（1）计算正弦$\sin x$的近似值,其精确度可达到$10^{-5}$.因此，对角度不超过$\frac{\pi}{4}$的所有正角 x，其五位正弦函数表就可以同近似公式（1）编制。

其实，正如前面指出的那样，在保持同样的精确度的情况下，$|x|$越小，近似公式中所取的项数就可以越少；反之，若$|x|$越大，则项数就必须越多．例如，对绝对值较小的 x，只取展开式的前两项（指非0项），即

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} \qquad (2)$$

就能够得到足够的精确度．例如 $\sin\frac{\pi}{18}$用近似公式（2）计算它的值，其误差

$$|R_4| = \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 < \frac{0.2}{5!} < \frac{1}{3 \cdot 10^5} < \frac{1}{10^5}$$

这又告诉我们，只用展开式（13.13）的前两项，即近似公式（2）就可以编制角度在 $10°\left(=\frac{\pi}{180}\text{弧度}\right)$以下那部分五位正弦函数表。

对于 $\cos x$ 可作类似的讨论。

三 对数的近似计算

根据对数的性质，只要计算出对数函数在各正整数点的函

数值，就可以算出对数函数在任何一点 $x>0$ 的函数值。

下面利用展开式（13.26）导出一个收敛速度较快的递推公式。为此，在 (13.26) 中，令 $\frac{1+x}{1-x}=1+\frac{1}{n}$， 则 $x=\frac{1}{2n+1}$，把它代入到 (13.26) 中得

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots\right]$$

或者

$$\ln(n+1)=\ln n+2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^5}+\cdots\right] \quad (13.29)$$

(13.29) 式是一个计算对数比较方便的递推公式。公式右边是一个收敛较快的级数。

令 $n=1$，由 (13.29) 式有

$$\ln 2=2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5+\cdots+\frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{3}\right)+\cdots\right] \quad (13.30)$$

现在应用级数 (13.30) 近似计算ln2，假设要求精确到10^{-4}，那么应该在 (13.30) 中截取多少项呢！即n应取何值，才能使

$$2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots+\frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1}\right]$$

之值与ln2之差的绝对值小于10^{-4}呢？

为此，我们估计用前 n 项部分和近似代替 ln2 所产生的误差，即截断误差——余式R_n。

$$R_n=2\left[\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}+\frac{1}{2n+3}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+3}+\cdots\right]$$

$$<\frac{2}{2n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}\left[1+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^4+\cdots\right]$$

$$=\frac{2}{2n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}\frac{9}{8}=\frac{1}{4(2n+1)}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1}<\frac{1}{10000}$$

经逐一验算知，当 $n=4$ 时，有

$$R_4<\frac{1}{4\cdot 9}\left(\frac{1}{3}\right)^7=\frac{1}{78732}<2\times 10^{-5}$$

因此，截取展开式（13.30）的前四项作为ln2的近似值，即

$$\ln 2\approx\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5+\frac{2}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7$$

其截断误差不超过 2×10^{-5}．同上面一样，各项的值都要计算到小数点后第五位，其第六位采取四舍五入，这样舍入误差最大不超过 $4\times\frac{5}{10^6}=2\times 10^{-5}$．计算结果得

$$\ln 2\approx 0.66667+0.02469+0.00165+0.00013=0.69314$$

其总误差不超过

$$2\times 10^{-5}+2\times 10^{-5}=4\times 10^{-5}<10^{-4}$$

有了ln2的近似值，利用递推公式（13.29）就可以算出任何正整数的对数．如果要求常用对数，只须使用换底公式即可．对数表的制作原理大致如此．

学 习 指 导

一 内容概要

1．重点及要求

幂级数有许多好的性质．要掌握幂级数的这些性质，读者必须弄清幂级数收敛域的结构，会求收敛半径，收敛区间和确定收敛区间端点的敛散性，从而确定收敛域．要知道幂级数在收敛区间内部的任何区间上一致收敛，从而使幂级数的和函数在收敛区间内连续、可微与可积，且幂级数在收敛区间内可逐项微分和逐项积分，逐项微分与逐项积分后得到的新的幂级数收敛半径不变．要掌握应用幂级数的逐项可微与逐项可积性求

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

收敛域。

解 因为$l=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right|}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$，所以，$r=\frac{1}{l}=\frac{1}{e}$，从而收敛区间为$\left(-\frac{1}{e},\ \frac{1}{e}\right)$。

在二端点 $x=\pm\frac{1}{e}$，级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\pm 1)^n\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}\right)^n$。

由于数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$是严格递减① 且以 e 为极限，于是，对任意$n\in N$,$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>e$，从而有

$$\left|u_n\left(\pm\frac{1}{e}\right)\right|=\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}\right)^n>\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}\right)^n=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\tag{1}$$

又因数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$严格递增且以 e 为上界，那么，由（1）

---

① 由于对任意$x>0$，有

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\cdots+nx^{n-1}+x^n>1+nx$$

于是，当$n\geqslant2$时，$x=\frac{1}{n^2-1}>0$，有

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}=\left(\frac{1+\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1}\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}=\left[1+\frac{1}{(n-1)(n+1)}\right]^{n+1}\frac{n-1}{n}$$

$$>\left[1+(n+1)\frac{1}{(n-1)(n+1)}\right]\frac{n-1}{n}=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\frac{n-1}{n}=1$$

从而，$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$，即数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$严格递减。

式知，

$$\left|u_n\left(\pm\frac{1}{e}\right)\right|>\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>\frac{1}{e}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\left(\pm\frac{1}{e}\right)\neq0$，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\pm1)^n\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}\right)^n$发散。

这样幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$的收敛域为收敛区间$\left(-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$。

例 2 求幂级数

$$1+(x-a)+\frac{(x-a)^2}{2^2}+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n^2}+\cdots$$

的收敛域。

解 令 $x-a=y$，得到关于 y 的幂级数

$$1+y+\frac{y^2}{2^2}+\cdots+\frac{y^n}{n^2}+\cdots\qquad(2)$$

因为 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1$

所以，$r=\frac{1}{l}=1$，从而幂级数(2)当 $-1<y<1$ 时收敛，即给定幂级数当$-1<x-a<1$ 时收敛，亦即当 $a-1<x<a+1$ 时收敛，故给定的幂级数的收敛区间为 $(a-1,\ a+1)$。

当 $y=\pm1$ 时，显然幂级数 (2) 收敛，即当$x=a\pm1$时，给定的幂级数收敛。从而给定的幂级数的收敛域为 $[a-1,a+1]$。

例 3 求广义幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ 的收敛域。

基本思路 令 $y=\frac{1-x}{1+x}$，得幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}y^n$，求出它

的收级半径 r，然后解不等式 $|y|=\left|\frac{1-x}{1+x}\right|<1$，即可确定给定的幂级数的收敛域。

解 设 $y=\frac{1-x}{1+x}$，得到幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}y^n$. 因为

$$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n+3}}{\frac{1}{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3}=1$$

所以，$r=\frac{1}{l}=1$. 从而当$|y|<1$时，幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{2n+1}$收敛，即当$\left|\frac{1-x}{1+x}\right|<1$ 时收敛。当$|y|>1$时发散，即当$\left|\frac{1-x}{1+x}\right|>1$时，级数发散。

于是，当 $x>0$ 时，有$\left|\frac{1-x}{1+x}\right|<1$，给定幂级数收敛。

当 $x<0$ 时，$\left|\frac{1-x}{1+x}\right|>1$，给定幂级数发散。

当 $x=0$ 时，给定幂级数变为值级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$，显然是发散的。

总之，广义幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ 的收敛域为（0，$+\infty$）。

例 4 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n$（$a>0$，$b>0$）收敛域。

基本思路 首先讨论当$a\geqslant b$和$a<b$时的收敛半径，从而确定其收敛区间。其次讨论端点的收敛情况。

解 如果 $a\geqslant b$ 时，有

$$l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}a\sqrt[n]{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\left(\frac{b}{a}\right)^n}=a$$

则 $\quad r=\frac{1}{l}=\frac{1}{a}$。

如果 $a<b$ 时，有

$$l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}b\sqrt[n]{\frac{1}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^n+\frac{1}{n^2}}=b$$

则 $\quad r=\frac{1}{l}=\frac{1}{b}$。

令 $\quad r=\min\left\{\frac{1}{a},\ \frac{1}{b}\right\}$. 收敛区间为 $(-r,\ r)$。

下面讨论端点的敛散性。

在左端点 $x=-r$ 。如果 $a\geqslant b$ ，则给定幂级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\left(\frac{b}{a}\right)^n\right]$. 它是两个收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}\left(\frac{b}{a}\right)^n$ 之和，因而必收敛（定理11.2）．但其绝对值级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\left(\frac{b}{a}\right)^n\right]$ 是发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 与收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{b}{a}\right)^n$ 之和，因此发散（定理11.2推论）．故当$a\geqslant b$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\left(\frac{b}{a}\right)^n\right]$ 条件收敛．如果$a<b$，则给定幂级数变为$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^n+\frac{1}{n^2}\right]$.它的绝对值级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^n+\frac{1}{n^2}\right]$是二收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 之和，因而收

敛。故此时绝对收敛。

在右端点 $x=r$。如果$a\geqslant b$，则给定幂级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\left(\frac{b}{a}\right)\right]$，显然发散（定理11.2推论）。如果 $a<b$，则给定幂级数变为$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^n+\frac{1}{n^2}\right]$，显然收敛（定理11.2）。

综上所述，给定幂级数的收敛区间为 $(-r,r)$，其中 $r=\min\left\{\frac{1}{a},\ \frac{1}{b}\right\}$。

当 $x=-r$时，如果 $a\geqslant b$，则给定级数是条件收敛；如果 $a<b$，则给定级数是绝对收敛的。

当 $x=r$ 时，如果 $a\geqslant b$，则给定级数发散；如果$a<b$时，级数绝对收敛。

例 5 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$ 的和函数。

基本思路 先求出收敛区间 $(-r,\ r)$，对任意$x\in(-r,\ r)$，从0到x逐项积分，在积分后的幂级数中提出 x，再逐项积分一次，即可求出和函数 $S(x)$。

解 根据定理13.3容易确定幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$ 的收敛区间为 $(-1,\ 1)$。设

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}\ (-1<x<1)$$

对任意 $x\in(-1,\ 1)$，对幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$ 从0到 x 逐项积分得

$$\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n^2t^{n-1}dt=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\quad(3)$$

函数$\int_0^x S(t)dt$连续，且当$x=0$时，$\int_0^x S(t)dt=0$．由（3）式得

$$\frac{1}{x}\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\quad(4)$$

由（3）式知，函数$\frac{1}{x}\int_0^x S(t)dt$连续，在点 $x=0$ 有意义，其值为 1。

对幂级数（4），从0到x再逐项积分得

$$\int_0^x\left[\frac{1}{y}\int_0^y S(t)dt\right]dy=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x ny^{n-1}dy=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}\quad(5)$$

因为函数$\frac{1}{y}\int_0^y S(t)dt$连续，所以根据定理9.16，对(5)式两边求导得

$$\frac{1}{x}\int_0^x S(t)dt=\frac{1}{(1-x)^2}\text{或}\int_0^x S(t)dt=\frac{x}{(1-x)^2}\quad(6)$$

同理，对（6）式两边求导得

$$S(x)=\frac{1+x}{(1-x)^3}\quad(-1<x<1)$$

例 6 证明函数 $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$满足微分方程 $y^{(4)}=y$。

证明 根据达兰贝尔判别法，不难证明对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$ 收敛，即给定幂级数的收敛区间为$(-\infty,+\infty)$。

于是，根据定理13.7，对幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$连续四次逐项求

导得

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{x^{4n}}{(4n)!}\right]' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}$$

$$y'' = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}\right]' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!}$$

$$y''' = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!}\right]' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!}$$

$$y^{(4)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!}\right]' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-4}}{(4n-4)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!} = y$$

即　　$y^{(4)} = y$。

例7　利用基本展开式把下列函数展成马克劳林级数。

(i) $\mathrm{sh}x$，(ii) $\sin^2 x$，(iii) $\dfrac{x}{1+x-2x^2}$。

解　(i) 因为 $\mathrm{sh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$，$e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$，$e^{-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-x)^n}{n!}$。

所以

$$\mathrm{sh}x = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

(ii) 因为 $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$，$\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$　$(-\infty < x < +\infty)$。所以，

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}\left[1 - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n}}{2(2n)!}x^{2n} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

(iii)因为 $\dfrac{x}{1+x-2x^2}=\dfrac{x}{(2x+1)(-x+1)}$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2x+1}\right),$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad (-1<x<1)$$

$$\frac{1}{1+2x}=\frac{1}{1-(-2x)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n \quad \left(-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\right)$$

所以， $\dfrac{x}{1+x-2x^2}=\dfrac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n\right)$

$$=\frac{1}{3}[1-(-2)^n]x^n \quad \left(-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\right)$$

例 8 利用逐项微分法或逐项积分法将下列函数展成马克劳林级数。

(i) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$， (ii) $f(x)=\arcsin x$

解 (i) 因为

$$f'(x)=[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(x^2)^n$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n} \quad (-1<x<1) \qquad (7)$$

所以，对 (7) 式两边从0到x积分，根据幂级数可逐项积分，有

$$f(x)=\int_0^x dt+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}dt$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} x^{2n+1} \tag{8}$$

当 $x = \pm 1$ 时，（8）式右边的级数变为

$$\pm \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}\right]$$

用拉阿伯判别法不难证明它是绝对收敛的（见 §11.3 最后之例），因而收敛。于是，有

$$\ln(1+\sqrt{1+x^2}) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} x^{2n+1}$$

$(-1 \leqslant x \leqslant 1)$

（ii） 因为

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \tag{9}$$

由（13.22）式，有

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} \quad (-1 < x < 1) \tag{10}$$

将（10）代入（9）中，并根据幂级数在收敛区间 $(-1,1)$ 内可逐项积分，有

$$\arcsin x = \int_0^x \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^{2n}\right] dt$$

$$= \int_0^x dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \int_0^x t^{2n} dt$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1) \tag{11}$$

因为函数 $\arcsin x$ 在 $x = -1, 1$ 二端点连续，且幂级数（11）在此二端点的数值级数 $1 \pm \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}$ 皆收敛（见

(i))，所以，根据定理13.9（阿贝尔）知，展开式（11）在端点 $x=\pm1$ 也成立。

例 9　将函数 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)$ 展成马克劳林级数。

基本思路　利用基本展开式 $\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$ 和数与级数乘法。

解　因为 $\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(-1<x\leqslant1)$，所以，

$$f(x)=(1+x)\ln(1+x)=(1+x)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+2}}{n+1}$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n}$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}\quad(-1\leqslant x\leqslant1)$$

展开式之所以在左端点也成立，是因为展开式之右边的级数在 $x=-1$ 点收敛，和函数在点 $x=-1$ 连续（$\lim\limits_{x\to-1+0}(1+x)\ln(1+x)=0$）。

例10　利用级数乘法，将函数 $f(x)=(\operatorname{arctg}x)^2$ 展成马克劳林级数。

基本思路　把 $\operatorname{arctg}x$ 展成幂级数，然后按公式(13.27)展成幂级数。

解　由于 $\operatorname{arctg}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $(-1\leqslant x\leqslant1)$。于是，

$$f(x)=(\operatorname{arctg}x)^2=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[1\cdot(-1)^{n}\frac{1}{2n+1}+\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right.$$

$$+(-1)^{2}\frac{1}{5}\cdot\frac{(-1)^{n-2}}{2n-3}+\cdots$$

$$\left.+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+(-1)^{n}\frac{1}{2n+1}\cdot 1\right]x^{2n+2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\left[1\cdot\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2n-3}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2n+1}\cdot 1\right]x^{2n+2}$$

而

$$1\cdot\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2n-3}+\cdots$$

$$+\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2n+1}\cdot 1$$

$$=\frac{1}{2n+2}\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)+\frac{1}{2n+2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n-1}\right)$$

$$+\frac{1}{2n+2}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2n-3}\right)+\cdots+\frac{1}{2n+2}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{3}\right)$$

$$+\frac{1}{2n+2}\left(\frac{1}{2n+1}+1\right)$$

$$=\frac{2}{2n+2}\left[1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right]$$

$$=\frac{1}{n+1}\left[1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right]$$

所以,

$$f(x)=(\operatorname{arctg}x)^{2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2n+1}\right)\frac{x^{2n+2}}{n+1}\quad(-1\leqslant x\leqslant 1)$$

例11　将函数 $f(x)=\ln x$ 在 $x_0=1$ 点展成泰勒级数。

基本思路　在 $x_0=1$ 点展成泰勒级数，实际就是按 $(x-1)$ 的正整次幂展成幂级数。

解　令 $x-1=y$，则 $x=1+y$，于是，根据基本展开式有，

$$\ln x=\ln(1+y)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{y^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}$$

$(-1<x-1\leqslant 1$ 或 $0<x\leqslant 2)$

例12　将函数 $f(x)=\ln x$ 按分式 $\frac{x-1}{x+1}$ 的正整次幂展成广义的幂级数。

解　设 $\frac{x-1}{x+1}=y$，　解得 $x=\frac{1+y}{1-y}$。将 x 之值代入 $f(x)$ 中得

$$f(x)=\ln x=\ln\frac{1+y}{1-y}$$

由（13.26）式，有

$$f(x)=\ln x=\ln\frac{1+y}{1-y}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}y^{2n+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}\quad\left(-1<\frac{x-1}{x+1}<1\right)$$

解不等式 $-1<\frac{x-1}{x+1}<1$，得 $x>0$。于是，有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}\quad(x>0)$$

例13　用级数乘法直接证明，如果 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 则 $f(x)f(y)=f(x+y)$。

证明　根据定理 13.3，易知给定的幂级数的收敛区间为

$(-\infty, +\infty)$。又根据定理13.2知，它在任何有限区间上绝对收敛。于是，根据级数的乘法，有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(1\cdot\frac{y^n}{n!}+x\frac{y^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^2}{2!}\cdot\frac{y^{n-2}}{(n-2)!}+\cdots$$

$$+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}y+\frac{x^n}{n!}\cdot 1\Big)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\Big(x^n+nx^{n-1}y+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-1}y^2+\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}x^2y^{n-2}+nxy^{n-1}+y^n\Big)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x+y)^n$$

由题设，有

$$f(x)\cdot f(y)=f(x+y)$$

例14　求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$的和函数。

解　由达兰贝尔判别法，容易求出给定的幂级数的收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$。

设　$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)}{n!}x^{2n}$

对上式从0到x逐项积分，并根据基本展开式$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$，有

$$\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{2n+1}{n!}t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}$$

$$=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}=xe^{x^2}$$

因为被积函数$S(x)$在$(-\infty, +\infty)$上连续，所以，根据定

理9.16，对上式两边求导得

$$S(x)=(xe^{x^2})'=e^{x^2}+xe^{x^2}\cdot 2x$$
$$=(1+2x^2)e^{x^2}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

例15　求数级数 $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}$的和。

基本思路　利用二项式展开式（13.22），从0到x逐项积分，再利用阿贝尔定理即可求出给定级数的和。

解　由展开式（13.22），有

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}\quad(-1<x<1)$$

对上式两边，从0到x逐项积分得

$$\arcsin x=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int_0^x dt+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}dt$$
$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\ \frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\quad(-1<x<1)$$

因为当 $x=1$ 时，上述幂级数收敛（见§11.3最后之例），且 $\arcsin x$ 在 $x=1$ 点连续，所以，根据阿贝尔定理知

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$$

例16　设 $f(x)$ 是幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ $(-r<x<r)$ 的和函数，如果函数 $f(x)$ 是奇函数，则幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$中仅出现奇次项；如果函数 $f(x)$ 是偶函数，则幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$中仅出现偶次项。

基本思路　根据函数 $f(x)$ 的幂级数展开式的唯一性知，$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$。再根据奇函数的导数是偶函数，偶函数的导数

是奇函数，以及奇函数在原点的函数值等于 0（见 §4.5 习题 12），即可证明此命题。

证明 已知 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，根据函数的幂级数展开式的唯一性知，$a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ （$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$）。

如果函数 $f(x)$ 为奇函数，则

$f'(x)=[f(x)]'$ 是偶函数，$a_1=f'(0)$

$f''(x)=[f'(x)]'$ 是奇函数，$a_2=\dfrac{f''(0)}{2!}=0$

……

$f^{(2n)}(x)=[f^{(2n-1)}(x)]'$ 是奇函数，$a_{2n}=\dfrac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}=0$

$f^{(2n+1)}(x)=[f^{(2n)}(x)]'$是偶函数，$a_{2n+1}=\dfrac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}$

……

从而，在函数 $f(x)$ 的展开式中，偶次项的系数a_{2n}（$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$）全等于0，即仅出现奇次项。

如果函数 $f(x)$ 是偶函数，则

$f'(x)$ 是奇函数，$a_1=f'(0)=0$

$f''(x)$ 是偶函数，$a_2=\dfrac{f''(0)}{2!}$

……

$f^{(2n)}(x)$ 是偶函数，$a_{n}=\dfrac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}$

$f^{(2n+1)}(x)$是奇函数，$a_{2n+1}=\dfrac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}=0$

……

从而，在函数 $f(x)$ 的展开式中，奇次项的系数 a_{2n+1}（$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$）全等于0，即仅出现偶次项。

例17　近似计算 $\sqrt[5]{245}$，使之精确到10^{-4}。

解　由二项式展开式（13.16）有

$$\sqrt[5]{245}=\sqrt[5]{3^5+2}=\sqrt[5]{3^5\left(1+\frac{2}{3^5}\right)}=3\left(1+\frac{2}{3^5}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$=3\left(1+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3^5}-\frac{4}{1\cdot 2\cdot 5^2}\cdot\frac{2^2}{3^{10}}+\frac{4\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5^3}\cdot\frac{2^3}{3^{15}}-\cdots\right)$$

因为去掉第一项后的级数是一交错级数，所以可按定理11.10进行误差估计．经计算知，只要写出前两项就可以达到所要求的精确度。

事实上，此时的截断误差不超过

$$3\cdot\frac{4}{1\cdot 2\cdot 5^2}\cdot\frac{2^2}{3^{10}}=\frac{8}{5^2\cdot 3^9}<\frac{1}{50000}=0.00002$$

于是，$\sqrt[5]{245}\approx 3+\frac{2\cdot 3}{5\cdot 3^5}=3+\frac{2}{405}\approx 3.0049$

例18　计算 $F(1)=\int_0^1 e^{-t^2}dt$ 的值，使之精确到10^{-4}。

基本思路　在讨论不定积分时，我们已经指出，不定积分$\int e^{-t^2}dt$不能表示成有限形式，即e^{-x^2}的原函数

$$F(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$$

是非初等函数．现在我们利用函数的幂级数展开式和幂级数的逐项可积性，求 $F(1)=\int_0^1 e^{-t^2}dt$ 的近似值。

解　由（13.21）式，有

$$e^{-t^2}=1-t^2+\frac{t^4}{2!}-\frac{t^6}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{t^{2n}}{n!}+\cdots(-\infty<t<+\infty)$$

对上式从0到x逐项积分得

$$F(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt=\int_0^x 1dt-\int_0^x t^2dt+\int_0^x\frac{t^4}{2!}dt$$

$$-\int_0^x\frac{t^6}{3!}dt+\cdots+\int_0^x(-1)^n\frac{t^{2n}}{n!}dt+\cdots$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$$

$$+ \cdots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

在展开式中，令 $x=1$ 得

$$F(1) = \int_0^1 e^{-t^2}dt = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5\cdot 2!} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{9\cdot 4!} - \frac{1}{11\cdot 5!}$$

$$+ \frac{1}{13\cdot 6!} - \frac{1}{15\cdot 7!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)n!} + \cdots$$

此级数为交错级数，根据定理11.10，经验算知保留前七项，其截断误差不超过

$$\frac{1}{15\cdot 7!} = \frac{1}{75600} < \frac{1.4}{100000}$$

因此，在 $F(1)$ 的展开式的前七项中，每一项计算到小数点后第六位，并四舍五入，就得到

$$F(1) = \int_0^1 e^{-t^2}dt \approx 0.7468$$

其误差不超过10^{-4}。

习　　题

§13.1

1　求下列幂级数的收敛域：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{ne^n}x^n$，　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n^3}x^n$，　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$，

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1}x^{n+1}$，　(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}}x^n (a>1)$，

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$，　(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$，

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n+b^n}$　$(a>0,\ b>0)$，

(9) $1+\frac{x}{3}+2^2x^2+\frac{x^3}{3^3}+\cdots+2^{2n}x^{2n}+\frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}}+\cdots$。

2　求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^l}$ 的收敛半径、收敛区间，并讨论端点的收敛性。

§13.2

3　利用逐项微分法，求下列幂级数的和函数：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，　(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$，　(3) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$，

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}$，　(5) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$。

4　利用逐项积分法，求下列幂级数的和函数：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$，　(3) $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+2)x^n$。

5　证明，函数 $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$满足方程 $xy''+y'-y=0$。

6　设$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在开区间$(-r, r)$内收敛，且级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^r a_nt^ndt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}$$

也收敛，则

$$\int_0^r f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n+1}r^{n+1}.$$

7　利用第 6 题的结果证明

$$\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}dx=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

§13.4

8　利用六个基本展开式，把下列函数展成马克劳林级数：

(1) $a^x(a>1)$，　(2) e^{-x^2}，　(3) $\sin^2x$，

(4) $\dfrac{x^5}{1-x}$，　　(5) $\dfrac{1}{(1+x)^2}$，　　(6) $\dfrac{x}{\sqrt{1-2x}}$，

(7) $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$，　　(8) $\dfrac{1}{1+x+x^2}$，　　(9) $\mathrm{ch}x$。

9　利用逐项积分法，将下列函数展成马克劳林级数：

(1) $f(x)=\mathrm{arctg}\dfrac{2x}{2-x^2}$，　(2) $f(x)=\arccos(1-2x^2)$。

10　利用基本展开式和级数运算，将下列函数展成马克劳林级数：

(1) $f(x)=(1+x)e^{-x}$，　(2) $f(x)=(1+x^2)\mathrm{arctg}x$，

(3) $f(x)=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{2}\mathrm{arctg}x$，　(4) $f(x)=x\mathrm{arctg}x-\ln\sqrt{1+x^2}$，

(5) $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$，　　(6) $f(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt$，

(7) $f(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{\mathrm{arctg}t}{t}dt$。

11　将函数 $f(x)=\ln\dfrac{1}{2+2x+x^2}$ 按 $(x+1)$ 的正整次幂展开成幂级数，即在 $x_0=-1$ 点展成泰勒级数。

12　将函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 按 x 的负整次幂展成泰勒级数。

13　将函数 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ 按分式 $\dfrac{x}{1+x}$ 的正整次幂展成幂级数。

14　证明函数 $y=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$ 满足方程

$xy''+y'-y=0$。

§13.5

15　利用二项式展开式近似计算 $\sqrt[3]{9}$，只取前三项，计算每一项的值要准确到 10^{-4}，并估计这时的截断误差。

16　利用适当的展开式，计算下列函数值，使之准确到指定的精确度要求：

(1) $\cos 1^\circ$，准确到 10^{-6}，

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$，准确到 10^{-5}，

（3）$\ln 1.2$，准确到10^{-4}。

17　计算非初等函数 $F(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$ 在点$x=2$的近似值，即计算积分 $F(2)=\int_0^2 \frac{\sin t}{t}dt$，使之精确到$10^{-3}$。

第十四章 傅立叶级数

这一章我们在函数级数的一般理论的基础上，讨论各项皆为三角函数（正弦函数或余弦函数）的所谓傅立叶级数的收敛性以及如何把已知函数展成傅立叶级数的问题．傅立叶级数是一类非常重要的函数级数．它在电学、力学、声学和热力学等学科中都有着广泛的应用．

§14.1 傅立叶级数

一 问题的提出

在自然界和工程技术中，周期运动的现象是很多的．例如，较简单的周期运动有单摆的摆动，蒸汽机活塞的往复，交流电的电流和电压等，较复杂的周期运动有机械振动、热传导等．其中最简单的周期运动即所谓的简谐振动可用正弦函数（也可用余弦函数）

$$y=A\sin(\omega t+\varphi)$$

来描述，其中 A 为振幅，ω 为角频率，t 为时间，φ 为初相角，简谐振动的周期为 $T=\frac{2\pi}{\omega}$．较复杂的周期运动，是几个简谐振动

$$y_k=A_k\sin\ (k\omega t+\varphi_k)\ \ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

的叠加

$$y=\sum_{k=1}^{n}\ y_k=\sum_{k=1}^{n}\ A_k\ \sin(k\omega t+\varphi_k) \qquad (2)$$

为了讨论问题方便起见，令 $\omega t=x$，于是，每个简谐振动 $y_k=A_k\sin(kx+\varphi_k)$ （$k=1, 2, \cdots, n$）的周期为 $\frac{2\pi}{k}$，它们具有共同的周期 2π。无穷多个简谐振动的叠加，得到函数级数

$$A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(nx+\varphi_n) \tag{3}$$

如果函数级数（3）收敛，则它表示更为复杂的周期运动。

函数级数（3）的一般项可表为

$$\begin{aligned}A_n\sin(nx+\varphi_n)&=A_n(\sin\varphi_n\cos nx+\cos\varphi_n\sin x)\\&=A_n\sin\varphi_n\cos nx+A_n\cos\varphi_n\sin nx\end{aligned}$$

如果用 $\frac{a_0}{2}$ 表示 A_0，a_n 表示 $A_n\sin\varphi_n$，b_n 表示 $A_n\cos\varphi_n$，函数级数（3）就表为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{14.1}$$

称为三角级数，其中 a_0，a_n，b_n （$n=1, 2, \cdots$），称为三角级数(14.1)的系数。函数族

$$1\ \cos x,\ \sin 2x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots \tag{14.2}$$

称为三角函数系。

二　三角函数系的性质

三角函数系（14.2）有如下的性质：

1° 三角函数系中所有函数都具有共同的周期 2π。

2° 三角函数系中，任何两个不相同的函数乘积在闭区间 $[-\pi, \pi]$ 上的积分等于0。事实上，

$$\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\cos nx dx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx=\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\sin nx dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx=\frac{-1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}=0$$

$$\left.\begin{array}{l}(n=1,\ 2,\ \cdots)\\(n=1,\ 2,\ \cdots)\end{array}\right\}\quad(14.3)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}[\sin(m+n)x-\sin(m-n)x]dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x]dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-1}{2}[\cos(m+n)x-\cos(m-n)x]dx$$

$$\left.\begin{array}{l}=0\\=0\quad(m\neq n),\\=0\quad(m\neq n),\end{array}\right\}(14.4),$$

3° 三角函数系中，任何一个函数的平方在闭区间 $[-\pi,\pi]$ 上的积分不等于0。事实上，

$$\int_{-\pi}^{\pi}1^2dx=2\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2nx}{2}dx=\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2nx}{2}dx=\pi$$

$$\left.\begin{array}{l}(n=1,\ 2,\cdots)\\(n=1,\ 2,\cdots)\end{array}\right\}\quad(14.5)$$

一般说来，如果两个非恒为0的函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 皆在闭区间$[a,\ b]$上可积，且

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=0$$

则称函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在闭区间 $[a,\ b]$ 上正交。

显然，三角函数系(14.2)中任何两个函数在闭区间 $[-\pi,\pi]$ 上正交（见(14.3)和(14.4)，称三角函数系（14.2）在闭区间$[-\pi,\pi]$上是正交函数系。

三　以2π为周期的傅立叶级数

现在我们来讨论，假设三角级数（14.1）在闭区间 $[-\pi,$

π] 上收敛于 $f(x)$，即

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

那么三角级数（14.1）的系数 a_0，a_n，b_n（$n=1, 2,\cdots$）与函数 $f(x)$ 有什么关系呢？下面的定理回答了这个问题。

定理14.1 如果三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

的系数的绝对值级数，即

$$\frac{|a_0|}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$$

收敛，则三角级数 $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 在整个数轴上一致收敛。

证明 对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$\begin{aligned}|a_n\cos nx+b_n\sin x|&\leqslant|a_n\cos nx|+|b_n\sin nx|\\&\leqslant|a_n|+|b_n|\qquad(n=1, 2, \cdots)\end{aligned}$$

而数级数 $\frac{|a_0|}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ 收敛，根据 M—判别法，三角级数 $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 在整个数轴上一致收敛。 □

定理14.2 如果三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\qquad(14.1)$$

在闭区间 $[-\pi, \pi]$ 上一致收敛于 $f(x)$，则三角级数（14.1）的系数与 $f(x)$ 的关系如下：

$$\left.\begin{aligned}
a_0&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx\\
a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx \qquad (n=1,\ 2,\ \cdots)\\
b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\ \sin nx\,dx \qquad (n=1,\ 2,\ \cdots)
\end{aligned}\right\}\quad(14.6)$$

证明 由题设，对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (4)$$

已知函数级数（4）在闭区间上一致收敛，根据定理12.6，三角级数(14.1)在闭区间$[-\pi,\ \pi]$上可以逐项积分．于是，对上式两边在闭区间$[-\pi,\pi]$上积分得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\right).$$

由(14.3)式知，上式右端括号内的积分都等于0，有

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx=\frac{a_0}{2}2\pi=\pi a_0$$

即
$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx$$

用 $\cos kx$ 乘（4）式两边，得

$$f(x)\cos kx=\frac{a_0}{2}\cos kx+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx\cos kx+b_n\sin nx\cos kx) \qquad (5)$$

根据§12.2例5知，三角级数（5）在闭区间$[-\pi,\ \pi]$上一致收敛于 $\cos kxf(x)$．于是，对（5）式两边积分，根据定理12.6，右边的函数级数可以逐项积分，得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx$$

$$=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kx\,dx\right.$$

$$\left.+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kx\,dx\right)$$

由（14.4）式知，上式右边除了以a_k（即（$n=k$）为系数的那一项积分

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,dx=\pi$$

外，其余各项积分皆等于0，得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx=a_k\pi\quad(k=1,\ 2,\ \cdots)$$

即 $$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx\quad(k=1,\ 2,\ \cdots)$$

或 $$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

最后，用 $\sin kx$ 乘（4）式两边，然后两边逐项积分，得

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\ \sin kx\,dx\quad(k=1,\ 2,\ \cdots)$$

或 $$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\ \sin nx\,dx\,(n=1,\ 2,\ \cdots)$$ □

定义 如果函数 $f(x)$在闭区间［$-\pi$, π］上可积，由公式(14.6)所确定的数 a_0, a_n 及 b_n($n=1$, 2, …) 称为函数$f(x)$的**傅立叶系数**。

以函数 $f(x)$ 的傅立叶系数为系数的三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\tag{14.7}$$

称为函数 $f(x)$的**傅立叶级数**。

定理14.2指出：如果三角级数（14.1）在闭区间［$-\pi$, π］上一致收敛于和函数 $f(x)$，则此三角级数（14.1）就是函数 $f(x)$ 的傅立叶级数（14.7）。且和函数必是以 2π 为周期

的周期函数．这样，从公式（14.6）不难看出，只要函数 $f(x)$ 是以 2π 为周期的可积函数，我们总可以根据公式（14.6）计算出函数 $f(x)$ 的傅立叶系数 a_0，a_n 与 $b_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$，同时写出函数 $f(x)$ 的相应的傅立叶级数．值得注意的是，函数 $f(x)$ 傅立叶级数（14.7）未必一定收敛，即使收敛，也未必收敛到函数 $f(x)$ 本身．

§14.2 傅立叶级数的收敛性

现在讨论函数 $f(x)$ 的傅立叶级数的收敛性．由于函数的傅立叶级数的收敛性比较复杂，我们只给出一个常用的收敛的充分性定理．

引理 1 （贝塞耳①不等式） 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-\pi,\ \pi]$ 上可积，则由函数 $f(x)$ 的傅立叶系数组成的值级数

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2) \tag{14.8}$$

收敛，且有不等式

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx \tag{14.9}$$

不等式（14.9）称为**贝塞耳不等式**．

证明 设函数 $f(x)$ 的傅立叶级数（14.7）的 n 项部分和为 $S_n(x)$，则

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

考虑积分

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2dx$$

①贝塞耳：Bessel，F.W.德国数学家，1784—1846．

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)S_n(x)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} S_n^2(x)\,dx \quad (1)$$

由函数 $f(x)$ 的傅立叶系数公式（14.6），有

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)S_n(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)\right]dx$$

$$= \frac{a_0}{2}\pi\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{n}\left[\pi a_k\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx + \pi b_k\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx\right]$$

$$= \frac{a_0^2\pi}{2} + \pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \quad (2)$$

应用三角函数系的性质，有

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_n^2(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)\right]^2 dx$$

$$= \left(\frac{a_0}{2}\right)^2\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{k=1}^{n}\left[a_k^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,dx + b_k^2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\,dx\right]$$

$$= \frac{a_0^2\pi}{2} + \pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \quad (3)$$

将（2）式与（3）式代入（1）式中得

$$0 \leqslant \int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - S_n(x)]^2 dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)S_n(x)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} S_n^2(x)\,dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - 2\left[\frac{\pi}{2}a_0^2 + \pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right] + \frac{a_0^2\pi}{2}$$

$$+\pi\sum_{k=1}^{n}(a^2_k+b^2_k)$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a^2_k+b^2_k)\right]$$

移项得

$$\pi\left[\frac{a^2_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a^2_k+b^2_k)\right]\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$$

即
$$\frac{a^2_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a^2_k+b^2_k)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$$

$$(n=1,\ 2,\ \cdots)\quad(4)$$

由于（4）式对任意自然数n皆成立．于是，由函数$f(x)$的傅立叶系数组成的数值级数

$$\frac{a^2_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a^2_k+b^2_k)\tag{14.8}$$

的部分和((4）式的左端）有上界$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$．从而，根据正项级数收敛原理知，数值级数（14.8）收敛。

对（4）式，令$n\to\infty$,两边取极限得

$$\frac{a^2_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a^2_k+b^2_k)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$$

或
$$\frac{a^2_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a^2_n+b^2_n)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$$ □

推论 1 （黎曼——勒贝格①定理）如果函数$f(x)$在闭区间$[-\pi,\ \pi]$上可积，则

①勒贝格：Lebesgue，H．L.法国数学家．1875—1941．

$$\left.\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0\\ \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0\end{aligned}\right\}\qquad(14.10)$$

证明 因为数值级数(14.8)收敛，所以根据级数收敛的必要性，有

$$\lim_{n\to\infty}(a_n^2+b_n^2)=0$$

从而，有

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=0$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=0$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=0$$

□

推论 2 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-\pi,\ \pi]$ 上可积，则

$$\left.\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\,dx=0\\ \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\,dx=0\end{aligned}\right\}\qquad(14.11)$$

证明 因为

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\,dx=\int_0^{\pi} f(x)\left[\sin nx\cos\frac{x}{2}+\cos nx\sin\frac{x}{2}\right]dx$$

$$=\int_0^{\pi}\left[f(x)\cos\frac{x}{2}\right]\sin nx\,dx+\int_0^{\pi}\left[f(x)\sin\frac{x}{2}\right]\cos nx\,dx\qquad(5)$$

令
$$F_1(x)=\begin{cases} f(x)\cos\frac{x}{2}, & 0\leqslant x\leqslant\pi \\ 0 & , -\pi\leqslant x<0 \end{cases}$$

$$F_2(x)=\begin{cases} f(x)\sin\frac{x}{2}, & 0<x\leqslant\pi \\ 0 & -\pi\leqslant x\leqslant 0 \end{cases}$$

显然，函数 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 皆在闭区间 $[-\pi,\pi]$ 上可积，

且$\int_{-\pi}^{\pi}F_1(x)\sin nx dx=\int_0^{\pi}\left[f(x)\cos\frac{x}{2}\right]\sin nx dx+\int_{-\pi}^{0}0dx$

$$=\int_0^{\pi}\left[f(x)\cos\frac{x}{2}\right]\sin nx dx \quad (6)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}F_2(x)\cos nx dx=\int_0^{\pi}\left[f(x)\sin\frac{x}{2}\right]\cos nx dx+\int_{-\pi}^{0}0dx$$

$$=\int_0^{\pi}\left[f(x)\sin\frac{x}{2}\right]\cos nx dx \quad (7)$$

将（6）与（7）代入到（5）中得

$$\int_0^{\pi}f(x)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)xdx=\int_{-\pi}^{\pi}F_1(x)\sin nx dx+\int_{-\pi}^{\pi}F_2(x)\cos nx dx \quad (8)$$

根据推论1，对(8)式，令 $n\to\infty$两边取极限得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}f(x)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)xdx=\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}F_1(x)\sin nx dx+\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}F_2(x)\cos nx dx=0$$

同理可证，$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)xdx=0$。 □

引理2 如果函数 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，并且在闭区间 $[-\pi,\pi]$上可积，则函数 $f(x)$ 的傅立叶级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \quad (14.7)$$

的部分和

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+z)+f(x-z)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}z\right)}{2\sin\frac{z}{2}}dz \tag{14.12}$$

证明 函数 $f(x)$的傅立叶级数（14.7）的部分和

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \tag{9}$$

将函数 $f(x)$ 的傅立叶级数系数用公式（14.6）代入到（9）式中得

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{\pi}\cos kx\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos kt dt\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi}\sin\ kx\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin kt dt\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cdot\frac{1}{2}dt+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos kt\cos kx dt\right.$$

$$\left.+\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin kt\sin kx dt\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos kt\cos kx+\sin kt\sin kx\right]dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}} dt①$$

令 $t-x=z$，$t=x+z$，$dt=dz$

当 $t=-\pi$ 时，$z=-\pi-x$

当 $t=\pi$ 时，$z=\pi-x$

于是，$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}} dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+z) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}} dz$$

---

① $\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{1}{2}+\frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ （见35页注①）

$$= \frac{2\cos\left(\frac{nx}{2}+\frac{x}{2}\right)\sin\frac{nx}{2}+\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{2\cos\frac{nx}{2}\cos\frac{x}{2}\sin\frac{nx}{2}-2\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{x}{2}\sin\frac{nx}{2}+\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\sin nx\cos\frac{x}{2}+\left(1-2\sin^2\frac{nx}{2}\right)\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\sin nx\cos\frac{x}{2}+\cos nx\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\sin\left(nx+\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$
=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}dz ①
$$

$$
=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x+z)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}dz
$$

$$
+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+z)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}dz
$$

---

① $f(x+z)\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}$ 是以 2π 为周期的函数。

事实上，因为 $\dfrac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)(z+2\pi)\right]}{2\sin\frac{z+2\pi}{2}}=\dfrac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)z+2n\pi+\pi\right]}{2\sin\left(\frac{z}{2}+\pi\right)}$

$$
=\frac{-\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{-2\sin\frac{z}{2}}=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}
$$

所以 $\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}$ 是以 2π 为周期的函数．又 $f(x+z)$ 也是以 2π 为周期的函数．于是，$f(x+z)\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}$ 是以 2π 为周期的函数。

因为周期函数在任意长度等于周期的闭区间上的积分相等，所以

$$
\int_{-x-\pi}^{\pi-x} f(x+z)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}dz=\int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}dz
$$

关于积分 $\int_{-\pi}^{0} f(x+z)\dfrac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)z}{2\sin\dfrac{z}{2}}dz$ 用 $-z$ 代替 z，有

$$\int_{-\pi}^{0} f(x+z)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}dz$$

$$=\int_{\pi}^{0} f(x-z)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(-z)}{2\sin\frac{-z}{2}}d(-z)$$

$$=\int_{0}^{\pi} f(x-z)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}dz$$

从而 $$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-z)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}dz$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+z)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}dz$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left[f(x+z)+f(x-z)\right]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}dz\ \square$$

如果函数 $f(x)\equiv 1$，显然它满足引理 2 条件（对常数函数而言，任何正数皆是它的周期）。此时，由于 $f(x+z)=f(x-z)=1$，于是，(14.12)式右边的积分变为

$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{\sin\frac{z}{2}} dz$。而左边的函数 $f(x)=1$ 的傅立叶级数的部分和 $S_n(x)\equiv 1$。事实上，由傅立叶系数公式（14.6）和三角函数系的正交性（公式(14.3)）容易求得函数 $f(x)\equiv 1$ 的傅立叶系数。

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1dx=2$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nxdx=0 \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin nxdx=0 \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

于是，函数 $f(x)\equiv 1$ 的傅立叶级数就是 1，从而，对任意的 $n\in N$，都有

$$S_n(x)\equiv 1$$

从而

$$1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{\sin\frac{z}{2}} dz \tag{14.13}$$

下面我们讨论傅立叶级数收敛的充分性定理。假设函数 $f(x)$ 满足下列条件：

（1）函数 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数。

（2）函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-\pi,\ \pi]$ 上连续或只有有限个第一类不连续点。具有这种性质的函数 $f(x)$ 称为**分段连续**。

（3）函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 是分段连续的，具有这种性质的函数 $f(x)$ 称为**分段光滑**。

对于分段光滑函数 $f(x)$ 来说，它的导函数 $f'(x)$ 在闭区间 $[-\pi,\ \pi]$ 上除了有限个点不存在外，其余所有点皆存在且连续。在每个导函数 $f'(x)$ 不存在点（同时也是 $f'(x)$ 不连续

点），导函数 $f'(x)$ 的左右极限存在（几何上，相当于该点存在左右切线）。即如果点 x 是 $f'(x)$ 不存在点（也是 $f'(x)$ 的不连续点）有

$$f'_-(x)=\lim_{\Delta x\to 0-0}f'(x+\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x-0)}{\Delta x}$$

$$f'_+(x)=\lim_{\Delta x\to 0+0}f'(x+\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x+0)}{\Delta x}$$

这说明导函数 $f'(x)$ 不存在点就是导函数 $f'(x)$ 的第一类不连续点。并且是有限个。

由此看出，导函数 $f'(x)$ 的不连续点（即不存在点），可能是函数 $f(x)$ 的不连续点，也可能虽是函数 $f(x)$ 的连续点，但函数 $f(x)$ 在该点的左右导数不相等。然而，不论哪种情形，导函数 $f'(x)$ 的左右极限皆存在（一般说来，二极限不相等，但对可去不连续点，有可能二极限相等）。反映到几何上就是函数 $f(x)$ 的图象（曲线），在闭区间$[-\pi,\ \pi]$上最多有有限个不连续点和角点，在所有不连续点上，曲线的左右切线皆存在，即在闭区间$[-\pi,\ \pi]$上，曲线 $f(x)$ 是由有限段光滑曲线弧组成。因此常称此种曲线为分段光滑的。如图14.1所示。

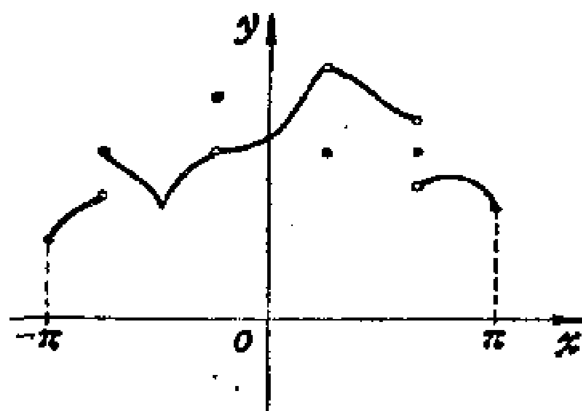


图14.1

定理14.3（收敛定理） 如果以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-\pi,\pi]$ 上是分段光滑的，则函数 $f(x)$ 的傅立叶级数在每一点 x 皆收敛于 $f(x)$的左右极限的算术平均值，即

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$$

分析 要证明函数 $f(x)$ 的傅立叶级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

收敛于$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$，只须证明

$$S_n(x)-\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\to 0\quad(n\to\infty)$$

为此，由(14.12)式与(14.13)式，只要证明

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+z)+f(x-z)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}dz$$

$$-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{\sin\frac{z}{2}}dz$$

$$\to 0\quad(n\to\infty)$$

证明 由等式(14.12)与(14.13)，将差式

$$S_n(x)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

写成积分形式，有

$$S_n(x)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+z)+f(x-z)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}dz$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+0)+f(x-0)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}dz$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x+z)-f(x+0)}{2\sin\frac{z}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)zdz$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x-z)-f(x-0)}{2\sin\frac{1}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)zdz \tag{10}$$

先证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{f(x+z)-f(x+0)}{2\sin\frac{z}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)zdz=0$$

为此，令

$$F(z)=\frac{f(x+z)-f(x+0)}{2\sin\frac{z}{2}}$$

由于 $f(x)$ 在闭区间〔0，π〕上是分段连续函数，于是 $F(z)$ 在区间（0，π〕上也是分段连续函数．$z=0$ 点是 $F(x)$ 的可去不连续点．事实上，因为 $f'(x)$ 在闭区间〔$-\pi$，π〕上分段连续，所以

$$\lim_{z\to 0+0}F(z)=\lim_{z\to 0+0}\frac{f(x+z)-f(x+0)}{2\sin\frac{z}{2}}$$

$$=\lim_{z\to 0+0}\frac{f(x+z)-f(x+0)}{z}\cdot\frac{\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}}=f'_+(x)$$

令 $F(0)=f'_+(x)$，则函数 $F(z)$ 在闭区间〔-0，π〕上是分段连续函数．根据引理 1 和推论 2，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{f(x+z)-f(x+0)}{2\sin\frac{1}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)zdz$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}F(z)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)zdz=0$$

同理可证

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \frac{f(x-z)-f(x-0)}{2\sin\frac{z}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z\,dz=0$$

由（10）式，有

$$\lim_{n\to\infty}\left[S_n(x)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+z)-f(x+0)}{2\sin\frac{z}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z\,dz$$

$$+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x-z)-f(x-0)}{2\sin\frac{z}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z\,dz$$

$$=0$$

□

定理14.3指出：一个以 2π 为周期的光滑或分段光滑函数 $f(x)$，它的傅立叶级数在数轴上任意一点 x 皆收敛于 $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$。若函数 $f(x)$ 在点 x 连续，则

$$f(x+0)=f(x-0)=f(x)$$

于是，函数 $f(x)$ 的傅立叶级数收敛于

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=f(x)$$

即函数 $f(x)$ 的傅立叶级数在连续点 x 收敛于函数 $f(x)$ 本身。从而我们得到：

在数轴上，以 2π 为周期的连续且分段光滑的周期函数 $f(x)$，它的傅立叶级数在数轴上收敛于 $f(x)$。换言之，这样的函数 $f(x)$ 可在整个数轴上展成傅立叶级数。

§14.3 函数的傅立叶级数展开

一 函数的傅立叶级数展开

同函数的幂级数展开类似，一般说来，把一个函数 $f(x)$

在给定区间上，表成它的傅立叶级数的和，就叫做把函数 $f(x)$ 在某个区间上展成傅立叶级数。

上节定理14.3指出，以 2π 为周期的分段光滑函数 $f(x)$，在函数 $f(x)$ 的所有连续点集上可展成傅立叶级数。如果函数 $f(x)$ 不仅分段光滑，而且连续，则函数 $f(x)$ 在整个数轴上可展成傅立叶级数。

实际进行函数 $f(x)$ 展成傅立叶级数时，不仅需要把一个以 2π 为周期的分段光滑函数 $f(x)$，在整个数轴上的一切连续点构成的集合上展成傅立叶级数，而且，更重要的是，把分段光滑的函数，在开区间 $(-\pi,\pi)$ 内（或闭区间 $[-\pi,\pi]$ 上，此时要求 $f(-\pi)=f(\pi)$）的连续点集合展成傅立叶级数。此时需要将已知函数 $f(x)$ 作周期延拓到整个数轴上，得到函数 $f(x)$ 的周期延拓函数

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), \text{当 } x\in(-\pi, \pi) \\ f(x-2k\pi), \text{当 } x\in((2k-1)\pi, (2k+1)\pi) \end{cases}$$

如图14.2。这样，$\tilde{f}(x)$ 就是一个以 2π 为周期的分段光滑函数。根据定理14.2，可在整个数轴上的 $\tilde{f}(x)$ 的所有连续点构成的集合上展成傅立叶级数。当然可在开区间 $(-\pi,\pi)$ 内的连续点集上展成傅立叶级数，又因在 $(-\pi, \pi)$ 内 $\tilde{f}(x)$ 就是 $f(x)$，所

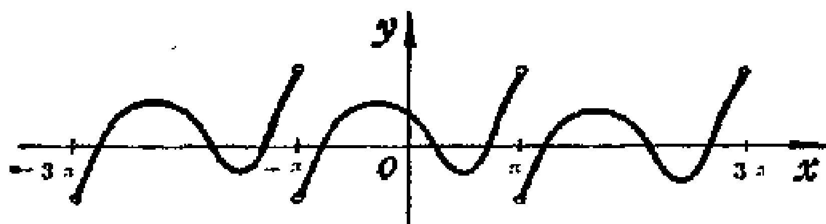


图14.2 （$\tilde{f}(x)$的图象）

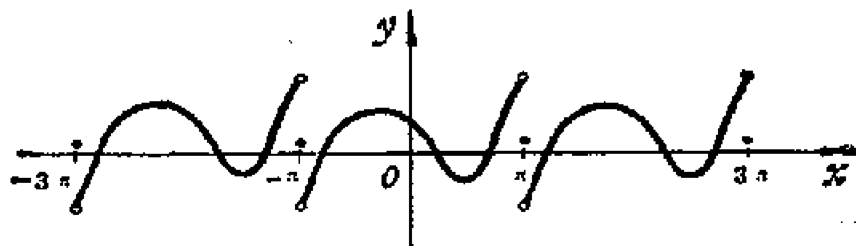


图14.3 （$\tilde{f}(x)$的傅立叶级数的和函数图象）

以，函数 $f(x)$ 可在 $(-\pi, \pi)$ 内的连续点集上展成傅立叶级数。

实际展开时，并不需要作周期延拓，而只须根据给出的函数 $f(x)$，求出傅立叶系数，写出傅立叶级数就可以了。

例 1　将函数 $f(x)=\begin{cases}-x, & 当 -\pi<x\leqslant 0\\ 0, & 当\ 0<x<\pi\end{cases}$ 在开区间 $(-\pi, \pi)$ 内展成傅立叶级数。

解　显然函数 $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 内连续，且是分段光滑的。其周期延拓函数在数轴上，也是分段连续和分段光滑的。故根据定理14.3，可将周期延拓函数 $\tilde{f}(x)$ 展成傅立叶级数，亦即将函数 $f(x)$ 在开区间 $(-\pi, \pi)$ 内展成傅立叶级数。由公式(14.6)，有

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-xdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}0dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\ \frac{-x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{0}=\frac{\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-x\cos nxdx$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}0\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}(-x)\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{1}{n}\sin nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\Big|_{-\pi}^{0}=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n-1}{n^2}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-x\sin nxdx$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}0\sin nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}x\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0}-\int_{-\pi}^{0}\frac{\cos nx}{n}dx=\frac{(-1)^n}{n}$$

于是，在开区间 $(-\pi,\ \pi)$ 内，

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\ \frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx+\frac{(-1)^n}{n}\sin nx\right)$$

在开区间 $(-\pi,\ \pi)$ 外，上述傅立叶级数表示给定函数 $f(x)$ 的周期延拓函数，在 $x=k\pi$ 点收敛于 $\frac{\pi+0}{2}=\frac{\pi}{2}$（如图14.4）

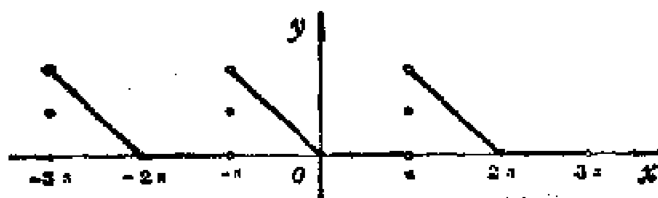


图14.4

例 2 将函数 $f(x)=\begin{cases}1, & -\pi<x<0\\ -x, & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$ 在开区间 $(-\pi,\pi)$ 内的连续点集上展成傅立叶级数。

解 函数 $f(x)$ 在 $(-\pi,\ \pi)$ 内的连续点集为 $(-\pi,\ 0)\cup(0,\ \pi)$。根据定理14.3，可将函数 $f(x)$ 在 $(-\pi,\ 0)\cup(0,\ \pi)$ 内展成傅立叶级数，其系数由公式（14.6）来确定。

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}-xdx$$

$$=1-\frac{\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}-x\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{\pi}\left[x\frac{\sin nx}{n}\right]\Big|_{0}^{\pi}$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left.\frac{-\cos nx}{n}\right|_0^{\pi}=\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}-x\sin nx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\Bigg|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\left(x\frac{\cos nx}{n}\right)\Bigg|_0^{\pi}$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx$$

$$=\frac{(-1)^n-1}{n\pi}+\frac{(-1)^n}{n}-\frac{1}{n\pi}\cdot\left.\frac{\sin nx}{x}\right|_0^{\pi}$$

$$=\frac{(\pi+1)(-1)^n-1}{n\pi}$$

于是，对任意的 $x\in(-\pi,\ 0)\cup(0,\ \pi)$，有

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\cos nx\right.$$

$$\left.+\frac{(\pi+1)(-1)^n-1}{n\pi}\sin nx\right]$$

(如图14.5)

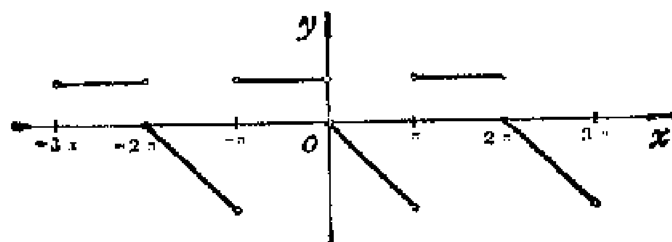


图14.5

二　奇函数与偶函数的傅立叶级数

1　奇函数与偶函数的傅立叶级数

设函数 $f(x)$是以 2π 为周期的可积奇函数，则函数 $f(x)\cos nx$ 也是以 2π 为周期的奇函数，$f(x)\sin nx$ 是偶函数。因为在区间 $(-\pi,\pi)$ 上奇函数的积分等于 0，而偶函数积分等于该函数在区间 $(0,\pi)$ 上的积分的 2 倍，所以，奇函数 $f(x)$的傅立叶系数

$$\left.\begin{aligned}
a_0&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0\\
a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx=0\ (n=1,\ 2,\ \cdots)\\
b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx\\
&=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nx dx\ (n=1,\ 2,\ \cdots)
\end{aligned}\right\}\qquad(14.14)$$

于是，奇函数 $f(x)$ 的傅立叶级数只含正弦项，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx\qquad(14.15)$$

同理，如果函数 $f(x)$ 是以 2π 为周期的可积的偶函数，则偶函数 $f(x)$ 的傅立叶系数

$$\left.\begin{aligned}
a_0&=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)dx\\
a_n&=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx dx\ (n=1,\ 2,\cdots)\\
b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx=0\ (n=1,\ 2,\cdots)
\end{aligned}\right\}\qquad(14.16)$$

于是，偶函数 $f(x)$ 的傅立叶级数只含余弦，即

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx\qquad(14.17)$$

例 3　将函数 $f(x)=x$ 在开区间$(-\pi,\ \pi)$ 内展成傅立叶

级数。

解　因为 $f(x)=x$ 为奇函数，所以，由奇函数的傅立叶系数公式(14.14)有

$$a_0=a_n=0$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[x\frac{-\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\pi\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2}{n\pi}\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

于是，由公式(14.15)知，函数 $f(x)$ 在开区间 $(-\pi,\pi)$ 内可展成只含正弦的傅立叶级数，即

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

上面的傅立叶级数在开区间 $(-\pi,\pi)$ 之外，表示函数 $f(x)$ 的周期延拓函数，而在 $x=k\pi$ 点收敛于 $\frac{-\pi+\pi}{2}=0$ （如图14.6所示）。

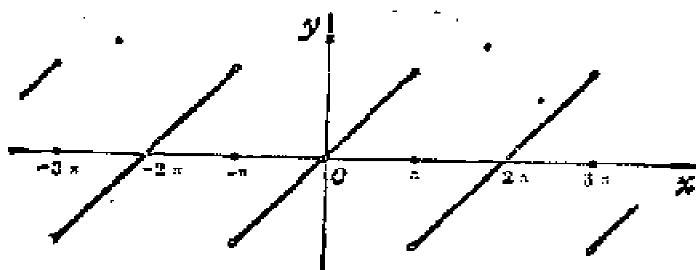


图14.6

例 4　将函数 $f(x)=|\sin x|$ 在数轴上展成傅立叶级数。

解　因为 $f(x)=|\sin x|$ 是以 2π （实际它的周期是 π）为周期的连续函数，并且在整个数轴上，又是分段光滑的偶函数，所以，可在数轴上展成只含有余弦的傅立叶级数。

由公式(14.16)，有

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\sin x|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x dx=\frac{4}{\pi}$$

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\sin x|\cos x dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos x dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}(-\cos 2x)\Big|_0^{\pi}=0$$

当 $n\neq 1$ 时,

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\sin x|\cos nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}[\sin(1-n)x+\sin(1+n)x]dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(n-1)x}{n-1}-\frac{\cos(n+1)x}{n+1}\right]\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}\ \frac{2}{n^2-1}[\cos(n-1)\pi-1]$$

$$=\begin{cases}0 & (n=2k+1,\ k=1,\ 2,\ \cdots)\\ -\dfrac{4}{\pi}\cdot\dfrac{1}{4k^2-1} & (n=2k, k=1,2,\cdots)\end{cases}$$

于是，由公式(14.17)有

$$f(x)=|\sin x|=\frac{2}{\pi}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{4k^2-1}\cos 2kx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[1-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}\right]$$ $(-\infty<x+\infty$, 见图14.7)

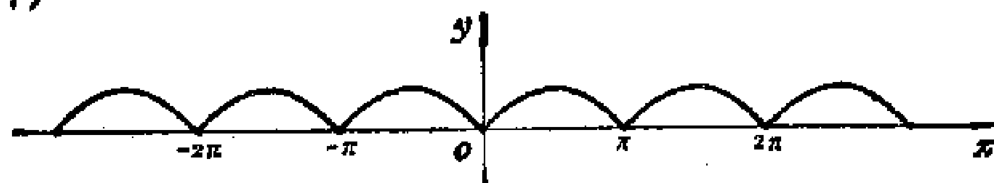


图14.7

2 按正弦展开和按余弦展开

在函数的傅立叶级数展开中，有时需要把开区间（0, π）（或（$-\pi$, 0）内）有定义的函数 $f(x)$ 展成只含正弦的傅立叶级数（又称奇式展开）或者展成只含余弦的傅立叶级数（又称偶式展开）．为此，需要把定义在开区间（0, π）上的函数 $f(x)$ 作奇式延拓到开区间（$-\pi$, 0）内，得奇函数（见图14.8）．

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,\ \pi) \\ -f(-x), & x\in(-\pi,\ 0)\end{cases}$$

或作偶式延拓到开区间（$-\pi$, 0）内，得偶函数（见图14.9）．

$$\tilde{\tilde{f}}(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,\ \pi) \\ f(-x), & x\in(-\pi,\ 0)\end{cases}$$

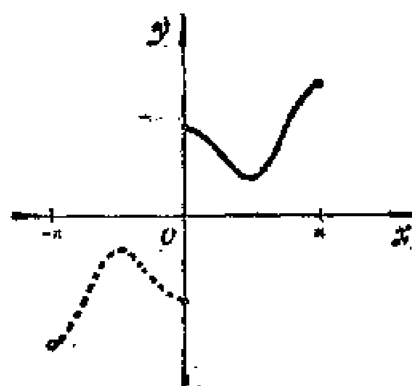


图14.8

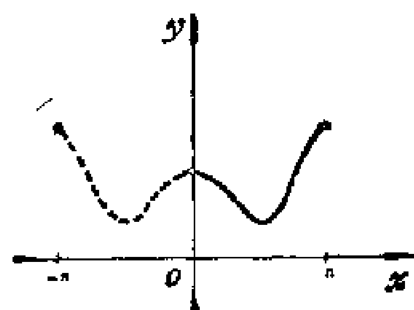


图14.9

然后对所得的奇函数 $\tilde{f}(x)$（奇延拓函数）和偶函数 $\tilde{\tilde{f}}(x)$（偶延拓函数）分别用系数公式(14.14)和(14.16)，求出相应的傅立叶系数，即可展成只含正弦的傅立叶级数(14.15）或只含余弦的傅立叶级数(14.17)． 但是，在具体作奇偶展开时，只需要分别按公式(14.14)和(14.16)计算相应的傅立叶系数即可，并不需要具体去作奇偶延拓．

例 5　将函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0<x<\frac{\pi}{2}\\ \frac{1}{2}, & x=\frac{\pi}{2}\\ 1, & \frac{\pi}{2}<x<\pi\end{cases}$$

在开区间 $(0, \pi)$内展成只含正弦的傅立叶级数。

解 因为函数 $f(x)$ 在开区间$(0, \pi)$内是分段光滑的，所以，根据定理14.3可将奇延拓函数在开区间 $(-\pi, \pi)$ 内展成傅立叶级数（如图14.10），即将函数 $f(x)$ 在开区间$(0,\pi)$ 内展成只含正弦的傅立叶级数。

由系数公式(14.14)，有

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 0\sin nx dx+\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi 1\cdot\sin nx dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left.\frac{-\cos nx}{n}\right|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{2}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-\cos n\pi\right)$$

将 b_n 代入公式(14.15)中得

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}-\cos n\pi}{n}\sin nx,\quad x\in(0, \pi)$$

如图14.10 所示：

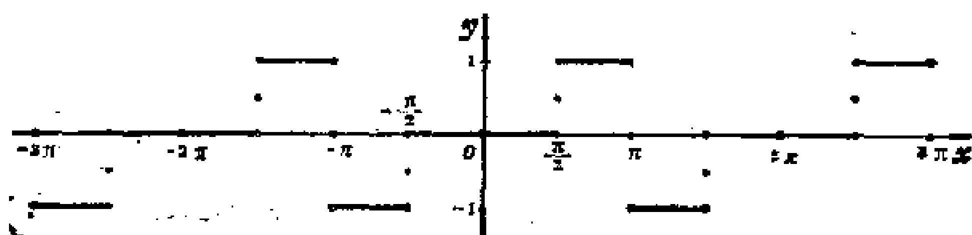


图14.10

例6　把函数 $f(x)=x$ 在开区间 $(0, \pi)$内按偶式展成傅立叶级数。

解 由公式(14.16)，有

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi xdx=\pi$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nxdx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi x\cos nxdx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[x\frac{\sin nx}{n}\right]\Bigg|_0^\pi-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{\sin nx}{n}dx$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}\cos nx\Bigg|_0^\pi=\begin{cases}\dfrac{-4}{\pi(2k-1)^2}, & n=2k-1\\ 0, & n=2k\end{cases}$$

将傅立叶系数代入到(14.17)式中，对任意 $x\in(0,\pi)$，有

$$f(x)=x=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi(2k-1)^2}\cos(2k-1)x$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x$$

如图(14.11)所示：

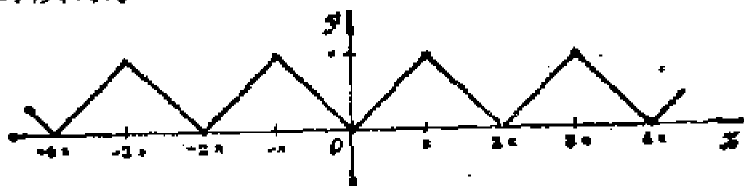


图14.11

三 以$2l$为周期的函数的傅立叶级数

1 以$2l$为周期的函数的傅立叶级数

设 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的周期函数，通过变换

$$x=\frac{lt}{\pi}\quad 或\quad t=\frac{\pi x}{l}\qquad (7)$$

就可以把函数 $f(x)$ 变成以 2π 为周期的关于变量 t 的函数

$$F(t)=f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$$

如果函数 $f(x)$ 在开区间 $(-l, l)$ 内是分段光滑的，则 $F(t)$在开区间 $(-\pi, \pi)$ 内也是分段光滑函数。从而 $F(t)$ 在开区间 $(-\pi, \pi)$ 内一切连续点集合上可展成傅立叶级数，即

$$F(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt) \tag{8}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} a_0&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(t)dt \\ a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(t)\cos nt dt \quad (n=1, 2, \cdots) \\ b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(t)\sin nt dt \quad (n=1, 2, \cdots) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

又因 $t=\frac{\pi x}{l}$，所以$F(t)=f\left(\frac{lt}{\pi}\right)=f(x)$，从而，由（8）式得函数 $f(x)$ 在开区间$(-l, l)$内展成的傅立叶级数是

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{14.18}$$

当 $t=-\pi$ 时，$x=-l$；当 $t=\pi$ 时，$x=l$；$dt=d\frac{\pi x}{l}=\frac{\pi}{l}dx$。

将上述结果代入到（9）式中，得(14.18)式中的系数

$$\left.\begin{aligned} a_0&=\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}f(x)\frac{\pi}{l}dx=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx \\ a_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1, 2, \cdots) \\ b_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1, 2, \cdots). \end{aligned}\right\} \tag{14.19}$$

2. 将非周期函数 $f(x)$ 在开区间 $(-l, l)$ 内展成傅立叶级数

如果非周期函数 $f(x)$，在开区间 $(-l, l)$ 内是分段光滑

的，则可把函数 $f(x)$ 在开区间 $(-l, l)$ 内的连续点集上展成傅立叶级数(14.18)。

其道理同在开区间 $(-\pi, \pi)$ 的情形完全一样。首先把函数 $f(x)$ 周期延拓到整个数轴上，就得到以 $2l$ 为周期的周期函数 $\tilde{f}(x)$。然后，在整个数轴上函数 $\tilde{f}(x)$ 的连续点集上展成傅立叶级数(14.18)

$$\tilde{f}(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l}+b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

其中系数由(14.19)式确定。

当然在作具体展开时，无需作周期延拓，只要由公式(14.19)计算出系数 a_0，a_n，b_n $(n=1, 2, \cdots)$，然后代入到展开式(14.18)中即可。

3 奇式展开和偶式展开

同把定义在开区间$(0, \pi)$〔或 $(-\pi, 0)$〕内的函数 $f(x)$，在开区间 $(0, \pi)$ 内所有连续点集上展成只含正弦或只含余弦的傅立叶级数一样，可以将定义在开区间 $(0, l)$〔或$(-l, 0)$〕内的分段光滑的函数 $f(x)$，在开区间 $(0,l)$〔或$(-l, 0)$〕内的所有连续点集上展成只含正弦或只含余弦的傅立叶级数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{14.20}$$

其中

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\quad(n=1,2,\cdots) \tag{14.21}$$

或者

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} \tag{14.22}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}a_0&=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx\\ a_n&=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\quad(n=1, 2, \cdots)\end{aligned}\right\} \tag{14.23}$$

例 7 将函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & -l<x<0\\ 2, & 0\leqslant x<l\end{cases}$$

在开区间 $(-l,\ l)$ 内的连续点集 $(-l,\ 0)\cup(0,\ l)$ 上展成傅立叶级数

解 由公式(14.19)，有

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx=\frac{1}{l}\left[\int_{-l}^{0}0dx+\int_{0}^{l}2dx\right]=2$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=\frac{1}{l}\left[\int_{-l}^{0}0\cos\frac{n\pi x}{l}dx+\int_{0}^{l}2\cos\frac{n\pi x}{l}dx\right]$$

$$=\frac{1}{l}\frac{2l}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\Big|_{0}^{l}=0\quad(n=1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=\frac{1}{l}\left[\int_{-l}^{0}0\sin\frac{n\pi x}{l}dx+\int_{0}^{l}2\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right]$$

$$=\frac{2}{l}\frac{l}{n\pi}\left(-\cos\frac{n\pi x}{l}\right)\Big|_{0}^{l}=\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{4}{(2k-1)\pi}, & n=2k-1\\ 0, & n=2k\end{cases}$$

将 a_0，a_n，b_n 的值代入到公式(14.18)中，得

$$f(x)=1+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{l},\ x\in(-l,\ 0)\cup(0,l)$$

当 $x=0,\ \pm l$ 时，级数收敛于 1。傅立叶级数的和函数图象如图14.12所示。

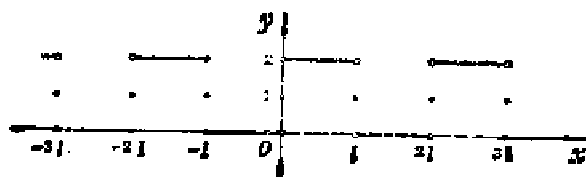


图14.12

例 8　将函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0<x\leqslant 1\\ 1, & 1<x<2\end{cases}$$

在开区间(0, 2)内按正弦展成傅立叶级数。

解　由系数公式(14.21)，有

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\ \sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=\frac{2}{2}\left[\int_0^1 x\sin\frac{n\pi x}{2}\ dx+\int_1^2 1\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\ dx\right]$$

$$=x\left(-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\Bigg|_0^1+\frac{2}{n\pi}\int_0^1\cos\frac{n\pi x}{2}\ dx$$

$$-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_1^2$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^1$$

$$-\frac{2}{n\pi}\ \cos n\pi+\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}$$

$$=\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{2}{n\pi}\cos n\pi$$

将 b_n 之值代入到公式(14.20)中，得

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{2}{n\pi}\ \cos n\pi\right]\sin\frac{n\pi x}{2}$$

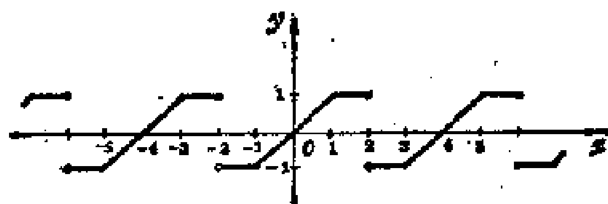


图14.13

4 将函数 $f(x)$ 在任意开区间 (a,b) 内展成傅立叶级数

设函数 $f(x)$ 是定义在开区间 (a,b) 内的分段光滑函数。令 $b-a=2l$，将函数以 $2l$ 为周期延拓到整个数轴上，就得到以 $2l$ 为周期的分段光滑函数 $\tilde{f}(x)$。根据定理14.3，可将函数 $\tilde{f}(x)$ 在整个数轴上的 $\tilde{f}(x)$ 的连续点集上展成傅立叶级数，即

$$\tilde{f}(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

其中 $$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\tilde{f}(x)dx$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\tilde{f}(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\tilde{f}(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

但由于周期函数在任何长度等于周期的闭区间上的积分皆相等，于是周期延拓函数 $\tilde{f}(x)$ 在闭区间 $[-l,\ l]$ 上的积分等于函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,\ a+2l]=[a,b]$ 上的积分。从而函数 $f(x)$ 在开区间 $(a,\ b)$ 内的连续点集上可展成傅立叶级数，即

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)\quad(14.24)$$

其中
$$\left.\begin{aligned}
a_0&=\frac{1}{l}\int_a^b f(x)dx,\ l=\frac{b-a}{2}\\
a_n&=\frac{1}{l}\int_a^b f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\ (n=1,2,\cdots)\\
b_n&=\frac{1}{l}\int_a^b f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\ (n=1,2,\cdots)
\end{aligned}\right\}\quad(14.25)$$

例 9 将函数 $f(x)=x$ 在开区间 $(a,\ a+2l)$ 内展成傅立叶级数.

解 由公式 (14.25)，得

$$a_0=\frac{1}{l}\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{l}\int_a^{a+2l}xdx=2(a+l)$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_a^{a+2l}x\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=\frac{1}{l}\left[\frac{lx}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}+\frac{l^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{l}\right]\Bigg|_a^{a+2l}$$

$$=\frac{1}{l}\left[\frac{l(a+2l)}{n\pi}\sin\frac{n\pi a}{l}+\frac{l^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi a}{l}\right.$$

$$\left.-\frac{la}{n\pi}\sin\frac{n\pi a}{l}-\frac{l^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi a}{l}\right]$$

$$=\frac{2l}{n\pi}\sin\frac{n\pi a}{l}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_a^b f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=\frac{1}{l}\int_a^{a+2l}x\sin\frac{n\pi x}{l}\ dx$$

$$=\frac{1}{l}\left[-\frac{lx}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}+\frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{l}\right]\Bigg|_a^{a+2l}$$

$$=\frac{1}{l}\left[-\frac{l(a+2l)}{n\pi}\cos\frac{n\pi a}{l}+\frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi a}{l}\right.$$

$$+\frac{la}{n\pi}\cos\frac{n\pi a}{l}-\frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi a}{l}\Bigg]$$

$$=-\frac{2l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

代入到（14.24）式中，对任意 $x\in(a,\ a+2l)$有

$$f(x)=x=a+l+\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\Bigg[\ \sin\frac{n\pi a}{l}\ \cos\frac{n\pi x}{l}$$

$$-\cos\frac{n\pi a}{l}\ \sin\frac{n\pi x}{l}\Bigg]$$

$$=a+l+\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\Bigg[\ \frac{n\pi}{l}(a-x)\Bigg]$$

§14.4　傅立叶级数的一致收敛性

在讨论傅立叶级数的一致收敛、逐项积分与逐项微分之前，先证明几个引理：

引理 1（推广的微积分基本定理）如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$上连续，且分段光滑，则

$$\int_a^b f'(x)dx=f(b)-f(a)$$

证明　设 T 是闭区间 $[a,b]$ 的任意分割，并且把所有 $f'(x)$ 不存在点也加进去，有

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

于是，

$$f(b)-f(a)=\sum_{i=1}^{\infty}[f(x_i)-f(x_{i-1})]$$

由于对任意 $i(1\leqslant i\leqslant n)$，函数 $f(x)$ 在闭区间 $[x_{i-1},\ x_i]$ 上连续，在开区间$(x_{i-1},\ x_i)$ 内可导，根据拉格朗日定理，有

$$f(x_i)-f(x_{i-1})=f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$

其中 ξ_i 在 x_{i-1} 与 x_i 之间。从而

$$f(b)-f(a)=\sum_{i=1}^{n} f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1}) \tag{1}$$

因为 $f'(x)$ 是有有限个第一类间断点①的函数，所以，在闭区间 $[a,b]$ 上可积。从而（1）式右端正是可积函数$f'(x)$在闭区间 $[a,b]$ 上的积分和。令 $\lambda(T)\to 0$，对（1）式两边取极限，得

$$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)dx \qquad \square$$

引理 2（推广的分部积分公式）如果函数 $u(x)$，$v(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，且分段光滑，则

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=[u(x)v(x)]\Big|_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx \tag{14.26}$$

证明 对连续函数 $u(x)v(x)$ 求导，得

$$[u(x)v(x)]'=u(x)v'(x)+u'(x)v(x)$$

上式右边每一项都是连续函数与只有有限个第一类间断点的函数之积，因而两项皆可积。故根据引理 1，有

$$\int_a^b [u(x)v'(x)+u'(x)v(x)]dx=\int_a^b [u(x)v(x)]'dx=[u(x)v(x)]\Big|_a^b \tag{2}$$

$$\int_a^b [u(x)v'(x)+u'(x)v(x)]dx=\int_a^b u(x)v'(x)dx+\int_a^b u'(x)v(x)dx \tag{3}$$

比较（2）与（3）得

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx+\int_a^b u'(x)v(x)dx$$

①$f'(x)$的第一类间断点是指函数在该点不可导，但导函数 $f'(x)$在该点的左右极限皆存在。

$$=[u(x)v(x)]\Big|_a^b \qquad (4)$$

将（4）式移项得

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=[u(x)\ v(x)]\Big|_a^b$$

$$-\int_a^b u'(x)v(x)dx \qquad \square$$

定理14.4（一致收敛定理） 如果函数 $f(x)$ 是以 2π 为周期的在闭区间 $[-\pi,\ \pi]$上分段光滑的连续函数，则函数 $f(x)$ 的傅立叶级数在整个数轴上绝对收敛，并且一致收敛于函数 $f(x)$。

证明 设 a'_n 与 b'_n 是导函数 $f'(x)$的傅立叶系数，则

$$a'_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nxdx$$

$$b'_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nxdx$$

由推广的分部积分公式（14.26）有

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{n\pi}f(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nxdx$$

$$=-\frac{1}{n}b'_n \qquad (14.27)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$$

$$=-\frac{1}{n\pi}f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{n}a'_n \qquad (14.28)$$

由不等式 $2|a|\cdot|b|\leqslant|a|^2+|b|^2$ 和（14.27)式有

$$2|a_n| = 2|b'_n| \cdot \frac{1}{n} \leqslant |b'_n|^2 + \frac{1}{n^2} = b'^2_n + \frac{1}{n^2}$$

即
$$|a_n| \leqslant \frac{1}{2}\left(b'^2_n + \frac{1}{n^2}\right) \tag{5}$$

由（14.28）式，有

$$2|b_n| = 2|a'_n| \frac{1}{n} \leqslant a'^2_n + \frac{1}{n^2}$$

即
$$|b_n| \leqslant \frac{1}{2}\left(a'^2_n + \frac{1}{n^2}\right) \tag{6}$$

于是，由（5）与（6），对任意 x 有

$$|a_n\cos nx + b_n\sin nx| \leqslant |a_n| + |b_n|$$
$$\leqslant \frac{1}{2}(a'^2_n + b'^2_n) + \frac{1}{n^2}$$

根据 §14.2引理 1 知，数级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a'^2_n + b'^2_n)$$

收敛．又级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$也收敛．从而，根据定理11.2知，级数

$$\frac{1}{2}(a'^2_n + b'^2_n) + \frac{1}{n^2}$$

收敛．于是，根据 M— 判别法，函数 $f(x)$ 的傅立叶级数绝对并一致收敛于和函数，而根据定理13.4，函数 $f(x)$ 的傅立叶级数的和函数就是函数 $f(x)$本身，因此，函数 $f(x)$的傅立叶级数绝对并一致收敛于 $f(x)$． □

定理14.5 设函数 $f(x)$ 是以 2π 为周期的在闭区间上分段连续的函数．如果函数 $f(x)$ 的傅立叶级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

则函数 $f(x)$ 从 0 到任意一点 x 的积分可由函数 $f(x)$的傅立

叶级数从 0 到x逐项积分得到，即

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{a_0}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \int_0^x \cos nt dt + b_n \int_0^x \sin nt dt\right] \qquad (14.29)$$

证明 考虑函数

$$F(x) = \int_0^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2}\right]dt \qquad (7)$$

因为函数 $f(t)$ 是分段连续函数，所以，对任意 x，$f(t) - \frac{a_0}{2}$ 在闭区间$[0, x]$上可积，并且函数 $F(x)$ 连续。又因为在任何两个相邻的不连续点间，函数 $f(x)$ 是连续的。从而，根据微积分基本定理知，

$$F'(x) = f(x) - \frac{a_0}{2}$$

在相邻二不连续点之间是连续的， 即 $F'(x)$ 是分段光滑的。

又由于对任意 x，有

$$\begin{aligned} F(x+2\pi) &= \int_0^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2}\right]dt + \int_x^{x+2\pi}\left[f(t) - \frac{a_0}{2}\right]dt \\ &= F(x) + \int_{-\pi}^{\pi}\left[f(t) - \frac{a_0}{2}\right]dt \\ &= F(x) + \pi \cdot \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt - a_0\pi \\ &= F(x) + \pi a_0 - \pi a_0 = F(x) \end{aligned}$$

即函数 $F(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数。

由上述讨论知，函数 $F(x)$ 在整个数轴上可展成傅立叶级数

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nx + B_n\sin nx) \qquad (8)$$

由推广的分部积分公式（14.26），当 $n\geqslant 1$ 时，有

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot F(x)\cdot\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F'(x)\sin nx\,dx$$

$$=-\frac{1}{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-\frac{a_0}{2}\right]\sin nx\,dx$$

$$=-\frac{1}{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

$$+\frac{a_0}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx$$

$$=-\frac{1}{n}b_n \tag{9}$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\sin nx\,dx$$

$$=-\frac{1}{\pi}F(x)\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$+\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F'(x)\cos nx\,dx$$

$$=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-\frac{a_0}{2}\right)\cos nx\,dx$$

$$=\frac{1}{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx-\frac{a_0}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx$$

$$=\frac{1}{n}a_n$$

为了求出 A_0，在（8）中令 $x=0$，并由（7）和（9）式得

$$0=F(0)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n=\frac{A_0}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$$

即 $$\frac{A_0}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$$

在展开式（8）中，代入所得各系数值，有

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{b_n}{n}\cos nx+\frac{a_n}{n}\sin nx\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\sin nx+b_n(1-\cos nx)}{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x(a_n\cos nt+b_n\sin nt)dt$$

由（7）式得

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt-\int_0^x\frac{a_0}{2}dt$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x(a_n\cos nt+b_n\sin nt)dt$$

即 $$\int_0^x f(t)dt=\int_0^x\frac{a_0}{2}dt+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x(a_n\cos nt+b_n\sin nt)dt$$ □

定理14.6 设函数 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数，导函数 $f'(x)$ 是分段光滑的，函数 $f(x)$ 的傅立叶级数为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

则对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$\frac{f'(x-0)+f'(x+0)}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)'$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nx-na_n\sin nx) \qquad (14.30)$$

特别是，在导函数 $f'(x)$ 的连续点 x，有

$$f'(x) = \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\right]'$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)'$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nx - na_n\sin nx) \qquad (14.31)$$

证明 由题设，根据收敛定理14.3知，

$$\frac{f'(x+0)+f'(x-0)}{2} = \frac{a_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a'_n\cos nx + b'_n\sin nx) \quad (10)$$

其中 a'_0, a'_n, b'_n 为 $f'(x)$ 的傅立叶级数的系数。

由公式（14.27）和（14.28），有

$$a'_n = nb_n,\quad b'_n = -na_n$$

而 $$a'_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)dx = \frac{1}{\pi}f(x)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

将 a'_0, a'_n, b'_n 代入到（10）式中，得

$$\frac{f'(x+0)+f'(x-0)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nx - na_n\sin nx)$$

当点 x 是 $f'(x)$ 的连续点时，由于

$$f'(x+0) = f'(x-0) = f'(x)$$

有

$$\frac{f'(x+0)+f'(x-0)}{2} = f'(x)$$

于是（14.30）就变为

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)'$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nx - na_n\sin nx)$$

定理14.6指出：以 2π 为周期的连续函数 $f(x)$，如果它的导函数 $f'(x)$ 是光滑的，则在数轴上任意一点x，函数 $f(x)$的导数等于函数 $f(x)$ 的傅立叶级数逐项求导的三角级数在该点 x 之和，即此时导函数 $f'(x)$ 的傅立叶级数可由函数 $f(x)$ 的傅立叶级数逐项求导得到。

例1 由上节例3给出的函数 $f(x)=x$ 的傅立叶展开式

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

用逐项积分法，求函数 x^2 的傅立叶展开式。

解 因为函数 $f(x)=x$ 在开区间 $(-\pi,\ \pi)$ 内连续，所以，根据定理14.5，对任意 $x\in(-\pi,\ \pi)$，有

$$\frac{x^2}{2}=\int_0^x t\,dt=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\int_0^x \sin nt\,dt$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\ \frac{[-\cos nt]}{n}\Bigg|_0^x$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}(1-\cos nx)$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$$

即
$$\frac{x^2}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx \tag{1}$$

为了求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$的值，令

$$c=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

将 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$用 c 代替得

$$\frac{x^2}{4} = c - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx \qquad (2)$$

对（2）式两边从 $-\pi$ 到 π 积分。因为（2）式右边的三角级数在 $[-\pi, \pi]$ 上一致收敛（用 $M-$ 判别法），所以，根据定理12.6，可以逐项积分。从而有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^2}{4}dx = \int_{-\pi}^{\pi}c\,dx - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx = 2\pi c$$

即 $$2\pi c = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^2}{4}\,dx = \frac{x^3}{12}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^3}{6}$$

亦即 $c = \frac{\pi^2}{12}$。将 c 值代入（2）式中得

$$\frac{x^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$$

即 $$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx,\quad x\in(-\pi,\pi)$$

学 习 指 导

一 内容概要

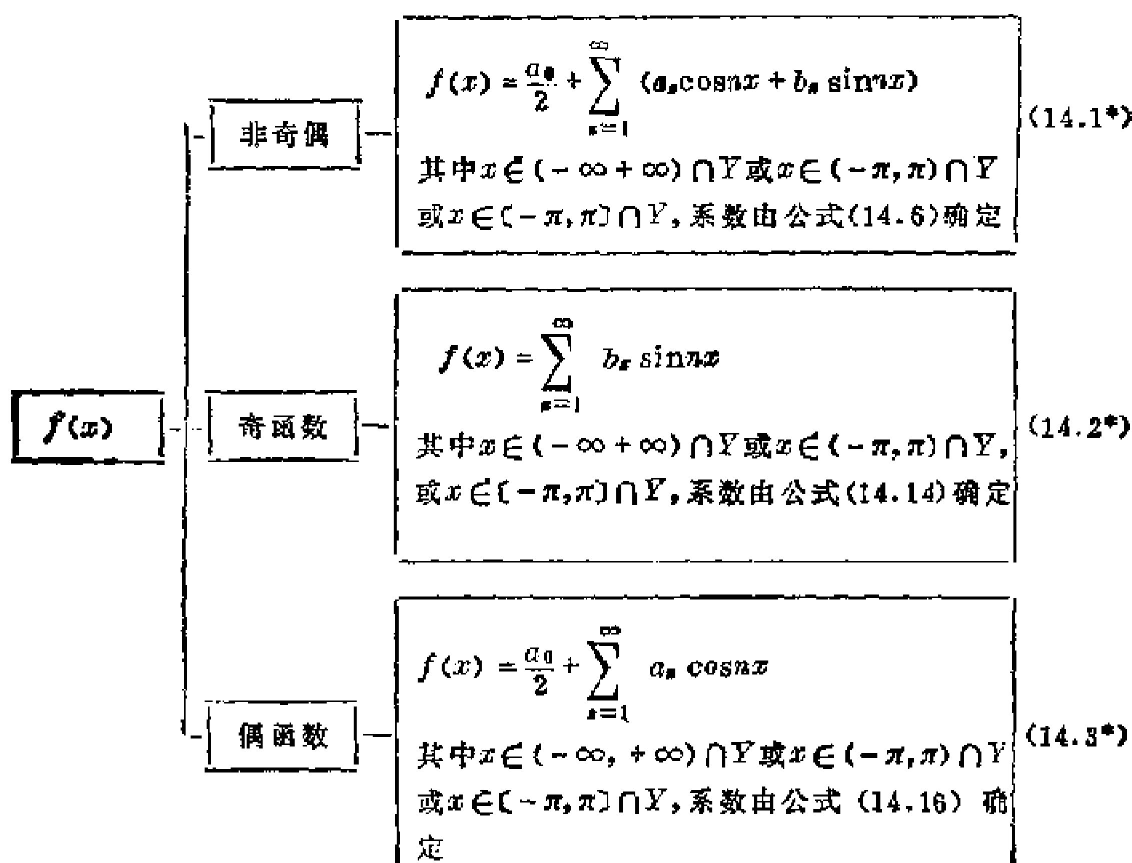
1 重点及要求

本章在三角函数系及其正交性的基础上，给出了函数 $f(x)$的傅立叶级数的概念。接着讨论了本章最重要的函数$f(x)$的傅立叶级数收敛定理。要求读者掌握此定理的证明方法。会应用傅立叶系数公式，比较熟练地将某些函数展成傅立叶级数。会从已知函数的傅立叶级数展开式出发，应用函数的傅立叶级数的逐项可积性与逐项可微性求某些函数的傅立叶级数展开式。

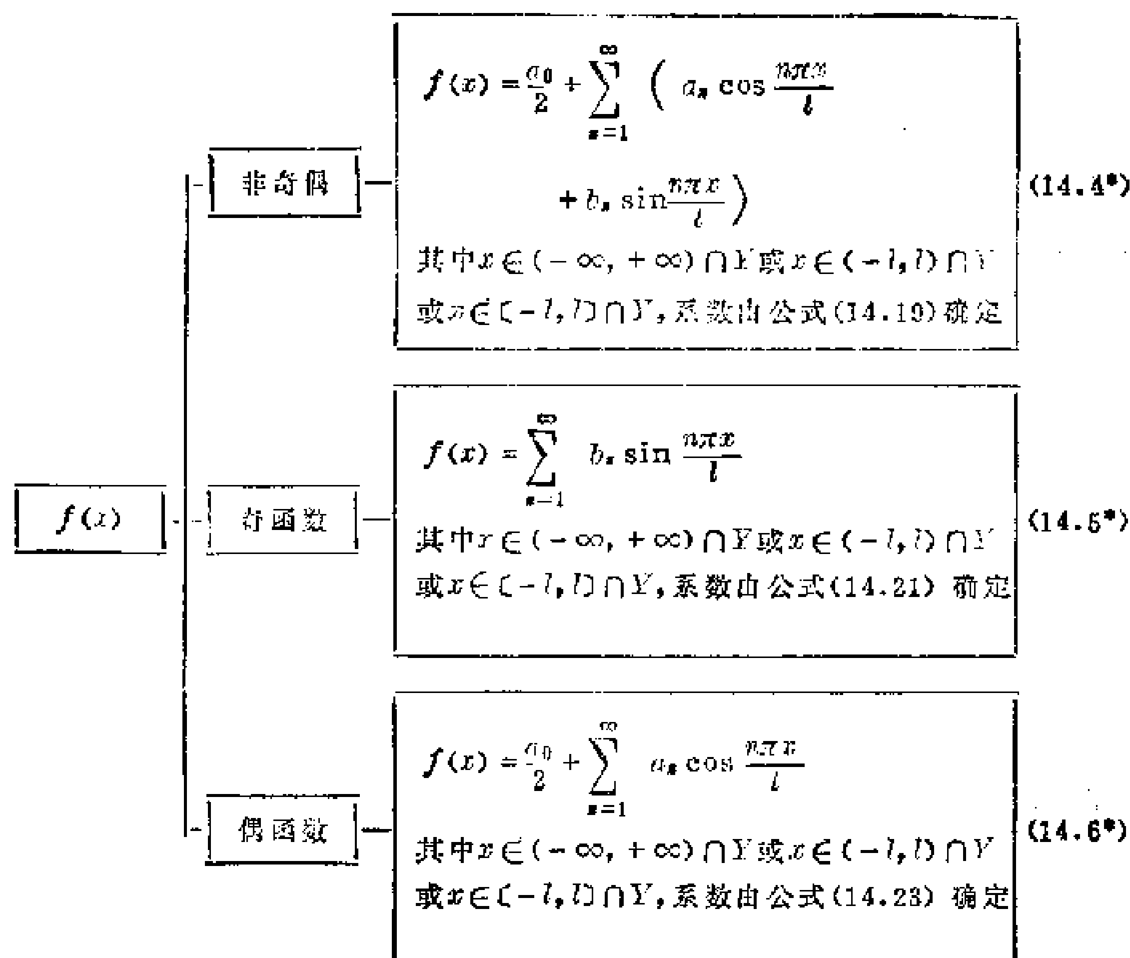
2 分段光滑函数 $f(x)$ 的傅立叶级数展开式

设 Y 为函数 $f(x)$ 的所有连续点构成的集合

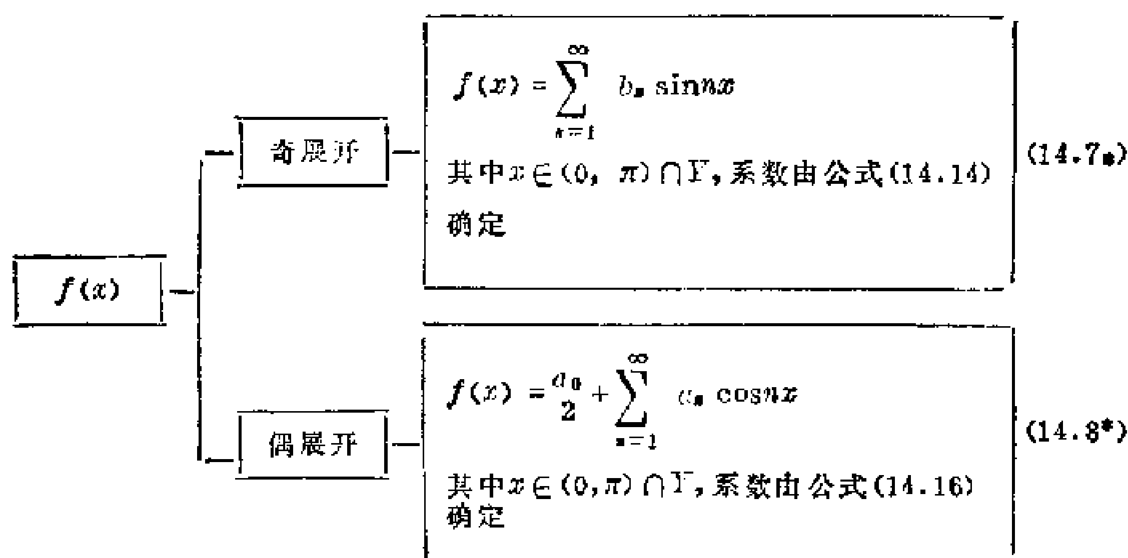
（1）以 2π 为周期的周期函数 $f(x)$，或定义在开区间 $(-\pi,\ \pi)$ 或定义在闭区间 $[-\pi,\pi]$ 上（此时要求 $f(-\pi)=f(\pi)$）的函数 $f(x)$。



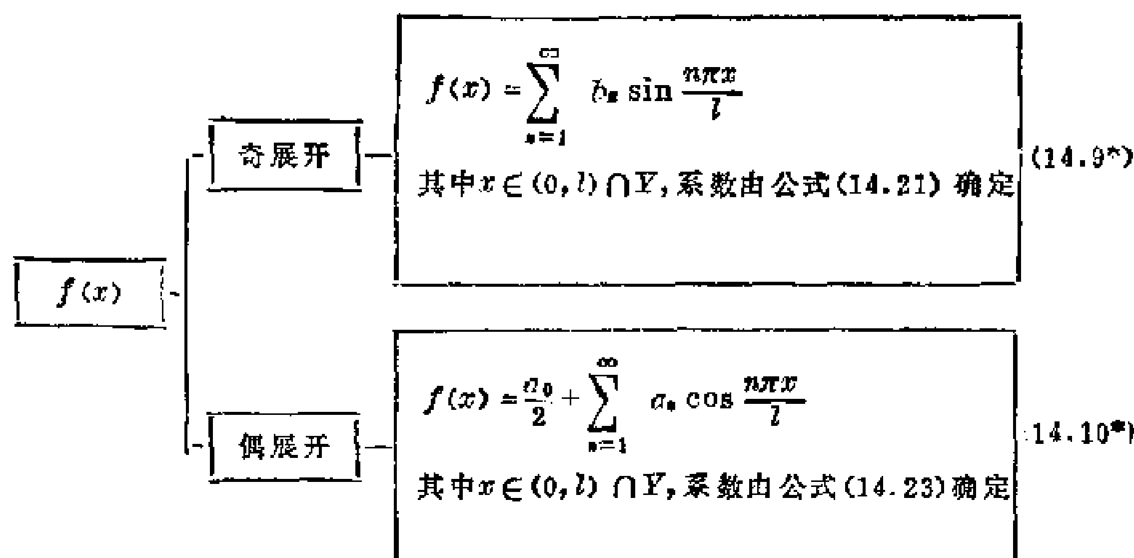
（2）以 $2l$ 为周期的周期函数 $f(x)$，或定义在开区间 $(-l,l)$，或定义在闭区间 $[-l,l]$上（此时要求$f(-l)=f(l)$）的函数 $f(x)$。



（3）定义在开区间$(0,\pi)$内的函数$f(x)$的奇、偶展开。



（4）定义在开区间$(0,l)$内的函数$f(x)$的奇、偶展开。



（5）定义在任意开区间(a,b)内或定义在闭区间$[a,b]$上（但$f(a)=f(b)$）的函数$f(x)$.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi x}{b-a}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{b-a}\right) \tag{14.11*}$$

其中 $x\in(a,b)\cap Y$或$x\in[a,b]\cap Y$，系数由公式（14.25）确定

二　几点说明

1　傅立叶级数的由来

1882年法国卓越的数学家傅立叶在研究热传导问题时，明确地提出了在开区间$(-\pi,\ \pi)$内有定义的任意函数可以展成三角级数的问题。后来经过不少人的努力，增加了一些条件，严格地证明了这一命题。由于傅立叶是第一个指出把函数展开成三角级数的人，同时，他对一些特殊问题的研究确实解决了当时的一些实际问题，因此，傅立叶的工作是有很大贡献的。后来，人们把函数$f(x)$所展成的三角级数称为函数$f(x)$的傅立叶级数。

2　关于一般的正交函数系

设定义在闭区间$[a,\ b]$上的函数$\varphi(x)$与$\psi(x)$皆可积，如果它们的乘积$\varphi(x)\psi(x)$在闭区间$[a,b]$上的积分等于

0，即

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx=0$$

则称两个函数 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上是正交的。

如果定义在闭区间 $[a,b]$ 上的可积函数列

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x),\cdots$$

中的任何两个不同函数在闭区间 $[a,b]$上正交，即

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx=0\ (n,\ m=1,\ 2,\cdots,\ 且 n\neq m)$$

则称函数列 $\{\varphi_n(x)\}$ 是闭区间 $[a,b]$上的正交函数系。

在讨论某些问题中，常常还要假设对任意 $n\in N$，

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)dx=\lambda_n>0$$

即在所讨论的正交系中，不包含恒等于0的函数。

特别地，如果 $\lambda_n=1(n=1,\ 2,\ \cdots)$，则称 $\{\varphi_n(x)\}$ 是标准正交系。

我们在 §14.1里讲的三角函数系

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cdots,\ \cos nx,\ \sin nx,\cdots$$

是一般正交系的一个重要特例。

3　这一章的中心问题是讨论如何把一个函数展成三角级数，这与在第十三章中把一个函数展成幂级数是相当的。但是，要把一个函数展成幂级数，则此函数必须存在任何阶导数，这个条件是比较高的。而把函数展成三角级数（傅立叶级数），只须函数分段光滑即可。这说明把一个函数展成三角级数比展成幂级数的条件要低得多。也就是说，相当广泛的函数都可以展成三角级数。正因为这样，讨论三角级数的敛散性，函数 $f(x)$ 的傅立叶级数展开的理论和方法，对研究函数有着重要意义。

4　关于定理14.5说明

从定理14.5的条件，我们是不能确定函数 $f(x)$ 的傅立叶级数收敛于 $f(x)$，但却可以逐项积分。即函数 $f(x)$ 从0到 x

的积分等于函数 $f(x)$ 的傅立叶级数逐项积分所得到的三角级数的和.

特别地，令 $x=a$ 有

$$\int_0^a f(t)dt=\int_0^a \frac{a_0}{2}dt+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^a a_n\cos nt dt+\int_0^a b_n \sin nt dt\right)$$

令 $x=b$，有

$$\int_0^b f(t)\ dt=\int_0^b \frac{a_0}{2}dt+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^b a_n\cos nt dt+\int_0^b b_n\sin nt dt\right)$$

二式相减得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)dt&=\int_a^b \frac{a_0}{2}dt+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b a_n\cos nt dt+\int_a^b b_n\sin nt dt\right)\\&=\frac{a_0(b-a)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}a_n(\sin nb-\sin na)-\frac{1}{n}b_n(\cos nb-\cos na)\right]\end{aligned}$$

三　例题选讲

例1　证明函数系

$$\sin x,\sin 3x,\cdots,\ \sin(2n-1)x,\cdots$$

在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上是正交的.

证明　对任意的 $n,\ m\in\mathbf{N}$，且 $n\neq m$，由三角函数的积化和差公式，有

$$\sin(2n-1)x\cdot\sin(2m-1)x$$

$$=\frac{1}{2}\{\cos 2(n-m)x-\cos 2[(n+m)-1]x\}$$

于是，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2n-1)x\sin(2m-1)xdx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2(n-m)xdx-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2[(n+m)-1]xdx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2(n-m)x}{2(n-m)}-\frac{\sin 2[(n+m)-1]x}{2[(n+m)-1]}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=0$$

根据正交函数系定义知，函数系

$$\sin x,\ \sin 3x,\cdots,\sin(2n-1)x,\cdots$$

在闭区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上是正交的。

例 2 证明函数系

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\sin 2x,\ \cdots,\cos nx,\ \sin nx,\cdots$$

在闭区间 $[0,\ \pi]$ 上不是正交的。

基本思路 证明存在 $m\neq n$，使得积分

$$\int_0^{\pi}\sin mx\cos nxdx\neq 0$$

证明 设 m 和 n 分别为奇数和偶数（或分别为偶数和奇数）。

因为 $\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x]$

所以，

$$\int_0^{\pi}\sin mx\cos nxdx=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi}\sin(m+n)xdx\right.$$

$$\left.+\int_0^{\pi}\sin(m-n)xdx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{m+n}\cos(m+n)x\right|_0^{\pi}+$$

$$\left.+\frac{-1}{m-n}\cos(m-n)x\right|_0^{\pi}\Bigg]$$

由于当 m 和 n 分别为奇数和偶数或分别为偶数和奇数时，$m+n$ 与 $m-n$ 皆为奇数，于是

$$\cos(m+n)\pi = -1, \quad \cos(m-n)\pi = -1$$

从而，有

$$\int_0^{\pi} \sin mx \cos nx dx = \frac{1}{2}\left[\frac{-1(-1-1)}{m+n} + \frac{-1(-1-1)}{m-n}\right] = \frac{2m}{m^2-n^2} \neq 0$$

根据正交函数系的定义知，函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$$

在闭区间 $[0, \pi]$上不是正交的。

例 3　将以 2π 为周期的连续光滑函数 $f(x)=\sin^4 x$ 展成傅立叶级数。

解 $f(x)=\sin^4 x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2$

$$= \frac{1}{4}(1-2\cos 2x + \cos^2 2x)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1-2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{8}(3-4\cos 2x + \cos 4x) \text{①}$$

由于三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$$

的正交性，不难推得对任意 $n \neq 0, 2, 4,$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{8}(3-4\cos 2x+\cos 4x)\cos nx dx$$

$$= 0$$

---

①其实，我们用三角公式，已将 $f(x)=\sin^4 x$ 用三角函数系中的余弦函数 $\cos 2x$，$\cos 4x$ 及常数表示出来这就是$f(x)=\sin^4 x$的傅立叶级数。事实上，它与用展开公式求得结果完全一样。

而
$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{3-4\cos 2x+\cos 4x}{8}dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{3}{8}dx=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{3}{8}\cdot 2\pi=\frac{3}{4}$$

$$a_2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{3-4\cos 2x+\cos 4x}{8}\cos 2x dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-4\cos^2 2x}{8}dx$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 4x}{2}dx$$

$$=-\frac{1}{2}$$

$$a_4=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{3-4\cos 2x+\cos 4x}{8}\cos 4x dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{8}\frac{1+\cos 8x}{2}dx=\frac{1}{8}$$

同样，由三角函数系的正交性

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{8}(3-4\cos 2x+\cos 4x)\sin nx dx$$

$$=0\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

因此，$\sin^4 x$ 的傅立叶级数是

$$\sin^4 x=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$$

例 4　将函数 $f(x)=\operatorname{sgn} x$ 在开区间 $(-\pi,\ \pi)$ 内展成傅立叶级数.

解　因为函数 $f(x)=\operatorname{sgn} x$ 是奇函数，展开的区间为开区间 $(-\pi,\pi)$，所以，函数 $f(x)$ 的傅立叶级数的展开式由(14.2*)式确定，其系数由公式 (14.14) 计算。

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sgn}x\sin nx dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin nx dx=\frac{2}{\pi}\left.\frac{-\cos nx}{n}\right|_0^\pi$$

$$=\begin{cases}\dfrac{4}{(2k-1)\pi}, & n=2k-1\ (k=1,2,\cdots)\\ 0, & n=2k\end{cases}$$

从而，对任意 $x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi)$，有

$$\operatorname{sgn}x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k-1)\pi}\sin(2k-1)x$$

$$=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$$

当 $x=0$ 时，级数收敛于

$$\frac{f(0+0)+f(0-0)}{2}=\frac{1-1}{2}=0=f(0)$$

于是，对任意 $x\in(-\pi,\pi)$，有

$$\operatorname{sgn}x=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$$

例 5 将函数 $f(x)=\cos ax$ 在开区间 $(-\pi,\pi)$ 内展成傅立叶级数。

解 当 a 为整数时，$\cos ax$ 的傅立叶展开式就是它本身。

当 a 不是整数时，它是偶函数，展开区间为开区间 $(-\pi,\pi)$，所以，函数 $f(x)=\cos ax$ 的傅立叶级数展开式应由 (14.3*) 确定，其系数由公式 (14.16) 来计算。

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos ax dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left.\frac{\sin ax}{a}\right|_0^\pi=\frac{2\sin a\pi}{\pi a}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax\cos nx dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}[\cos(ax-nx)+\cos(ax+nx)]dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(a-n)x}{a-n}+\frac{\sin(a+n)x}{a+n}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^n\sin a\pi}{a-n}+\frac{(-1)^n\sin a\pi}{a+n}\right]$$

$$=\frac{(-1)^n\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{a-n}+\frac{1}{a+n}\right]$$

$$=\frac{(-1)^n 2a\sin a\pi}{\pi(a^2-n^2)}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

于是，$\cos ax=\dfrac{\sin a\pi}{\pi a}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a(-1)^n\sin a\pi}{\pi(a^2-n^2)}\cos nx$

$$=\frac{\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{a}+2a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2}\cos nx\right],$$

$$x\in(-\pi,\pi)$$

例6 将函数 $f(x)=1$ 在 $(0,\ \pi)$ 内展成只含正弦的傅立叶级数.

解 由系数公式（14.14），有

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}1\cdot\sin nx dx=\frac{-2}{n\pi}\cos nx\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n]=\begin{cases}\dfrac{4}{(2k-1)\pi} & n=2k-1\\ 0, & n=2k\end{cases}$$

从而，由(14.7*)，有

$$1=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x,\quad x\in(0,\ \pi)$$

例7 将函数 $f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant h,\\ 0, & \text{当 } h<x\leqslant\pi,\end{cases}$ 在开区间 $(0,\pi)$ 内展成只含余弦的傅立叶级数。

解 按系数公式（14.16）计算 a_0，a_n，

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^h 1\,dx+\int_h^\pi 0\,dx\right]=\frac{2h}{\pi}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^h 1\cdot\cos nx dx+\int_h^\pi 0\cdot\cos nx dx\right.$$

$$=\frac{2}{\pi}\left.\frac{\sin nx}{n}\right|_0^h=\frac{2\sin nh}{n\pi}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

根据展开式（14.8*），有

$$f(x)=\frac{h}{\pi}+\sum_{n=1}^\infty\frac{2\sin nh}{n\pi}\cos nx$$

$$=\frac{2h}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{h}\sum_{n=1}^\infty\frac{\sin nh}{n}\cos nx\right),$$

$$x\in(0,\ h)\cup(h,\ \pi)$$

例8 将函数 $f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)$ 在开区间 $[0,\ \pi]$ 内展成傅立叶级数。

解 因为函数

$$f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)=\begin{cases}1, & \text{当 } |x|<\dfrac{\pi}{2}\\ 1, & \text{当 } |x|=\dfrac{\pi}{2}\\ -1, & \text{当 } \dfrac{\pi}{2}<|x|<\pi\end{cases}$$

是偶函数，所以我们可以认为是将函数 $\operatorname{sgn}(\cos x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内的连续点集上展开成傅立叶级数，从而傅立叶系数可由公式（14.16）计算。

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-1)\,dx\right.$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\pi+\frac{\pi}{2}\right]=0$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nx dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos nx)dx\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\sin nx}{n}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right]$$

$$=\frac{4}{\pi}\,\frac{\sin\frac{nx}{2}}{n}=\begin{cases}\dfrac{4(-1)^{k-1}}{(2k-1)\pi}, & n=2k-1\\ 0\,, n=2k\end{cases}$$

又因 $\dfrac{f\left(\frac{\pi}{2}+0\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-0\right)}{2}=\dfrac{-1+1}{2}=0=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

所以，由展开公式（14.3*），有

$$\operatorname{sgn}(\cos x)=\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\cos(2k-1)x,\ x\in(0,\ \pi)$$

例 9 将函数 $f(x)=\cos\frac{x}{2}$ 在开区间$(0,\ 2\pi)$内展成傅立叶级数.

解 此题可以看作，将函数 $f(x)=\cos\frac{x}{2}$ 在开区间$(a,\ b)=(0,\ 2\pi)$内展成傅立叶级数．此时 $l=\pi$，于是可按展开式（14.11*）展成傅立叶级数．其系数由公式（14.25）计算．

$$a_0=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\frac{x}{2}dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos\frac{x}{2}dx=\frac{2}{\pi}\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{2\pi}=0$$

$$a_n=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}dx$$

$$=\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{2n\pi x}{2\pi}dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos\frac{x}{2}\cos nx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{x}{2}+nx\right)+\cos\left(\frac{x}{2}-nx\right)\right]dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2}{2n+1}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\Big|_0^{2\pi}$$

$$+\frac{2}{1-2n}\sin\left(\frac{1}{2}-n\right)x\Big|_0^{2\pi}=0$$

$$b_n=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi x}{b-a}dx$$

$$=\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\frac{x}{2}\sin\frac{2n\pi x}{2\pi}dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos\frac{x}{2}\sin nx\,dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sin\left(nx+\frac{x}{2}\right)+\sin\left(nx-\frac{x}{2}\right)\right]dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{-2}{2n+1}\cos\frac{2n+1}{2}x\Big|_0^{2\pi}\right.$$

$$\left.+\frac{-2}{2n-1}\cdot\cos\frac{2n-1}{2}x\Big|_0^{2\pi}\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{4}{2n+1}+\frac{4}{2n-1}\right]=\frac{8n}{\pi(4n^2-1)}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

于是，对任意 $x\in(0,\ \pi)$，有

$$\cos\frac{x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8n}{\pi(4n^2-1)}\sin\frac{2n\pi x}{2\pi}=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8n}{4n^2-1}\sin nx$$

例10 将函数 $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ 在开区间（0，2π）内展成傅立叶级数。

解 按展开式（14.11*）展成傅立叶级数，其系数由公式（14.25）确定

$$a_0=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{x^2}{4}\right)\Big|_0^{2\pi}=0$$

$$a_n=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}dx$$

$$=\frac{2}{2\pi-0}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\cos\frac{2n\pi x}{2\pi}dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\cos nx dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}(\pi-x)\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\sin nx dx=0$$

$$b_n=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi x}{b-a}dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}(\pi-x)\frac{-\cos nx}{n}\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos nx}{n}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}(\pi-2\pi)\frac{-1}{n}+\frac{1}{2\pi}(\pi-0)\frac{1}{n}=\frac{1}{n}$$

于是，$f(x)=\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{2n\pi}{2\pi}x$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},\quad x\in(0,2\pi)$$

例11 将函数 $f(x)=x-[x]$ 展成傅立叶级数。

解 此函数 $f(x)$ 的周期 $2l=1$，$l=\frac{1}{2}$. 在区间[0,1] 上 $f(x)=x$，故应按展开式(14.4*)展开，其系数由公式(14.19)计算

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx=\frac{1}{\frac{1}{2}}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(x-[x])dx$$

$$=2\int_0^1 xdx=2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=1$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f(x)\cos\frac{n\pi x}{\frac{1}{2}}dx$$

$$=2\int_0^1 x\cos 2n\pi x dx=2\left[\frac{x\sin 2n\pi x}{2n\pi}+\frac{\cos 2n\pi x}{4n^2\pi^2}\right]\Big|_0^1$$

$$=0\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=2\int_0^1 x\sin 2n\pi x dx$$

$$=2\left[-\frac{x\cos 2n\pi x}{2n\pi}+\frac{\sin 2n\pi x}{4n^2\pi^2}\right]\Big|_0^1$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\quad(n=1,2,\ \cdots)$$

于是，对任意 $x\in(-\infty,+\infty)\cap(k,\ k+1)$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，有

$$x-[x]=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin 2n\pi x$$

例12 如果函数 $f(x)$ 满足条件

$$f(x+\pi)=-f(x)$$

则此函数 $f(x)$ 在开区间 $(-\pi,\ \pi)$ 内的傅立叶级数中，所有下标为偶数的傅立叶系数等于0，即

$$a_0=a_2=b_2=a_4=b_4=\cdots=a_{2n}=b_{2n}=\cdots=0$$

证明 函数 $f(x)$ 在开区间 $(-\pi,\ \pi)$ 内展成傅立叶级数的系数（按系数公式（14.6）计算）

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\ dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)dx$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)dx$$

对于积分 $\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\ dx$，令 $x=\pi+t,t=x-\pi$，当 $x=0$ 时，$t=-\pi$；当 $x=\pi$ 时，$t=0$，且 $dx=dt$。于是，将上述结果代入第二个积分中得

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(\pi+t)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}[-f(t)]\ dt=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(t)\ dt$$

从而
$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)dx$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)dx$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(t)dt=0$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\ \cos nx dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx dx$$

对于上式右边的第二个积分，作与上面相同的变换得

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\ \cos nx dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(\pi+t)\cos n(\pi+t)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}[-f(t)](-1)^n\cos ntdt$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(t)\cos ntdt$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos nxdx$$

代入上式得

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\ \cos nxdx+\frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos nxdx$$

$$=\frac{1+(-1)^{n+1}}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos nxdx$$

这说明当 n 为偶数时，$a_n=0$，即 $a_{2n}=0,(n=1,2,\cdots)$。

同理
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin ndx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\ \sin nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin nxdx$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}[-f(t)](-1)^n\sin ntdt$$

$$=\frac{1+(-1)^{n+1}}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin nxdx$$

这说明当 n 为偶数时，$b_n=0$，即 $b_{2n}=0\ (n=1,2,\cdots)$。

综上所述，有$a_0=a_2=b_2=\cdots=a_{2n}=b_{2n}=\cdots=0$。

例13　证明，设函数 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的傅立叶系数分别为 a_n，b_n 及α_n，$\beta_n(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$，如果 $\varphi(-x)=\psi(x)$，则 $a_n=\alpha_n\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$，$b_n=-\beta_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$。

证明　$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos nxdx\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

令 $x=-t$，当 $x=-\pi$ 时，$t=\pi$；当 $x=\pi$ 时，$t=-\pi$。

$dx=-dt$，将上述结果代入系数 a_n 的表达式中得

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi}\varphi(-t)\cos[n(-t)](-dt)$$

$$=\frac{-1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi}\psi(t)\cos ntdt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(t)\cos ntdt=\alpha_n\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

即 $\qquad a_n=\alpha_n\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi}\varphi(-t)\sin[n(-t)](-dt)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi}\psi(t)\sin ntdt=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(t)\sin ntdt$$

$$=-\beta_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

即 $\quad b_n=-\beta_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$

例14 由已知三角级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$的和，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2}\quad(0<x<2\pi)$$

利用傅立叶级数的逐项可积性，求出三角级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$的和。

基本思路 根据定理14.5，对任意 $x\in(0,\ 2\pi)$，从0到x逐项积分。

解 对任意 $x\in(0,\ 2\pi)$，等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2}$$

的左右两边从 0 到 x积分，并根据定理14.5，有

$$\int_0^x \frac{\pi - t}{2} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{\sin nt}{n} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\cos nt}{n^2} \Big|_0^x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos nx}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

而 $\int_0^x \frac{\pi - t}{2} dt = \left(\frac{\pi t}{2} - \frac{t^2}{4}\right) \Big|_0^x = \frac{\pi}{2} x - \frac{x^2}{4}$

从而，有

$$\frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

为了求出数值级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$的和，令$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = c$，再对上式两边从 0 到 2π 积分得

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{4} \right) dx = \int_0^{2\pi} c\, dx - \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\cos nx}{n^2} dx$$

$$= 2\pi c - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3} \Big|_0^{2\pi}$$

$$= 2\pi c$$

于是，

$$c = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi x}{2} - \frac{x^3}{4}\right) dx = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi x^2}{4} - \frac{x^3}{12}\right) \Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{\pi^2}{6}$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = c + \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2}$$

$$= \frac{\pi^2}{6} + \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12} \qquad x \in (0,\ 2\pi)$$

习　题

§14.1

1　证明，函数系

$$1,\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{\pi x}{l},\ \cos\frac{2\pi x}{l},\ \sin\frac{2\pi x}{l},\ \cdots,\cos\frac{n\pi x}{l},\ \sin\frac{n\pi x}{l},\cdots$$ 在

闭区间 $[-l,\ l]$ 上是正交函数系

2　证明，函数系

$$\sin\frac{\pi x}{2l},\ \sin\frac{3\pi x}{2l},\ \cdots,\ \sin\frac{(2n+1)}{2l},\ \cdots$$

在闭区间 $[0,\ l]$ 上是正交的。

§14.3

3　将下列以 2π 为周期的函数展成傅立叶级数：

(1) $f(x)=\cos^4x$,　　(2) $f(x)=\sin^4x$,

(3) $f(x)=\mathrm{sgn}(\sin x)$,　　(4) $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)$.

4　将下列函数在开区间 $(-\pi,\pi)$ 内展成傅立叶级数：

(1) $f(x)\sin ax$,　　(2) $f(x)=|x|$,

(3) $f(x)=x\sin x$.

5　将下列函数 $f(x)$，在开区间 $(-\pi,\ \pi)$ 内函数 $f(x)$ 的连续点构成的点集上，展成傅立叶级数：

(1) $f(x)=\begin{cases}x, & -\pi<x\leqslant 0,\\ 1, & 0<x<\pi;\end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases}-x-1, & -\pi<x\leqslant 0,\\ x^2, & 0<x<\pi.\end{cases}$

6　将下列函数在开区间 $(0,\ \pi)$ 内展成只含正弦的傅立叶级数：

(1) $f(x)=x^2$,　　(2) $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x<\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \dfrac{\pi}{2}\leqslant x<\pi.\end{cases}$

7　将下列函数在开区间 $(0,\ \pi)$ 内展成只含余弦的傅立叶级数：

(1) $f(x)=\mathrm{sh}x$,　　(2) $f(x)=x-2$.

8　将下列周期函数展成傅立叶级数：

（1）$f(x)=|\cos x|$，　　　　（2）$f(x)=\operatorname{sgn}\sin\frac{x}{4}$。

9　将下列函数在指定区间内展成傅立叶级数：

（1）$f(x)=\begin{cases} A, 当\ 0<x\leqslant l, \\ 0, 当 l<x<2l, \end{cases}$ 其中A为常数，在开区间（0，2l）内的连续点集；

（2）$f(x)=\begin{cases} x^2, & 0<x<\pi, \\ 0, & x=\pi, \\ -x^2, & \pi<x<2\pi, \end{cases}$ 在开区间（0，2π）内；

（3）$f(x)=\begin{cases} 0, & -5<x<0, \\ 3, & 0\leqslant x<5, \end{cases}$ 在开区间（$-5,5$）内函数 $f(x)$的所有连续点集上。

§14.4

10　由已知展开式

$$\frac{x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}\quad(-\pi<x<\pi)$$

利用逐项积分法，将函数 x^2，x^3，x^4，在开区间（$-\pi,\pi$）内展成傅立叶级数。

第十五章　多元函数

一元函数的微积分是一个非常有用的数学工具，它解决了很多初等数学无法解决的实际问题。但是，实际问题是复杂的，常常要涉及到含有两个或更多自变量的函数。为了应用微积分解决更广泛的实际问题和数学本身的理论问题，就需要把一元函数微积分的概念和理论推广到多元函数上去。

讨论多元函数，我们以二元函数为主，这是因为从一元函数进入到二元函数，会产生一些新的内容，但从二元到三元或n元函数时，就没有什么本质上的不同，只是形式上的差异。因此，只要掌握了二元函数的极限、连续等概念和研究二元函数的方法，读者就不难将二元函数的一些概念和理论推广到三元以至n元函数上去。

§ 15.1平面点集

一　平面点集的一些概念

我们知道，一元函数的定义域是数轴上的点集，而二元函数的定义域则是平面上的点集。所以，在讨论二元函数之前，首先要介绍平面点集的一些概念。

由解析几何知道，所有有序实数对(x, y)集与平面所有点集之间是一一对应的。平面上具有某种性质P的所有点或有序实数对(x, y)的集G，记作

$$G=\{(x, y) \mid (x,y)\text{具有性质}P\}$$

例如，

$$E=\{(x,\ y)|\ a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d\}$$

是平面上矩形$a\leqslant x\leqslant b$，$c\leqslant y\leqslant d$上所有点$(x,\ y)$的点集；

$$F=\{(x,\ y)|\ x^2+y^2<1\}$$

是圆心在原点，半径为 1 的单位圆内所有点的点集，但单位圆周上的点不包含在F内。

定义 设$P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$为平面上的两点，非负数

$$\rho(P_1,P_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

称为点P_1与点P_2之间的距离。设$P_0(x_0,\ y_0)$是定点，对任意$\delta>0$，点集

$$U(P_0,\ \delta)=\{(x,y)|\ \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$

称为点P_0的δ圆形邻域；点集

$$U(P_0,\ \delta)=\{(x,\ y)|\ |x-x_0|<\delta,\quad |y-y_0|<\delta\}$$

称为点P_0的δ方形邻域。

不难证明，这两种邻域具有如下的性质：点P_0的任何一个圆形邻域包含点P_0的某一个方形邻域；反之，点P_0的任何一个方形邻域包含点 P_0 的某一个圆形邻域（图15.1）。

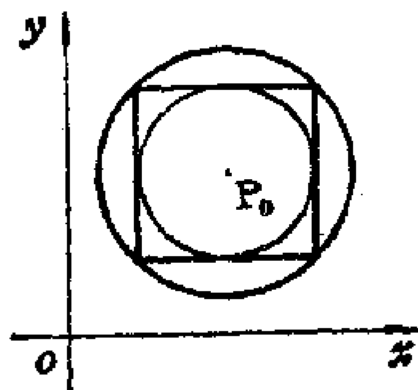


图15.1

由于这两种邻域具有互相包含的关系，今后不加区别，统称为点P_0的邻域。

定义 有平面点列$\{P_n(x_n,\ y_n)\}$与定点$P_0(x_0,\ y_0)$。如果对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$n_0\in N$，当$n>n_0$时，有

$$\rho(P_n,P_0)=\sqrt{(x_n-x_0)^2+(y_n-y_0)^2}<\varepsilon$$

则称点列 $\{P_n(x_n,\ y_n)\}$收敛于点$P_0(x_0,\ y_0)$。

例如，点列$\left\{P_n\left(\frac{1}{n},\ \frac{1}{2n}\right)\right\}$与$\left\{Q_n\left(1+\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right)\right\}$分别收敛于点$P_0(0,0)$与 $Q_0(1,1)$。事实上，

$$\rho(P_n, P_0)=\sqrt{\left(\frac{1}{n}-0\right)^2+\left(\frac{1}{2n}-0\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{4n^2}}=\frac{1}{2n}\sqrt{5}$$

与 $$\rho(Q_n, Q_0)=\sqrt{\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]^2+\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)-1\right]^2}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{n}\sqrt{2}$$

于是，点列$\left\{P_n\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2n}\right)\right\}$与$\left\{Q_n\left(1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right)\right\}$分别收敛于点 $P_0(0, 0)$与 $Q_0(1, 1)$。

根据两种邻域的关系，关于点列收敛，有如下定理。

定理 1 点列$\{P_n(x_n, y_n)\}$收敛于点$P_0(x_0, y_0)$的必要充分条件是，当 $n\to\infty$时，有$x_n\to x_0$ 与 $y_n\to x_0$。

证明 必要性 如果点列$\{P_n(x_n, y_n)\}$收敛于点$P_0(x_0, y_0)$，即对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$n_0\in \mathbf{N}$，当$n>n_0$时，有

$$\rho(P_n, P_0)=\sqrt{(x_n-x_0)^2+(y_n-y_0)^2}<\varepsilon$$

从而分别有

$$|x_n-x_0|\leqslant\sqrt{(x_n-x_0)^2+(y_n-y_0)^2}<\varepsilon$$

与 $$|y_n-y_0|\leqslant\sqrt{(x_n-x_0)^2+(y_n-y_0)^2}<\varepsilon$$

于是，当 $n\to\infty$时，有 $x_n\to x_0$ 与 $y_n\to y_0$。

充分性 如果当 $n\to\infty$时，有$x_n\to x_0$ 与 $y_n\to y_0$，即对任意给定的$\varepsilon>0$，存在n_1，当$n>n_1$时，有

$$|x_n-x_0|<\varepsilon$$

对同样的$\varepsilon>0$，存在n_2，当$n>n_2$时，有

$$|y_n-y_0|<\varepsilon$$

取$n_0=\max\{n_1, n_2\}$，当$n>n_0$时，同时有

$$|x_n-x_0|<\varepsilon \text{ 与 } |y_n-y_0|<\varepsilon。$$

于是，

$$\rho(P_n, P_0)=\sqrt{(x_n-x_0)^2+(y_n-y_0)^2}<\sqrt{\varepsilon^2+\varepsilon^2}=\sqrt{2}\varepsilon$$

即点列 $\{P_n(x_n, y_n)\}$收敛于点 $P_0(x_0, y_0)$。

定义 设E是一平面点集：

（1）如果点$P\in E$，且存在点P的某个δ邻域$U(\rho,\delta)$包含在点集E之中，即$U(P,\delta)\subset E$，则称点P为点集E的**内点**。

（2）如果点P的任意邻域内，都含有点集E的无限多点，则称点P为点集E的**聚点**。

（3）如果点P的任何邻域内，既含有点集E的点，又含有不是点集E的点、则称点P为点集E的**界点**。点集E的所有界点集，称为点集E的**边界**（图15.2）。

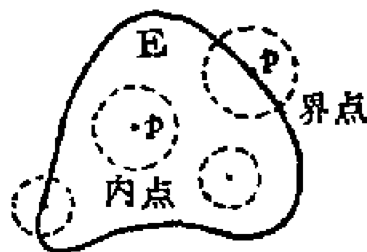


图15.2

例1 讨论点集

$$E=\{(x,y)|\,0<x^2+y^2<1\}$$

的内点，聚点、界点和边界。

解 对任意一点 $P(x,y)\in E$。因为原点O到点P的距离$\rho(P,1)<1$，于是只要取$\delta=\min\{\rho(P,0),\ 1-\rho(P,0)\}$，则点$P$的$\delta$邻域$U(P,\delta)\subset E$，所以点$P$是$E$的内点。再由$P$的任意性，点集$E$的所有点都是它的内点；$E$内的任意点、原点$O(0,0)$和圆周 $x^2+y^2=1$ 上任意点的任何邻域都含有点集E的无限多个点。根据聚点的定义，点集$\{(x,y)|\,x^2+y^2\leqslant1\}$上的任意点都是点集$E$的聚点；原点$O(0,0)$和圆周$x^2+y^2=1$上的点，虽然都不属于点集 E，但它们的任何邻域都含有E的点，又含有不是E的点，所以原点和圆周上的点都是E的界点；从而知点集

$$\{(x,y)\,|x^2+y^2=1 \text{与}\ x^2+y^2=0\}$$

是点集E的边界.

例2 讨论平面点集

$$E=\{(x,y)|\,x,y\ \text{皆取正整数}\}$$

的内点、聚点和界点。

解 对任意一点$P\in E$，则点P与E中所有点之间的距离大于或等于1，所以取$\delta<1$时，点P的δ邻域$U(P,\delta)$内除点P

外再没有点集E的点，于是点集E没有内点也没有聚点，而E的点都是它的界点。

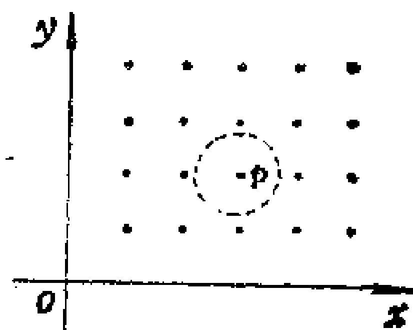


图15.3

我们知道，在数直线上，开区间与闭区间仅相差两个端点，但对连续函数的性质影响很大，即闭区间上的连续函数有四个重要性质（见第三章和第七章），但在开区间内连续函数的这几个性质未必成立。对于二元函数也有类似情况。

定义 如果点集D的任意一点都是它的内点，并且D内的任何两点A,B，都可用完全属于D的连续曲线（即曲线上的点都属于D）联接起来（这种性质称为**连通性**），则称点集D为**开区域**。开区域连同它的边界称为**闭区域**（图15.4）。

开区域、闭区域及开区域连同它的部分边界统称为**区域**。

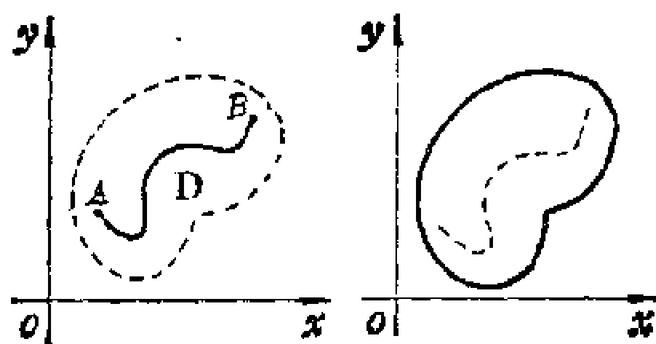


图15.4

点集$E=\{(x,\ y)|\ x^2+y^2\leqslant 1\}$是闭区域，点集$E=\{(x,\ y)|\ x^2+y^2<1\}$是开区域，整个数平面是开区域，点集$E=\{(x,y)|\ 1\leqslant x^2+y^2<2\}$是非开非闭的区域。

定义 设E是一平面点集，如果存在原点的M邻域$U(O,\ M)$，使

$$E\subset U(O,\ M)$$

则称点集E为**有界**（或E为**有界点集**），否则 E 为**无界**。显然，$E=\{(x,\ y)|\ a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d\}$，$E=\{\ (x,\ y)\ |\ x^2+y^2<1\}$都是有界点集，而$E=\{(x,\ y)|\ 0\leqslant x<+\infty,\ c\leqslant y\leqslant d\}$是无界点集。

定义 设D为一平面有界区域，在D上任意两点P,Q之间的距离$\rho(P,\ Q)$所构成的数集的上确界

$$d(D)=\sup\{\rho(P,\ Q)|\ P,\ Q\in D\}$$

称为区域D的**直径**。

例如，圆的直径就是该圆域的直径；矩形的对角线就是该矩形域的直径。

二 几个基本定理

有了平面点集的一些概念，我们就可以建立与实数连续性类似的一些基本定理，这里我们只给出平行于闭区间套定理的闭矩形套定理和一个应用起来较方便的聚点原理。

定理15.1 （闭矩形套定理）设

$$D_1,\ D_2,\ \cdots,\ D_n,\ \cdots$$

为一列闭矩形域，如果满足条件：

（1）$D_{n+1}\subset D_n$，$n=1,\ 2,\ \cdots$；

（2）当 $n\to\infty$时，D_n的直径 $d(D_n)\to 0$。

则存在唯一一点P，属于所有闭矩形域D_n。

证明 为了方便起见，我们假定闭矩形域D_n的边分别平行于x 轴和y轴。

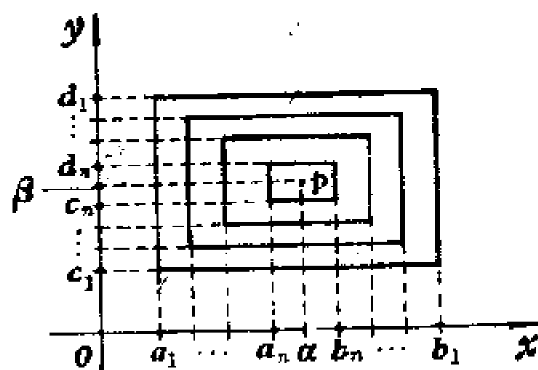


图1.55

设闭矩形域D_n在x 轴上投影的闭区间为$[a_n, b_n]$；在y 轴上投影的闭区间为$[c_n,\ d_n]$（图15.5）。于是我们得到两个闭区间列

$$\{[a_n,\ b_n]\}与\ \{[c_n,\ d_n]\}$$

由条件（1）知，这两个闭区间列满足

$$[a_{n+1}, b_{n+1}]\subset[a_n, b_n], n=1, 2, \cdots$$

$$[c_{n+1}, d_{n+1}]\subset[c_n, d_n], n=1, 2, \cdots$$

由条件（2）知，当$n\to\infty$时，$d(D_n)=\sqrt{(b_n-a_n)^2+(d_n-c_n)^2}\to 0$，则当$n\to\infty$时，有$b_n-a_n\to 0$，$d_n-c_n\to 0$。根据闭区间套定理，分别存在唯一一个数$\alpha\in[a_n, b_n]$与$\beta\in[c_n, d_n]$($n=1, 2, \cdots$)。由于$a_n\leqslant\alpha\leqslant b_n$，$c_n\leqslant\beta\leqslant d_n$，所以点$P(\alpha, \beta)\in D_n$ ($n=1, 2, \cdots$)。

下面再证点$P(\alpha, \beta)$是唯一的。假设还有一点$P'\neq P$，也有$P'\in D_n$($n=1, 2, \cdots$)。设$\rho(P, P')=r>0$，由于P'和P同属于D_n，有$r\leqslant d(D_n)$ ($n=1, 2, \cdots$)。于是

$$\lim_{n\to\infty} d(D_n)\geqslant r$$

这与条件（2）矛盾。从而点P是唯一的。

同闭区间套定理一样，定理中区域为闭的条件是不可缺少的。例如，开矩形域列 □

$$D_n=\left\{(x,y)\mid 0<x<\frac{1}{n}, 0<y<\frac{1}{n}\right\}(n=1, 2, \cdots)$$

显然，满足定理的两个条件：

（1）$D_{n+1}\subset D_n$ ($n=1, 2, \cdots$)；

（2）$d(D_n)=\dfrac{\sqrt{2}}{n}\to 0$ ($n\to\infty$)。

但没有一个点属于所有的矩形域D_n。

定理15.2 （聚点原理） 如果E是有界的无限点集，则点集E至少有一个聚点。

分析 首先由已知条件作一列闭矩形套。由闭矩形套定理，"套"出一个点P（E的聚点），然后再证明点P就是E的聚点。

证明 因为点集E是有界的，所以存在一个闭正方形域D，使$E\subset D$。我们通过D的中心，把D分成四个相等的闭正

方形，则在这四个闭正方形中，至少有一个闭正方形含有E的无限个点，否则E只有有限个点，与已知条件矛盾。用D_1表示这个闭正方形。显然，D_1的直径为 $d(D_1)=\frac{1}{2}d(D)$。 用同样的方法，把D_1分成四个相等的闭正方形，其中至少有一个闭正方形含有E的无限个点，用D_2表示这个闭正方形，这时 $d(D_2)=\frac{1}{2^2}d(D)$。这样的作法无限继续下去，就得一闭正方形列

$$D_1,\ D_2,\ \cdots,\ D_n,\ \cdots$$

其中每一个闭正方形都含有E的无限多个点，且满足条件：

（1）$D_{n+1}\subset D_n$，$n=1,\ 2,\ \cdots$

（2）$d(D_n)=\frac{1}{2^n}d(D)\to 0\ (n\to\infty)$

根据闭矩形套定理，存在唯一一点 $P\in D_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$。

下面证明点P就是点集E的聚点。对任意给定的$\delta>0$，作点P的δ邻域$U(P,\ \delta)$。因为当 $n\to\infty$时，$d(D_n)\to 0$。所以对$\delta>0$，存在N，当$n>N$时，有$d(D_n)<\delta$，又由于$P\in D_n$，因此当$n>N$时，$D_n\subset U(P,\delta)$。于是$U(P,\ \delta)$含有E的无限多个点，即点P是点集E的聚点。 □

下面我们给出常用的聚点原理的等价命题。

定理15.3 如果$\{P_n\}$是有界点列，则在$\{P_n\}$中存在收敛子列$\{P_{n_k}\}$。

证明 我们分两种情况证明。如果点列$\{P_n\}$中有无限多个相同的点，设

$$P_{n_1}=P_{n_2}=\cdots=P_{n_k}=\cdots(n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots)$$

则$\{P_{n_k}\}$就是点列$\{P_n\}$的一个收敛子列。

如果在$\{P_n\}$中没有无限多个相同的点，这时点列$\{P_n\}$的所有的点构成的点集E必是有界无限点集。于是根据聚点原理，点集E至少存在一个聚点P。作点P的$\frac{1}{n}$邻域$U\left(P,\frac{1}{n}\right)$，

$n=1, 2, \cdots$，由聚点的定义知，每个邻域$U\left(P, \frac{1}{n}\right)$都含有$E$的无限多个点，即含有点列$\{P_n\}$ 的无限多个点。

在$U(P, 1)$ 中任取一点为P_{n_1}。

在$U\left(P, \frac{1}{2}\right)$中任取一点$P_{n_2}$，使$n_1<n_2$。

在$U\left(P, \frac{1}{3}\right)$中任取一点$P_{n_3}$，使$n_2<n_3$。

……

在$U\left(P, \frac{1}{k}\right)$中任取一点$P_{n_k}$，使$n_{k-1}<n_k$。

……

从而得到点列$\{P_n\}$的一子例

$$P_{n_1}, P_{n_2}, \cdots, P_{n_k}, \cdots \ (n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots)$$

根据我们的取法，$\rho(P, P_{n_k})<\frac{1}{k}$。于是当 $k\to\infty$时，$\rho(P, P_{n_k})\to 0$，即子列$\{P_{n_k}\}$收敛于点P。 □

§15.2 多元函数概念

在给出多元函数概念之前，我们简单回顾一下一元函数的概念。如果E是R的非空子集，对E内每一个数x，按着某种对应规律f，都有唯一确定的数y相对应，则称y为x 的函数。这里对应规律f是函数概念的核心。数集E是函数的定义域。我们所说的函数是单值函数。多元函数概念同一元函数概念没有本质的区别。所不同的是，多元函数的自变量的个数为二个或更多个。

下面给出二元函数的定义。

定义 如果D是数平面上的非空点集，对D内的每一个点(x, y)，按着某种对应规律f。都有唯一确定的数z 相对应，

则称z为点(x, y)的函数或称z为x，y的二元函数，记作

$$z=f(x, y)$$

这时x，y叫做自变量，z叫做因变量，点集D叫做定义域。

例1　由物理学知道，物体运动时的动能W和它的质量m及速度v之间的关系是

$$W=\frac{1}{2}mv^2$$

当m，v取定一组正数时，由上面的公式，总有唯一一个数W相对应。按二元函数的定义，W是m，v的一个二元函数，这个函数的定义域是

$$m>0, \quad v>0$$

例2　由实验知道，密封的一克分子的理想气体，其容积V，压强P，绝对温度T之间的关系是

$$PV=RT \quad (R\text{是比例常数})$$

这个方程反映了P，V，T之间的依赖关系。至于选取那两个变量作为自变量，完全依赖所讨论的问题来决定。例如，讨论压强P对容积V和温度T的依赖关系，我们就把V，T看作自变量，这时P就是V，T的二元函数：

$$P=R\frac{T}{V}$$

这个函数的定义域是

$$V>0, \quad T>T_0$$

其中T_0是气体最低液化点。

例3　设

$$z=f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{当 } x^2+y^2\neq 0\\ 0, & \text{当 } x^2+y^2=0\end{cases}$$

对数平面上的任意点(x, y)，若$x^2+y^2\neq 0$，则对应数$z=x^2y/(x^2+y^2)$；若$x^2+y^2=0$，则对应$z=0$根据函数的定义，z是点(x, y)的函数，定义域是全平面。

一元函数的定义域比较简单，都是R的子集，而二元函数的定义域是数平面上的子集，比起R的子集要复杂得多。

例4 求函数

$$z=\arccos\frac{x}{2}+\arcsin\frac{y}{2}$$

的定义域。

解 要使反正弦和反余弦函数有意义，必须同时有$\left|\frac{x}{2}\right|\leqslant 1$与$\left|\frac{y}{2}\right|\leqslant 1$，即$|x|\leqslant 2$与$|y|\leqslant 2$。于是，它的定义域是闭矩形：

$$D=\{(x,\ y)\mid -2\leqslant x\leqslant 2,\ \ -2\leqslant y\leqslant 2\}$$

例5 求函数

$$z=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}\ \ (x^2+y^2)}$$

的定义域。

解 要使根式和分式有意义，必须同时有

$$1-x^2-y^2>0 \text{ 与 } x^2+y^2\neq 0$$

从而得$0<x^2+y^2<1$。于是，它的定义域是单位圆，并去掉圆心（原点）和圆周上所有点，即

$$D=\{(x,\ y)\mid 0<x^2+y^2<1\}$$

例6 求函数

$$z=\ln(x+y-1)+\frac{1}{\sqrt{2-x-y}}$$

的定义域，并画图。

解 这个函数是由两个函数$\ln(x+y-1)$与$\frac{1}{\sqrt{2-x-y}}$之和所构成。为使前一个函数有意义，它的定义域是

$$D_1=\{(x,\ y)\mid x+y>1\}$$

为使后一个函数有意义，它的定义域是

$$D_2=\{(x,\ y)\mid x+y<2\}$$

于是，函数z 的定义域D是D_1与D_2的公共部分，即

$$D=D_1\cap D_2=\{(x,\ y)|\ 1<x+y<2\}$$

定义域D的图象是数平面上两条直线$x+y=1$与$x+y=2$之间带形开区域（如图15.6）。

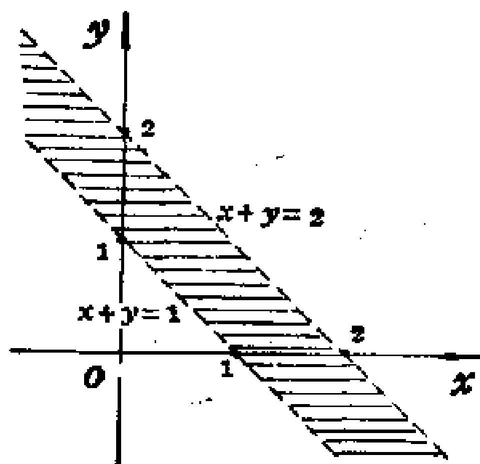


图15.6

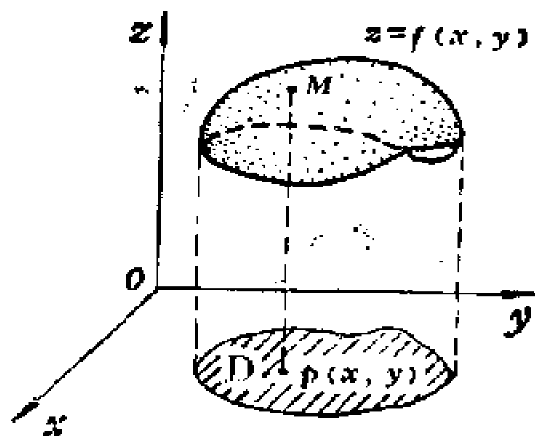


图15.7

最后我们讨论二元函数的图象．设有二元函数$z=f(x,y)$．先建立空间直角坐标系，在$x\ y$ 平面上画出函数的定义域D，在D上任取一点$P(x,\ y)$，则有唯一一个数 $z=f\ (x,\ y)$ 相对应，从而在空间中有一点 $M[x,\ y,\ f(x,\ y)]$（如图15.7）．

定义 设函数$z=f(x,\ y)$在D上有定义．空间点集

$$S=\{(x,\ y,\ z)|\ z=f(x,\ y),\ (x,\ y)\in D\}$$

称为函数$z=f(x,\ y)$的**图象**．

例 7 描绘函数$z=1-x-y$的图象．

解 这个函数的定义域是整个数平面．由解析几何知道，$z=1-x-y$是空间中的平面．如何确定它的位置呢？ 我们知道，空间中不同的三点可确定一个平面．易见这个平面在三个坐标轴上的截距都是１．于是，这个函数的图象是过三点(1, 0,0),(0,1,0),(0,0,1)的平面（图15.8）．

例 8 描绘函数$z=x^2+y^2$的图象．

解 这个函数的定义域也是整个数平面．对于定义域上的任意点$(x,\ y)$，有$z\geqslant0$，所以它的图象在xy平面上方．用yz平面

（即$x=0$）截它，其截线为抛物线$z=y^2$；用xz 平面（即 $y=0$）截它，其截线为抛物线 $z=x^2$. 并且容易看出图象对两个坐标面 xz 面和 yz 面是对称的. 由此不难确定它的图象是顶点在原点，以z 轴为旋转轴，开口朝上的旋转抛物面（图15.9）.

今后我们遇到的二元函数的图象多数是空间曲面.

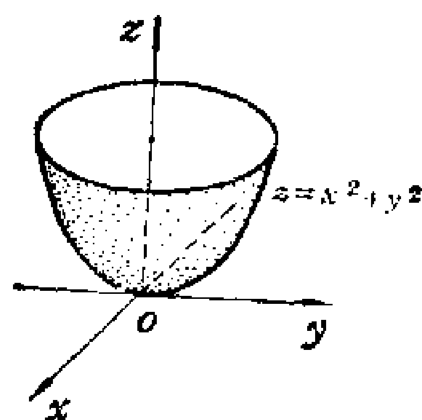


图15.8

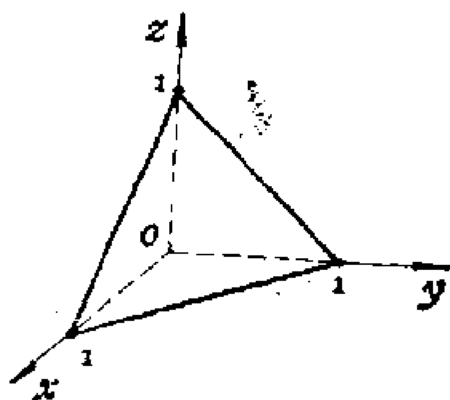


图15.9

§15.3 二元函数的极限

我们在一元函数微积分和级数中已经看到，所有重要概念都是建立在极限的基础之上的. 同样，多元函数的极限也是讨论多元函数微积分的一种工具. 下面我们把一元函数的极限概念推广到二元函数上来.

定义 如果函数 $f(x, y)$ 在点$P_0(x_0, y_0)$的某邻域有定义（在点P_0 可以无定义），对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$,对邻域内任意点$P(x, y)$，当$0<\rho(P, P_0)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，有

$$|f(x, y)-A|<\varepsilon$$

则称数A为函数 $f(x, y)$在点$P_0(x_0, y_0)$的极限，记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=A \text{或} \lim_{P\to P_0} f(P)=A$$

从定义中容易看出，所谓函数 $f(x, y)$在点$P_0(x_0, y_0)$ 以A为极限，就是任意给定的$\varepsilon>0$，存在点P_0的δ 邻域$U(P_0, \delta)$，在这个邻域内的任意点P(P_0除外) 的函数值 $f(P)$与A 的差的绝对值都小于 ε。

在二元函数极限定义中，将点P_0的圆形邻域换成点P_0的方形邻域亦可，叙述为：

对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$，且 $(x, y)\neq(x_0, y_0)$时，有

$$|f(x, y)-A|<\varepsilon$$

象一元函数时一样，二元函数 $f(x, y)$也有当点 $P(x, y)$趋于无穷时的极限。

定义 如果对任意给定的$\varepsilon>0$，存在正数 k，当 $|x|>k$，$|y|>k$时，有

$$|f(x, y)-A|<\varepsilon$$

则称A为 $f(x, y)$在当点$P(x, y)\to\infty$时的极限，记作

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} f(x, y)=A \text{ 或 } \lim_{P\to\infty} f(P)=A$$

一元函数极限的一些简单性质，四则动算法则，复合函数的极限等，对二元函数仍然成立，在这里我们不再重述。

例 1 证明，极限

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

证法一 用方形邻域来证明. 因为对任意 (x, y)，有 $\sqrt{x^2+y^2}\geqslant\sqrt{x^2}=|x|$，从而

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|=\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant\frac{|xy|}{|x|}=|y|$$

于是，对任意给定的$\varepsilon>0$，取$\delta=\varepsilon$，当$|x-0|<\delta$，$|y-0|<\delta$，$(x, y)\neq(0, 0)$时，有

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|\leqslant|y|<\varepsilon$$

证法二 用圆形邻域来证明．先把点(x, y)表为极坐标，即

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

则$(x, y)\to(0, 0)$等价于 $r\to 0$ $(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$．从而

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| = |r\sin\theta\cos\theta| \leqslant r$$

可是，对任意给定的$\varepsilon>0$，取$\delta=\varepsilon$，当

$0<\rho=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}=r<\delta$时，有

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| \leqslant r<\varepsilon$$

例2 证明，极限

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}}\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}=0$$

证明 因为$(x^2-y^2)^2=x^4-2x^2y^2+y^4\geqslant 0$，即$x^4+y^4\geqslant 2x^2y^2$，所以

$$\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}\leqslant\frac{x^2+y^2}{2x^2y^2}=\frac{1}{2y^2}+\frac{1}{2x^2}$$

令$\dfrac{1}{y^2}<\varepsilon$，$\dfrac{1}{x^2}<\varepsilon$，得$|y|>\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$，$|x|>\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$．于是，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在正数$K=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$，当$|x|>K$，$|y|>K$时，有

$$\left|\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}-0\right|\leqslant\frac{1}{2y^2}+\frac{1}{2x^2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

一元函数可以看作是二元函数的特殊情况．若一元函数$g(x)$在点x_0存在极限，即

$$\lim_{x\to x_0}g(x)=A$$

则把函数$g(x)$看作二元函数时，在点(x_0, y_0)也存在极限．且

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}}g(x)=A$$

例 3　求极限

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$$

解　因为

$$(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=\frac{x^2}{e^{x+y}}+\frac{y^2}{e^{x+y}}=\frac{x^2}{e^x}\cdot\frac{1}{e^y}+\frac{y^2}{e^y}\cdot\frac{1}{e^x}$$

所以根据一元函数的极限及极限的四则运算法则

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\frac{x^2}{e^x}\cdot\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\frac{1}{e^y}+\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\frac{y^2}{e^y}\cdot$$

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\frac{1}{e^x}=0$$

从二元函数极限定义看到，极限

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=A$$

与点P趋于点P_0的方式和路线无关。在平面上，$P\to P_0$的路线是无穷多的并且当$P\to P_0$时，不论沿着哪条路线，$f(P)$的极限都必然是A。因此，如果点$P\to P_0$沿两条不同的路线，$f(P)$有不同极限，则$f(P)$在点P_0不存在极限。这是判别二元函数$f(P)$在点P_0不存在极限的一个简便方法。

例 4　证明，函数

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$$

在点(0,0)不存在极限。

证明　我们令点(x,y)沿直线$y=kx$趋于(0,0)。显然，这时$(x,y)=(x,kx)\to(0,0)$等价于$x\to0$。于是

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to0\\y=kx}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

从而，k取不同的值，即沿通过点(0.0)的不同直线，当$(x,y)\to(0,0)$时，极限不相等。例如，当$k=1$和$k=2$时，其极限分别等于$\frac{1}{2}$和$\frac{2}{5}$。于是，$f(x,y)$在点(0,0)不存在极限。

上面我们所讨论的二元函数 $f(x, y)$在点$P_0(x_0, y_0)$ 的极限，称为二重极限。下面我们讨论让x 与 y依次分别趋于x_0与y_0 的极限。

定义 设函数 $f(x, y)$在点$P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域内有定义（点P_0可除外），如果对任意固定的y，当$x \to x_0$时，$f(x, y)$的极限存在，其极限是 y的函数，设

$$\lim_{x \to x_0} f(x, y) = \varphi(y)$$

当 $y \to y_0$时，$\varphi(y)$的极限也存在，设

$$\lim_{y \to y_0} \varphi(y) = A$$

即

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = A$$

则称数A为函数 $f(x, y)$在点 $P_0(x_0, y_0)$，先对 x 后对 y的累次极限。

类似地可以定义B为 $f(x, y)$在点$P_0(x_0, y_0)$，先对 y后对 x 的累次极限

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y) = B$$

注意，一个二元函数两个不同顺序的累次极限可能不相等。

例 5 函数

$$f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$$

在点(0, 0)两个累次极限都存在，但不相等。

解 对任意固定的 $y \neq 0$，有

$$\lim_{x \to 0} \frac{x-y}{x+y} = \frac{-y}{y} = -1$$

于是，

$$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} \frac{x-y}{x+y} = -1$$

对任意固定的$x \neq 0$，有

$$\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}=\frac{x}{x}=1$$

于是，

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}=1$$

这例子说明，累次极限不能轻易交换极限顺序，否则就会得出错误的结果。

下面讨论二重极限与累次极限的关系。

例 6　函数

$$f(x,\ y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

在点(0,0) 两个累次极限都存在，且相等，但是二重极限不存在。

解　对任意固定 $y\neq 0$ ，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\frac{0}{y^2}=0$$

于是，

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=0$$

完全类似地也有

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=0$$

即两个累次极限存在，且相等。

沿直线 $y=0$ $(x\neq 0)$，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4}=1$$

沿直线 $y=x$ $(x\neq 0)$，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2}=0$$

即二重极限不存在。

例 7 函数

$$f(x, y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

在点(0,0)两个累次极限都不存在，但是二重极限存在。

解 对任意固定 $y\neq 0$，有

$$(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}=x\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

当$x\to 0$时，$x\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\to 0$，而$y\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$不存在。于是极限

$$\lim_{x\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

不存在，从而累次极限

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

也不存在。

同理可证，累次极限

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

也不存在。

二重极限却存在。事实上，当$(x, y)\neq(0, 0)$时，有

$$\left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}-0\right|\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|$$

于是，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta=\varepsilon$，当$|x-0|<\delta$，$|y-0|<\delta$，$(x, y)\neq(0, 0)$时，有

$$\left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}-0\right|\leqslant|x|+|y|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$$

通过上述例子自然会提出，在什么条件下二重极限和累次极限都存在，且相等呢？于是有下述定理：

定理15.4 如果函数 $f(x, y)$在点 (x_0, y_0)二重极限

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)$$

存在，而且累次极限

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,\ y)$$

也存在，则它们的极限必相等，即

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,\ y)=\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,\ y)$$

证明 设

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,\ y)=A$$

即对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$，$(x,\ y)\neq(x_0,\ y_0)$，有

$$|f(x,\ y)-A|<\varepsilon \qquad (1)$$

由已知条件，对任意满足不等式 $0<|y-y_0|<\delta$ 的 y，极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,\ y)$存在，设

$$\lim_{x\to x_0} f(x,\ y)=\varphi(y)$$

由不等式（1），当$x\to x_0$ 时，有

$$|\varphi(y)-A|\leqslant\varepsilon$$

于是，对任意给定$\varepsilon>0$，存在δ，当$0<|y-y_0|<\delta$时，有

$$|\varphi(y)-A|\leqslant\varepsilon$$

即

$$\lim_{y\to y_0}\varphi(y)=A$$

或

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,\ y)=A$$

或

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,\ y)=\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,\ y)=A$$

□

将定理中的条件改为另一个累次极限

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,\ y)$$

存在，也有同样的结论。

由这个定理我们可得到如下二重极限与累次极限的关系：

1. 如果二重极限与两个累次极限都存在，则其极限必相

等，此时，可交换极限次序，即

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,\ y)=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,\ y)$$

2. 如果两个累次极限都存在，但不相等，则二重极限不存在。我们常常用它来证明二重极限不存在。

§15.4 二元函数的连续性

一 连续函数的概念

我们在一元微积分中主要是讨论一元连续函数，同样在多元微积分中也主要是讨论多元连续函数。

定义 设函数 $f(x,\ y)$ 在点 $P_0(x_0,\ y_0)$ 的某邻域内有定义，如果 $f(x,y)$在点P_0存在极限，且等于该点的函数值$f(x_0,\ y_0)$，即

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,\ y)=f(x_0,\ y_0) \tag{1}$$

则称函数 $f(x,\ y)$在点P_0**连续**，或者说点P_0是函数 $f(x,\ y)$的**连续点**。

函数 $f(x,\ y)$在点$P_0(x_0,\ y_0)$连续，用"$\varepsilon—\delta$" 语言叙述就是：对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当点$P(x,y)$满足$\rho(P,P_0)<\delta$ 时，有

$$|f(x,\ y)-f(x_0,\ y_0)|<\varepsilon$$

由连续定义不难看出，$f(x,\ y)$在点$P_0(x_0,\ y_0)$ 连续必须满足三条：

1. 函数 $f(x,\ y)$在点P_0有定义；
2. 函数 $f(x,\ y)$在点P_0存在极限；
3. 函数 $f(x,\ y)$在点P_0的极限等于 $f(x_0,\ y_0)$。

其中有一条不成立，则称函数 $f(x,\ y)$在点P_0**不连续（间断）**或称点P_0是 $f(x,\ y)$的**不连续（间断）点**。

例1 证明，函数

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & 当x^2+y^2\neq 0\\ 0, & 当x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点(0,0)连续。

证明 当$(x, y)\neq(0, 0)$时，有

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|=\left|\frac{2xy}{x^2+y^2}\right|\cdot\frac{|x|}{2}\leqslant\frac{|x|}{2}$$

从而，当$(x, y)\to(0, 0)$时，有

$$\frac{x^2y}{x^2+y^2}\to 0$$

即

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)=f(0, 0)=0$$

于是，由连续的定义，所给函数在点(0,0)连续。

例2 讨论函数

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & 当\ x^2+y^2\neq 0\\ 0, & 当\ x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点(0,0)处的连续性。

解 由上节例4知，这个函数在点(0,0)不存在极限，所以$f(x,y)$在点(0,0)不连续。

同一元函数在区间上的连续一样，有二元函数在平面区域上连续的定义。

定义 如果函数$f(x, y)$在区域D上的每一点都连续，则称$f(x, y)$在区域D上连续。

如果点$(x_0, y_0)\in D$，且为区域D的界点，则函数$f(x,y)$在点(x_0, y_0)的连续性，同样由极限（1）来确定，此时点$(x, y)\in D$。

关于一元连续函数的四则运算法则，对于二元函数也有类似的结果，其证明方法也相同，在这里不再重述。

下面我们给出二元复合函数的连续性定理.

定理15.5 设 $z=f(u,\ v)$，$u=\varphi(x,\ y)$，$v=\psi(x,\ y)$. 如果函数$\varphi(x,\ y)$，$\psi(x,\ y)$在点 $P(x_0,\ y_0)$的某邻域有定义，且在点 $P(x_0,\ y_0)$连续；函数 $f(u,\ v)$在点$(u_0,\ v_0)=[\varphi(x_0,\ y_0),\ \psi(x_0,\ y_0)]$的某邻域内有定义，且在点 $(u_0,\ v_0)$ 连续，则复合函数 $f[\varphi(x,\ y),\ \psi(x,\ y)]$在点 $P(x_0,\ y_0)$连续.

证明 因为 $f(u,\ v)$在点(u_0,v_0)连续，所以对任意给定的$\varepsilon>0$,存在$\eta>0$,当 $|u-u_0|<\eta$, $|v-v_0|<\eta$时，有

$$|f(u,\ v)-f(u_0,\ v_0)|<\varepsilon$$

因为$u=\varphi(x,\ y)$和 $v=\psi(x,\ y)$在点$P(x_0,\ y_0)$连续，所以对上述$\eta>0$，存在公共$\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$, $|y-y_0|<\delta$ 时，有

$$|u-u_0|=|\varphi(x,\ y)-\varphi(x_0,\ y_0)|<\eta$$

与

$$|v-v_0|=|\psi(x,\ y)-\psi(x_0,\ y_0)|<\eta$$

于是，当 $|x-x_0|<\delta$, $|y-y_0|<\delta$时，有

$$|f[\varphi(x,\ y),\ \psi(x,\ y)]-f[\varphi(x_0,\ y_0),\ \psi(x_0,\ y_0)]|$$
$$=|f(u,\ v)-f(u_0,\ v_0)|<\varepsilon$$

这就证明了复合函数 $f[\varphi(x,\ y),\ \psi(x,\ y)]$在点 $P(x_0,\ y_0)$连续. □

有了二元连续函数的四则运算法则、复合函数的连续性及基本初等函数的连续性，可得到二元初等函数在其定义域上都是连续的.

二 连续函数的性质

同一元函数的情形一样，定义在有界闭区域上的二元连续函数也有同样的性质.

定理15.6 （有界性）如果函数 $f(x,\ y)$在有界闭区域D上连续，则 $f(x,\ y)$在D上有界.

这个定理象一元函数的情形一样，可以用平面有限覆盖定理证明. 这里作为聚点原理的应用，用定理15.3来证明.

证明 反证法. 假设 $f(x,\ y)$在区域D上无界. 由无界的

定义，对任意正数M，在D上至少存在某一点(x_M, y_M)，使

$$|f(x_M, y_M)| > M$$

对M我们依次取自然数$M=1, 2, \cdots, n, \cdots$。在$D$上相应地存在点$P_n(x_n, y_n)$ $(n=1, 2, \cdots)$，使

$$|f(P_n)| = |f(x_n, y_n)| > n \quad (n=1, 2, \cdots) \quad (2)$$

于是，我们得到一个全部含于有界闭区域D内的点列$\{P_n(x_n, y_n)\}$。根据定理15.3，有界点列$\{P_n\}$必存在收敛子列$\{P_{n_k}(x_{n_k}, y_{n_k})\}$，设

$$\lim_{k\to\infty} P_{n_k}(x_{n_k}, y_{n_k}) = P(x_0, y_0)$$

因为D是闭区域，所以$P(x_0, y_0)\in D$。

一方面，根据（2）式知

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}, y_{n_k}) = \infty$$

另一方面，因为$f(x, y)$在D上连续，当然也在点$P(x_0, y_0)$连续，所以根据归结原则和连续定义，有

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}, y_{n_k}) = f(x_0, y_0)$$

从而得到了矛盾。 □

定理15.7 （介值性）如果函数$f(x, y)$在区域D上连续，$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$为D中任意两点，且$f(x_1, y_1)\neq f(x_2, y_2)$，则介于$f(x_1, y_1)$与$f(x_2, y_2)$之间的任意数$r$，在$D$中至少存在一点$P(x_0, y_0)$，使

$$f(x_0, y_0) = r$$

证明 我们把它化为一元函数的情形，应用一元函数的介值性定理证明。

根据区域D的连通性，在D内作连结两点$P_1(x_1, y_1)$与$P_2(x_2, y_2)$的一条连续曲线l（如图15.10）。设曲线l的参数方程为

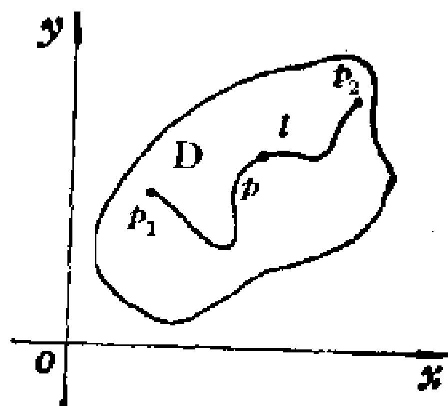


图15.10

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta) \qquad (1)$$

其中参数$t=\alpha$，对应于点(x_1, y_1)，即$(x_1, y_1)=[x(\alpha), y(\alpha)]$；而参数$t=\beta$，对应于点$(x_2, y_2)$，即 $(x_2, y_2)=[x(\beta), y(\beta)]$。把关系式（1）代入$f(x, y)$，得

$$F(t)=f[x(t), y(t)]$$

由于$f(x, y)$连续，$x=x(t)$，$y=y(t)$又是 t 的连续函数，所以根据复合函数的连续性，$F(t)$是$[\alpha, \beta]$ 上的连续函数，而且数r 是介于$F(\alpha)$与$F(\beta)$之间。于是，根据一元函数的介值性定理，在区间$[\alpha, \beta]$上至少存在一点t_0，使

$$F(t_0)=r$$

设 $x(t_0)=x_0$，$y(t_0)=y_0$，那么点$P(x_0, y_0)\in D$（因为这个点在曲线 l 上），从而

$$F(t_0)=f[x(t_0), y(t_0)]=f(x_0, y_0)=r$$

即 $\qquad f(x_0, y_0)=r, \; P(x_0, y_0)\in D$ □

定理15.8 （最值性）如果函数 $f(x, y)$在有界闭区域D上连续，则 $f(x, y)$在D上能取到最大值和最小值，即在D上至少存在两点$P_1(x_1, x_2)$和 $P_2(x_2, y_2)$，使

$$f(x_1, y_1)\leqslant f(x, y)\leqslant f(x_2, y_2), \; (x, y)\in D$$

这个定理的证明，请读者仿照一元函数的情形自己完成。

最后我们讨论一致连续性。

定义 设函数 $f(x, y)$在区域D①上有定义，如果对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，对D上的任意两点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，当$\rho(P_1, P_2)<\delta$时，有

$$|f(x_1, y_1)-f(x_2, y_2)|<\varepsilon$$

则称函数 $f(x, y)$在区域D上一致连续。

由一致连续定义立即可推出一致连续的函数必连续；反之连续函数未必是一致连续函数。例如，函数 $f(x, y)=\sin xy$

①D可以是任意区域。

在平面上是连续的，但是非一致连续（参看指导）。下面证明，函数在有界闭区域上连续与一致连续是等价的。

定理15.9 （一致连续性定理）如果函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $f(x, y)$ 在 D 上一致连续。

证明 反证法。假设函数 $f(x, y)$ 在 D 上非一致连续，即存在某 $\varepsilon_0>0$，对任意的 $\delta>0$，在 D 上至少存在某两点 P，Q，当 $\rho(P, Q)<\delta$，有

$$|f(P)-f(Q)|\geqslant\varepsilon_0$$

于是，我们依次取 $\delta=1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$，就相应地得到两个点列 P_n，$Q_n\in D$ $(n=1, 2, \cdots)$，使

$$\rho(P_n, Q_n)<\frac{1}{n}, \quad |f(P_n)-f(Q_n)|\geqslant\varepsilon_0, n=1, 2, \cdots \tag{1}$$

由于 D 是有界闭区域，所以点列 $\{P_n\}$ 是有界的，根据定理15.3，点列 $\{P_n\}$ 存在收敛子列 $\{P_{n_k}\}$。设

$$\lim_{k\to\infty}P_{n_k}=P_0 \tag{2}$$

因为 D 是闭区域，所以 $P_0\in D$。

下面再证 $\{P_{n_k}\}$ 所对应的点列 $\{Q_{n_k}\}$ 也收敛于 P_0。根据我们的取法，有

$$\rho(P_{n_k}, Q_{n_k})<\frac{1}{n_k} \tag{3}$$

当 $k\to\infty$ 时，$n_k\to\infty$，于是 $\rho(P_{n_k}, Q_{n_k})\to0$。又由于

$$\rho(Q_{n_k}, P_0)\leqslant\rho(Q_{n_k}, P_{n_k})+\rho(P_{n_k}, P_0)$$

当 $k\to\infty$ 时，$\rho(P_{n_k}, P_0)\to0$ 及 $\rho(P_{n_k}, Q_{n_k})\to0$，有

$$\lim_{k\to\infty}Q_{n_k}=P_0$$

再由于 $f(x, y)$ 在 D 上连续，当然在点 P_0 连续，根据连续的定义，对 $\frac{\varepsilon_0}{2}$，存在 $\delta>0$，即存在点 P_0 的 δ 邻域 $U(P_0, \delta)$，当

$r(x, y)\in U(P_0, \delta)$时，有

$$|f(P)-f(P_0)|<\frac{\varepsilon_0}{2} \tag{4}$$

又因为当$k\to\infty$时，$P_{n_k}\to P_0, Q_{n_k}\to P_0$. 于是，当$k$ 充分大时，P_{n_k}和Q_{n_k}都包含在邻域$U(P_0, \delta)$之内，从而由（4）式有

$$|f(P_{n_k})-f(P_0)|<\frac{\varepsilon_0}{2},\ |f(Q_{n_k})-f(P_0)|<\frac{\varepsilon_0}{2}$$

于是，

$$|f(P_{n_k})-f(Q_{n_k})|\leqslant|f(P_{n_k})-f(P_0)|+|f(Q_{n_k})-f(P_0)|$$
$$<\varepsilon_0$$

这与（1）式矛盾. □

学 习 指 导

一 内容概要

1 重点及要求

本章的重点是二元函数的极限与连续. 关于平面点集，要求掌握几个概念以及弄清它们之间的关系. 关于二维连续统，要掌握定理15.2和定理15.3，尤其要掌握应用定理15.3证明问题的思想方法. 关于二元函数极限，要求会用定义证明一些简单函数的极限，了解与一元函数极限的区别，并弄清二重极限与累次极限的关系. 关于二元函数的连续性，同一元函数的连续性完全一样，要对照起来学习。

2 内容概要

由于二元函数是在平面点集上讨论，所以引入了平面点集的一些概念. 我们是从平面上两点之间的距离出发，首先引入了点的邻域概念，而后用邻域定义了点集的内点、聚点和界点，进而给出了开区域与闭区域.

平行于实数的连续性定理，在平面点集上也可以建立某些

相应的定理。我们只给出闭矩形套定理和聚点原理。

二元函数的极限定义给了两种等价形式，一个是圆形邻域，一个是方形邻域。证明极限问题，哪种方便就使用哪一种。

在方形邻域的极限定义中，“$|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$，$(x, y)\neq(x_0, y_0)$”不能改写成“$0<|x-x_0|<\delta$，$0<|y-y_0|<\delta$”。这是因为$0<|x-x_0|$，$0<|y-y_0|$不仅$(x, y)\neq(x_0, y_0)$，而且点(x, y)也不能在通过点(x_0, y_0)的两条直线$x=x_0$与$y=y_0$上。这与二元函数$f(x, y)$在点(x_0, y_0)的极限与点(x_0, y_0)无关是不一致的。

在一元函数$f(x)$在点x_0的极限定义中，$x\to x_0$方式只有x_0的左方或右方，因此有左、右极限。函数$f(x)$在点x_0存在极限的必要充分条件是左、右极限存在且相等。但二元函数$f(x, y)$在点$P(x_0, y_0)$的极限定义，在平面上点$P(x, y)$可以沿任意路线和任意方式趋于点$P(x_0, y_0)$。因此在计算二元函数极限时，不能限制点$P(x, y)$趋于点$P(x_0, y_0)$的方式，只有动点$P(x, y)$沿任意路线和任意方式趋于$P(x_0, y_0)$时，函数$f(x, y)$的极限都存在且相等，才能断定$f(x, y)$在点$P(x_0, y_0)$存在极限。由此可见，二元函数的极限远比一元函数的极限复杂得多。

二元函数的连续、一致连续的概念和连续函数的性质。这些都是一元函数的连续、一致连续的概念和连续函数的性质的推广，没有什么新的内容。只是有界性、一致连续性定理的证明应用的是聚点原理，注意掌握证明的思想方法。

注意：二元函数$f(x, y)$在点$P(x_0, y_0)$连续与$f(x, y)$关于变量x连续或关于变量y连续是有区别的。前者是通常所说的$f(x, y)$在点$P(x_0, y_0)$的连续，而后者是固定一个变量，关于另一个变量的连续，其实就是一元函数的连续。

本章的主要内容及结构关系列表如下：

二元函数 $f(x,y)$

- 平面点集 → 定义域
  - 邻　域 — 内点 聚点 界点 — 开区域 — 闭区域
  - 闭矩形套定理 — 聚点原理
- 极　限
  - 二重 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=A$
  - 累次 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=B$
  - $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$
- 连　续
  - 定义 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,\ y_0)$
  - 有界性
  - 介值性
  - 最值性
  - 一致连续



二　几点说明

1. n维欧几里得空间

我们知道，三个有序数组(x, y, z)可以表示三维空间的一点，但四个有序数组(x_1, x_2, x_3, x_4) 就没有直观的几何图象。为了将讨论二元函数时所使用的几何语言和研究方法推广到n元函数上来。于是，我们就有与二元函数平行的一些概念。

定义　所有n 个有序数组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的集合，称为n维空间，其中每个n 个有序数组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$称为n 维空间的点。x_i称为该点的第i个坐标$(i=1, 2, \cdots, n)$。

定义　设$P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$和$Q(y_1, y_2, \cdots, y_n)$是n 维空间任意两点。非负数

$$\rho(P, Q)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

称为点P与Q之间的距离。

不难证明，这样定义的距离具有下列性质：

(1) $\rho(P, Q)\geqslant 0$；当且仅当点P与Q重合时，有 $\rho(P, Q)=0$。

(2) $\rho(P, Q)=\rho(Q, P)$。

(3) 设P_1, P_2, P_3为n 维空间的任意三点，则有不等式 $\rho(P_1, P_3)\leqslant\rho(P_1, P_2)+\rho(P_2, P_3)$

定义　满足上述三条的n 维空间，称为n 维欧几里得空间，简称n维欧氏空间。显然，数轴和平面都具有这种特性，分别叫做一维欧氏空间和二维欧氏空间。

有了n 维欧氏空间概念，读者不难把二维欧氏空间的一些概念推广到n 维欧氏空间上来。

2. 关于非一致连续

一致连续的反面是非一致连续。为了加深对一致连续概念的理解，讨论非一致连续是很必要的。现将一致连续与非一致

连续列表对比如下：

函数$f(x,y)$在D上一致连续	函数$f(x,y)$在D上非一致连续
对任意$\varepsilon>0$，存在(某个)$\delta>0$，对D上任意两点(x_1, y_1)与(x_2,y_2)，当$\|x_1-x_2\|<\delta$，$\|y_1-y_2\|<\delta$时，有$\|f(x_1, y_1)-f(x_2,y_2)\|<\varepsilon$	存在某个$\varepsilon_0>0$，对任意$\delta>0$，D上总存在某两点(x_1', y_1')与(x_2', y_2')，当$\|x_1'-x_2'\|<\delta$，$\|y_1'-y_2'\|<\delta$时，有$\|f(x_1', y_1')-f(x_2', y_2')\|\geqslant\varepsilon_0$

一般说来，证明非一致连续远比证明一致连续困难得多。主要困难在于，一是如何确定ε_0。主要观察与分析给定函数来确定；

二是如何选取点(x_1', y_1')，(x_2', y_2')。这要从不等式$|f(x_1', y_1')-f(x_2', y_2')|\geqslant\varepsilon_0$选取点$(x_1', y_1')$与$(x_2', y_2')$，并使$|x_1'-x_2'|$与$|y_1'-y_2'|$能够任意小。

下面我们通过例子给予说明。

例 函数$f(x, y)=\sin(xy)$在平面上是连续的，但非一致连续。

解 这是二元初等函数，其定义域是整个平面，所以它在平面上连续。

下面我们证明函数$f(x, y)=\sin(xy)$在平面上非一致连续。由于所给函数是正弦，所以容易想到当xy分别为$n\pi$和$\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$时，函数值差的绝对值是1。可取$\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，$x_n=\sqrt{n\pi}$，$y_n=\sqrt{n\pi}$，$x_n'=\sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}$，$y_n'=\sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}$，

有

$$|x_n-x_n'|=\left|\sqrt{n\pi}-\sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\right|$$

$$=\frac{\pi}{2\left(\sqrt{n\pi}+\sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\right)}\to 0\ (n\to\infty)$$

同理，也有 $|y_n-y_n'|\to 0$ $(n\to\infty)$。于是存在 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，对任意给定的 $\delta>0$，只要 n 为充分大时，所取的点 (x_n, y_n)，(x_n', y_n')，有

$$|x_n-x_n'|<\delta,\quad |y_n-y_n'|<\delta$$

但 $$|f(x_n, y_n)-f(x_n', y_n')|=\left|\sin n\pi-\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right|$$

$$=1>\frac{1}{2}=\varepsilon_0$$

即 $f(x, y)=\sin(xy)$ 在数平面上非一致连续。

3．研究多元函数的方法

研究多元函数基本上有两种方法：第一种方法是每个自变量都同时独立变化，即多重法。例如，多元函数在一点的极限、全微分、重积分等就是使用的这种方法。第二种方法是只要一个自变量变化，其余的自变量都暂时看作常数，即累次法。例如，多元函数的累次极限、偏导数、重积分的单重化等就是使用的这种方法。在一定条件下，有时可将多个自变量表为一元参数方程组，经过变换就将多元函数化成关于一个参数的一元函数，即多元函数的一元化。例如，定理15.7的连续函数介值性定理的证明、多元函数的泰勒公式等就是使用的这种方法。累次法的好处在于，它将多元函数的问题化成了我们熟知的一元函数的问题。

三　例题选讲

例1　判断下列平面点集，那些是区域，并指出它们的聚点和界点。

（1）$E_1=\{(x, y)\,|a\leqslant x<b,\ c\leqslant y<d\}$；

（2）$E_2=\{(x, y)|\ xy\neq 0\}$；

（3）$E_3=\{(x, y)|\ y>x^2\}$。

解　（1）点集 E_1 是区域（如图15.11）。但它既不是开区域，也不是闭区域（因为 AB，AD 上的点不是内点； BC，

CD 上的点不包含在E_1内），边AB，BC，CD，DA上的点及矩形E_1内的点都是聚点，所有边上的点都是E_1的界点。

（2）E_2是数平面上去掉x轴和y轴后的点集，它不是区域，因为不具有连通性（不同象限上的两个点，不能用属于点集E_2的折线连结起来），数平面上的点皆为E_2聚点，x轴和y轴上的点都是E_2的界点。

（3）E_3是抛物线$y=x^2$开口内的点集（如图15.12），它是区域，点集E_3的所有点和曲线$y=x^2$上的点均为E_3的聚点，曲线$y=x^2$上的点为E_3的界点。

例2　证明，点P为点集E的聚点的必要充分条件是，在点P的任意邻域内，至少含有一个点集E中异于点P的点。

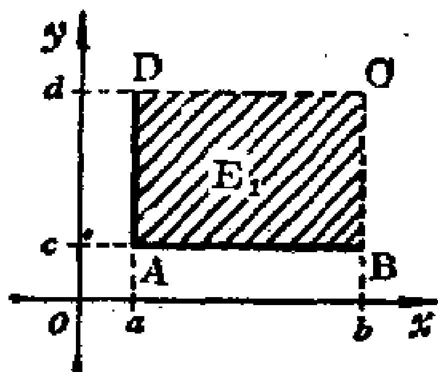


图15.11

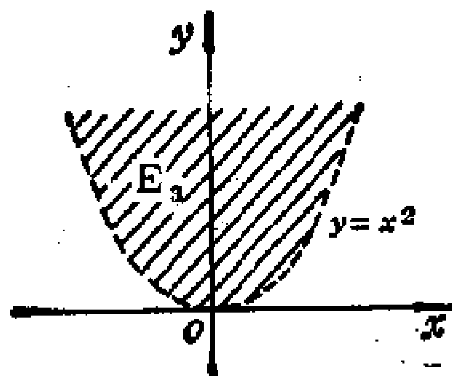


图15.12

基本思路　充分性，只须证明，对点P的任意δ邻域$U(P,\ \delta)$，含有点集E的无限多个点。因为点P的δ邻域$U(P,\ \delta)$内总还含有无限多个点P的邻域，所以邻域$U(P,\ \delta)$内含有无限多个E的点。

证明　充分性　设$U(P,\ \delta)$为点P的任一邻域。由已知条件，在$U(P,\ \delta)$中必有异于点P的点集E的点P_1。取正数$\varepsilon_1<\rho(P,\ P_1)$，则邻域$U(P,\ \varepsilon_1)$中也有异于点$P$的$E$中的点$P_2$，且$P_1\neq P_2$。再取$\varepsilon_2<\rho(P,\ P_2)$，在邻域$U(P,\ \varepsilon_2)$中也有异于点$P$的$E$中的点$P_3$，且$P_2\neq P_3$。这样继续下去，得点集$E$

中的点列$\{P_n\}$，其中所有点$P_n \in U(P, \varepsilon_n)$。由我们的作法，邻域$U(P, \varepsilon_n) \subset U(P, \delta)$，$n=1, 2, \cdots$。于是，邻域$U(P, \delta)$含有点列$\{P_n\}$的所有的点，即$U(P, \delta)$含有点集$E$的无限多个点，即点$P$是点集$E$的聚点。

必要性是显然的。

例3　证明，设P_1，P_2，P_3为n维欧氏空间的任意三点，则有不等式（三角不等式）

$$\rho(P_1, P_3) \leqslant \rho(P_1, P_2) + \rho(P_2, P_3)$$

基本思路　首先借助于二次三项式根的判别式，证明对任意实数a_1，a_2，$\cdots$，a_n和b_1，b_2，$\cdots$，b_n，有不等式

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$$

再令a_i和b_i分别是点P_1与P_2和p_2与P_3的第i个坐标之差，即得所证的结果。

证明　对任意实数a_1，a_2，$\cdots$，a_n和b_1，b_2，$\cdots$，b_n，

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i x + b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(a_i^2 x^2 + 2a_i b_i x + b_i^2)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)x^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n}a_i b_i\right)x + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right) \geqslant 0$$

令　$A=\sum_{i=1}^{n}a_i^2$，$B=2\sum_{i=1}^{n}a_i b_i$，$C=\sum_{i=1}^{n}b_i^2$

上式是x的二次三项式$Ax^2+Bx+C\geqslant 0$。因为二次三项式非负，所以不存在相异实根。于是，它的判别式$B^2-4AC\leqslant 0$，即

$$4\left(\sum_{i=1}^{n}a_i b_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right) \leqslant 0$$

或 $$4\left(\sum_{i=1}^{n}a_i b_i\right)^2 \leqslant 4\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)$$

从而得

$$2\sum_{i=1}^{n}a_i b_i \leqslant 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$$

上面不等式两端都加上$\sum_{i=1}^{n}a_i^2$、$\sum_{i=1}^{n}b_i^2$，得

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}a_i b_i + \sum_{i=1}^{n}b_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}a_i^2$$

$$+ 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2} + \sum_{i=1}^{n}b_i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + a_i)^2 \leqslant \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\right)^2$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$$

设三点P_1，P_2，P_3 的坐标为$P_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$P_2(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，$P_3(z_1, z_2, \cdots, z_n)$。令 $a_i = x_i - y_i$，$b_i = y_i - z_i$。有$a_i + b_i = x_i - z_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$，从而有

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)^2}$$

即 $$\rho(P_1, P_3) \leqslant \rho(P_1, P_2) + \rho(P_2, P_3)$$

例 4 试用不等式叙述极限

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to+\infty}} f(x, y) = A \qquad (1)$$

并证明极限

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ y\to+\infty}}\frac{xy-1}{y+1}=3$$

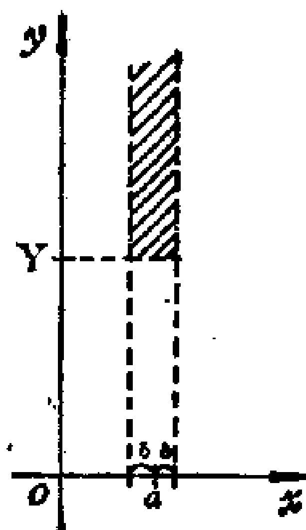


图15.13

解 用不等式叙述极限（1），对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 和 $Y>0$，当 $|x-a|<\delta$, $y>Y$ 时，有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

在数平面上，点集$\{(x,y)|\ |x-a|<\delta,\ y>Y\}$的图象是图15.13中的阴影部分（无限延伸的带形）。

根据这个定义，当$x\to3, y\to+\infty$时，可设 $y>0$，有

$$\left|\frac{xy-1}{y+1}-3\right|=\left|\frac{y(x-3)-4}{y+1}\right|\leqslant\frac{y\,|x-3|}{y+1}$$

$$+\frac{4}{y+1}<|x-3|+\frac{4}{y}$$

令 $$|x-3|<\frac{\varepsilon}{2}\text{与}\frac{4}{y}<\frac{\varepsilon}{2}，\text{即 } y>\frac{8}{\varepsilon}$$

于是，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在 $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$，$Y=\frac{8}{\varepsilon}$，当 $|x-3|<\delta$, $y>Y$时，有

$$\left|\frac{xy-1}{y+1}-3\right|<|x-3|+\frac{4}{y}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

即 $$\lim_{\substack{x\to 3\\ y\to+\infty}}\frac{xy-1}{y+1}=3$$

例5 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2+y^4}$，（2）$\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}(y^2+y^2)^{x^2y^2}$，

（3）$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to0}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

解 （1） 设$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$。其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，$x\to0$与 $y\to0$ 等价于 $r\to0$。因为

$$\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2+y^4}\right|=\left|\frac{r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^2+r^4\sin^4\theta}\right|=r\left|\frac{\cos\theta\sin^2\theta}{1+r^2\sin^4\theta}\right|\leqslant r$$

所以

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy^2}{x^2+y^2+y^4}=\lim_{r\to0}r\left(\frac{\cos\theta\sin^2\theta}{1+r^2\sin^4\theta}\right)=0$$

（2） 设 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，有

$$(x^2+y^2)^{x^2y^2}=e^{x^2y^2\ln(x^2+y^2)}=e^{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta\ln r^2}$$

因为$\cos^2\theta\mathrm{Sin}^2\theta$是有界量，而当$r\to0$时，$r^4\ln r^2\to0$，所以

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}=\lim_{r\to0}e^{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta\ln r^2}=e^0=1$$

（3）$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{x}{x+y}}$$

因为

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to0}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,\quad \lim_{\substack{x\to\infty\\y\to0}}\frac{x}{x+y}=1$$

所以

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to0}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=e$$

例6 证明，$\lim\limits_{p\to p_0}f(P)=A$的必要充分条件是：对任意以点$P_0$为极限的点列$\{P_n\}$（$P_n\neq P_0$），所对应的函数值数列$\{f(P_n)\}$都收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}f(P_n)=A$。

基本思路 这是二元函数极限与平面点列极限之间的归结原则，其证法与一元函数的归结原则证法相同。

证明 **必要性** 因为$\lim\limits_{p\to p_0}f(P)=A$，所以对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$0<\rho(P,P_0)<\delta$时，有

$$|f(P)-A|<\varepsilon \qquad (1)$$

设$\{P_n\}$为任意以点P_0为极限的点列，$P_n\neq P_0$，即$\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$。

于是，对上述$\delta>0$，存在自然数N，当$n>N$时，有

$$0<\rho(P_n,\ P_0)<\delta$$

由（1）式知

$$|f(P_n)-A|<\varepsilon$$

即
$$\lim_{n\to\infty} f(P_n)=A$$

充分性 用反证法 如果$\lim\limits_{P\to P_0} f(P)\neq A$，即存在某个$\varepsilon_0>0$，对任意$\delta>0$，存在点$P_\delta$，当$0<\rho(P_\delta,\ P_0)<\delta$时，有

$$|f(P_\delta)-A|\geqslant\varepsilon_0$$

由于δ的任意性，取$\delta_1=1$时，存在点P_1，当$0<\rho(P_1,P_0)<\delta_1$时，有

$$|f(P_1)-A|\geqslant\varepsilon_0$$

取$\delta_2=\min\left\{\frac{1}{2},\ \rho(P_1,\ P_0)\right\}$，存在点$P_2\neq P_1$，当$0<\rho(P_2,\ P_0)<\delta_2$时，有

$$|f(P_2)-A|\geqslant\varepsilon_0$$

依此继续下去，一般地取$\delta_n=\min\left\{\frac{1}{n},\ \rho(P_{n-1},\ P_0)\right\}$，

存在点$P_n\neq P_{n-1}$，当$0<\rho(P_n,\ P_0)<\delta_n$时，有

$$|f(P_n)-A|\geqslant\varepsilon_0$$

于是，我们得到一个点列$\{P_n\}$和它所对应的函数值数列$\{f(P_n)\}$，由我们的作法$P_n\neq P_0$，$0<\rho(P_n,P_0)<\delta_n\leqslant\frac{1}{n}$，有

$$\lim_{n\to\infty}P_n=P_0$$

但
$$|f(P_n)-A|\geqslant\varepsilon_0$$

这与已知条件矛盾。

例7 讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\sin\dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{当 } x^2+y^2\neq0\\ 0, & \text{当} x^2+y^2=0\end{cases}$$

的连续性。

解 当$x^2+y^2\neq0$，即$(x, y)\neq(0, 0)$时，函数

$$f(x, y)=\sin\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

为二元初等函数，它的定义域是$(x, y)\neq(0,0)$的数平面。所以它在除原点(0，0)外都连续。

再讨论原点(0，0)处的连续性．设$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ $(r\neq0)$，当$x^2+y^2\neq0$时，有

$$f(x, y)=\sin\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sin(r\cos2\theta)$$

当$x\to0$与$y\to0$时，有$r\to0$．而$\cos2\theta$是有界量，于是，

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x, y)=\lim_{r\to0}\sin(r\cos2\theta)=0=f(0, 0)$$

即函数$f(x, y)$在点(0，0)也连续。

综上讨论所给函数$f(x, y)$在数平面上连续。

例8 证明，如果函数$f(x, y)$在区域D上，关于变量y是连续函数，而关于变量x对变量y一致的连续①，则$f(x, y)$在D上连续。

基本思路 在D上任取一点(x_0, y_0)，用插项的方法得不等式

$$|f(x, y)-f(x_0, y_0)|\leqslant|f(x, y)-f(x_0, y)|+|f(x_0, y)-f(x_0, y_0)|$$

由已知条件，不等式右端的第一个绝对值能任意小．第二项绝对值也能任意小。

证明 任取一点$(x_0, y_0)\in D$，因为$f(x, y)$关于y连续，所以固定$x=x_0$得y的一元函数$f(x_0, y)$在点$y=y_0$连续，即对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta_1>0$，当$|y-y_0|<\delta_1$ $((x_0, y)\in D)$

---

①意思是任取一点$(x_0, y_0)\in D$，对任意$\varepsilon>0$，存在与y无关的$\delta>0$，当$|x-x_0|<\delta$时，任意$(x_0, y)\in D$，有$|f(x,y)-f(x_0,y)|<\varepsilon$。

时，有

$$|f(x_0, y)-f(x_0, y_0)|<\varepsilon \quad (1)$$

又因为 $f(x, y)$关于 x 对 y 一致的连续，所以对上述的 $\varepsilon>0$，存在$\delta_2>0$，当 $|x-x_0|<\delta_2$时，对任意 $(x_0, y)\in D$，有

$$|f(x, y)-f(x_0, y)|<\varepsilon \quad (2)$$

于是，取$\delta=\min\{\delta_1, \delta_2\}$，当 $|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$ 时，（1）式和（2）式同时成立，有

$$|f(x, y)-f(x_0, y_0)| = |f(x, y)-f(x_0, y)+f(x_0, y)-f(x_0, y_0)| \leqslant |f(x, y)-f(x_0, y)| + |f(x_0, y)-f(x_0, y_0)| <2\varepsilon$$

即 $f(x, y)$在点 (x_0, y_0)连续，再根据点(x_0, y_0) 的任意性，函数 $f(x, y)$在区域D上连续。

习　题

§ 15.1

1. 指出下列点集中，那些是开区域或闭区域，并画出图形。

（1）$D=\{(x, y)|\ y<x^2\}$；（2）$D=\{(x, y)|\ xy\geqslant 0\}$；

（3）$D=\{(x, y)|\ |x+y|<1\}$；（4）$D=\{(x, y)|\ |x|+|y|\leqslant 1\}$。

2. 设 A，B，C 是平面上任意三点，证明满足三角不等式

$$\rho(A, C)\leqslant\rho(A, B)+\rho(B, C)$$

并说明其几何意义。

3. 设$E=\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right)\Big|\ n, m\text{为自然数}\right\}$，试讨论点集$E$ 的内点、聚点和界点。

4. 证明，如果点$P\in U(P_0, R)$，且$0<r<R-\rho(P_0, R)$，则 $U(P, r)\subset U(P_0, R)$。

§ 15.2

5. 问下列表达式是否为a，b的二元函数。

（1）$I=\int_1^2(a+bx)^2dx$；（2）$I=\int_a^b(2+x)^2dx$。

6．设函数$f(x, y)$在区域D上有定义，如果在D中任意固定$x=x_0$，则$f(x_0, y)$是一常数，问函数$f(x, y)$在D上是否为常数，为什么？

7．确定并画出下列函数的定义域：

（1）$z=x+\sqrt{\ln y}$；（2）$z=\arcsin\dfrac{x^2}{y^2}+\arcsin(1-y)$；

（3）$z=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$；（4）$z=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$。

8．作下列函数的图象：

（1）$z=x^2+y^2-1$；（2）$z=1-\sqrt{x^2+y^2}$；

（3）$z=x^2+4y^2$；（4）$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$。

§ 15.3

9．用不等式叙述下列极限的定义：

（1）$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to b}} f(x, y)=A$；（2）$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to-\infty}} f(x, y)=A$。

10．求下列极限：

（1）$\lim\limits_{\substack{x\to1\\ y\to0}}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$；（2）$\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$；

（3）$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$。

11．讨论函数

$$f(x, y)=\frac{y^2}{x^2+y^2}$$

在原点(0,0)的二重极限和累次极限。

§ 15.4

12．讨论下列函数的连续性：

（1）$f(x, y)=\ln(1+x^2+y^2)+e^x\sin y$；

（2）$f(x, y)=\begin{cases} x^2y^2\ln(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq0, \\ 0, & x^2+y^2=0; \end{cases}$

（3）$f(x, y)=\begin{cases} \dfrac{\sin xy}{y}, & y\neq0, \\ 0, & y=0. \end{cases}$

13．证明，如果函数 $f(x, y)$在区域D 上连续，则 $|f(x, y)|$ 也在D 上连续。

14．证明，如果函数 $f(x, y)$在点 $P(x_0, y_0)$连续，且 $f(x_0, y_0)>0$，则存在点P 的某邻域$U(P, \delta)$，在邻域$U(P, \delta)$，内有$f(x, y)>0$。

15．证明，如果函数 $f(x, y)$在区域D 上连续，且点$(x_i, y_i)\in D$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，则存在一点，$(\xi, \eta)\in D$，使

$$f(\xi, \eta)=\frac{f(x_1, y_1)+f(x_2, y_2)+\cdots+f(x_n, y_n)}{n}$$

16．证明，如果函数 $f(x, y)$在区域D 上，关于变量x 连续，对变量y 满足李普希兹条件：

$$|f(x, y_1)-f(x, y_2)|\leqslant K|y_1-y_2|$$

其中点 (x, y_1)，$(x, y_2)\in D$，K为常数，则函数 $f(x, y)$ 在区域D上连续。

第十六章　多元函数微分学

本章是在一元函数微分学的基础上讨论多元函数微分学。

我们曾用两种方法讨论了二元函数 $f(x, y)$（多元函数）的极限：一种方法是让 x，y 同时变化，由此得出二重极限；一种方法是暂时固定 x或 y，让另一个变化，由此得出累次极限。这是处理多元函数两种基本方法。我们就用这两种方法来讨论多元函数微分学。

§16.1　偏导数

我们曾在第十五章提出，具有一定质量的理想气体，满足方程

$$PV = RT \quad (R\text{是比例常数})$$

方程中的三个变量 P, T, V，其中任一个变量都是另外两个变量的二元函数。如果在温度T保持不变的条件下，讨论压强P对体积V的变化率，这时，由于T保持不变，即看作常数，于是P就是V的一元函数，所以P对V的变化率就变成一元函数的变化率，即P对V的导数。一般情况，n元函数需要讨论在$n-1$个变量保持不变的条件下仅对其余一个变量的变化率（$n-1$ 个变量都看作是常数），就是所谓多元函数的偏导数。

一　偏导数的定义

定义　设函数 $z=f(x,y)$在点 $P(x_0, y_0)$ 的某邻域内有定义，在此邻域内另取一点$Q(x_0+\Delta x, y_0)$（暂时固定 $y=y_0$）。如果一元函数 $f(x, y_0)$ 在点 $x=x_0$ 存在导数，即极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,\ y_0)-f(x_0,\ y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为二元函数 $z=f(x,\ y)$ 在点 $P(x_0,\ y_0)$ 关于x的偏导数，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,\ y_0)} \text{或} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,\ y_0)},f'_x(x_0,\ y_0)$$

类似地可以定义 $z=f(x,\ y)$ 在点 $P(x_0,\ y_0)$ 关于y的偏导数（暂时固定 $x=x_0$），即

$$f_y'(x_0,\ y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0)}{\Delta y}$$

同样可定义三元函数$f(x,\ y,\ z)$分别关于 x、y 和 z 的偏导数。例如，$f(x,\ y,\ z)$ 在点$(x_0,\ y_0,\ z_0)$关于 x 的偏导数是

$$f_x'(x_0,\ y_0,\ z_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,\ y_0,\ z_0)-f(x_0,\ y_0,\ z_0)}{\Delta x}$$

读者不难写出 $f_y'(x_0,\ y_0,\ z_0)$，$f_z'(x_0,\ y_0,\ z_0)$。类似可定义 n 元函数的偏导数。

如果函数$f(x,\ y)$在区域D上每一点$(x,\ y)$都存在关于x的偏导数$f_x(x,\ y)$，则它在D上仍是 x,y 的函数，称$f_x(x,\ y)$ 为 $f(x,\ y)$ 关于 x 的**偏导函数**。同样，亦称$f_y(x,\ y)$ 为 $f(x,\ y)$关于 y的**偏导函数**。通常仍简称为偏导数。

由偏导数的定义可知，求二元函数 $f(x,\ y)$ 的偏导数与求一元函数的导数并无区别。例如，求$\frac{\partial f}{\partial x}$时，把 $f(x,\ y)$中的 y 看作常数而对 x 求导数；求$\frac{\partial f}{\partial y}$时，把 $f(x,\ y)$ 中的x看作常数而对y求导数。至于求多于二个自变量的函数的偏导数与此相同。

例 1 求函数 $z=x^2+y^2$ 在点 (1, 2) 的偏导数。

解 把 y 看作常数，对 x 求导数，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x$$

把 x 看作常数，对 y 求导数，得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2y$$

再将点 (1,2) 代入上面结果中，就得函数 $z=x^2+y^2$ 在点 (1,2) 的两个偏导数，即

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=2\times1=2 \text{ 与 } \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)}=2\times2=4$$

例 2 求函数 $z=x^y$ $(x>0)$的偏导数。

解 把 y 看作常数，对 x 求导数，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$$

把 x 看作常数，对 y 求导数，得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$$

例 3 求 $u=\frac{1}{r}$的偏导数，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。

解 这个题如果消去中间变量 r，就得到 u是 x，y，z 的三元函数 $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，然后分别求偏导数。这样做是可以的，但比较麻烦。我们可以利用复合函数的求导法则，能使运算简便些。

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{du}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=-\frac{x}{r^3}$$

因为这个函数关于 x，y，z 是对称的，所以关于 y，z 的偏导数，可类似的写出，得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{r^3},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z}{r^3}$$

注意 偏导数的符号$\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$必须理解成一个整体，不能象一元函数 $y=f(x)$ 导数记号$\frac{dy}{dx}$那样看成是微分 dy 与dx的商。因为对 ∂f，∂x，∂y我们并没有赋予具体意义。

二 偏导数的几何意义

二元函数 $z=f(x, y)$在点 $P(x_0, y_0)$ 的两个偏导数有明显的几何意义。

设 $z=f(x, y)$ 表示三维空间的一个曲面。如果固定 $y=y_0$，则一元函数 $z=f(x, y_0)$ 表示在平面 $y=y_0$ 上的一条平面曲线，即曲面 $z=f(x, y)$ 与平面 $y=y_0$ 的交线：

$$\begin{cases} z=f(x, y) \\ y=y_0 \end{cases} \tag{1}$$

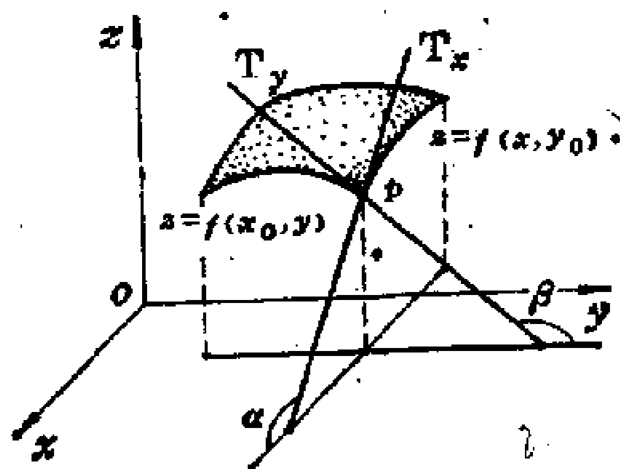


图16.1

$z=f(x, y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$关于 x 的偏导数 $f'_x(x_0, y_0)$，就是一元函数 $z=f(x, y_0)$在点 $x=x_0$ 的导数。由一元函数导数的几何意义知，$f'(x_0, y_0)$就是曲线（1）在点$P(x_0, y_0, z_0)$处的切线 PT_x 与 x 轴正向夹角 α 的正切，即 $f'_x(x_0, y_0)=\operatorname{tg}\alpha$ （图16.1）。

类似地有，$z=f(x, y)$ 在点$P(x_0, y_0)$关于 y 的偏导数 $f'_y(x_0, y_0)$ 就是曲线 $z=f(x_0, y)$ 在点$P(x_0, y_0, z_0)$ 处的切线 PT_y 与 y 轴正向夹角 β 的正切，即 $f'_y(x_0, y_0)=\operatorname{tg}\beta$。

三　偏导数与连续的关系

在一元函数里，函数在一点可导的必要条件是它在该点连续。但二元函数 $f(x, y)$（多元函数），在点 $P(x_0, y_0)$ 存在两个偏导数 $f'_x(x_0, y_0)$，$f_y'(x_0, y_0)$，但函数 $f(x, y)$ 在点 P 不一定连续。

例 4　函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

由§15.4例 2 知，它在点 $(0,0)$ 不连续，但由偏导数的定义，却有

$$f'_x(0, 0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x, 0)-f(0,0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0$$

$$f'_y(0, 0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0, 0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0$$

即所给函数 $f(x, y)$ 在点 $(0,0)$ 存在两个偏导数。

这个例子说明，一个多元函数在某一点存在偏导数，但它在该点不一定连续。这件事我们从偏导数的定义并不难理解，因为偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 只是刻划了函数 $f(x, y)$ 在点$P(x_0,y_0)$沿平行于 x 轴与平行于 y 轴方向的变化率，并不能刻划函数 $f(x, y)$在点 $P(x_0, y_0)$ 沿其它方向的变化情况。

反之一样，函数$f(x, y)$在点 $P(x_0, y_0)$ 连续，但它的偏导数不一定存在。

例 5　函数

$$f(x, y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

在点 (0,0) 是连续的，但偏导数$f'_x(0, 0)$和$f'_y(0, 0)$都不存在。事实上，由偏导数的定义

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x, 0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{\Delta x^2}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\begin{cases}1, & \Delta x>0\\ -1, & \Delta x<0\end{cases}$$

所以，偏导数$f'_x(0, 0)$不存在。同理，可证偏导数$f'_y(0,0)$也不存在。

综上讨论多元函数的偏导数与连续之间没有必然的联系，连续不一定存在偏导数，反之偏导数存在也不一定连续。

§16.2　全　微　分

一　全微分概念

偏导数只刻划了函数沿某特定方向的变化率。现在来研究函数在某点邻域内全面变化情况。为此首先给出全改变量的概念。

设二元函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 的某邻域内有定义，并设 $Q(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ 为此邻域内任意一点，称

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)$$

为 $f(x, y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$的全改变量。为区别起见，称

$$\Delta z_x=f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0) \text{ 与 } \Delta z_y=f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)$$

为偏改变量。

我们已知，如果一元函数 $y=f(x_0)$ 在点 $x=x_0$ 存在导数 $f'(x_0)$，则总能将 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 表为

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+0(\Delta x)=dy+0(\Delta x)$$

即用 $f'(x_0)\Delta x$ 代替 Δy 相差是较 Δx 的高阶无穷小。

同一元函数的情形一样，自然我们也希望能用Δx，Δy的线性函数近似代替 Δz，而它们的差是较 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 的高阶无穷小。为此我们给出二元函数全微分的概念。

定义 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$的某邻域内有定义，在此邻域内，如果函数的全改变量 Δz 可表为：

$$\begin{aligned}\Delta z&=f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta x)-f(x_0,\ y_0)\\&=A\Delta x+B\Delta y+0(\rho)\end{aligned} \tag{16.1}$$

其中A和B与Δx和Δy无关（仅与点P有关）$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$，则称函数 $z=f(x, y)$在点 $P(x_0, y_0)$ **可微**，其中关于 Δx 与 Δy的线性函数

$$A\Delta x+B\Delta y$$

称为函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 的**全微分**，记作

$$dz=A\Delta x+B\Delta y$$

由可微的定义看到，如果函数 $z=f(x, y)$在点 $P(x_0,y_0)$ 可微，则有 (16.1) 式成立，由此可得

$$\lim_{\rho\to 0}\Delta z=0$$

于是，如果函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$可微，则函数$z=f(x, y)$在点 $P(x_0, y_0)$连续，即函数连续是可微的必要条件。

二 函数可微与偏导数的关系

由可微的定义看到，如果函数 $z=f(x, y)$在点 $P(x_0, y_0)$ 可微，则 $z=f(x, y)$ 在点P的邻域内可用线性函数近似表达。特别沿平行于 x 轴和 y 轴的直线 $y=y_0$，$x=x_0$ 也是如此，从而可得 $z=f(x, y)$在点P可微的另一必要条件。

定理16.1 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$可微，即

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$$

则 $z=f(x, y)$ 在点 P 存在两个偏导数，且

$$A=f'_x(x_0, y_0), \quad B=f'_y(x_0, y_0)$$

证明 令 $y=y_0$ 保持不变，即 $\Delta y=0$，给 x 改变量 $\Delta x\neq 0$，这时 $\rho=|\Delta x|$．于是，(16.1) 式改写为

$$\Delta z = A\Delta x + o(|\Delta x|)$$

即 $$\Delta z_x=f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0) = A\Delta x + o(|\Delta x|)$$

从而

$$\frac{\Delta z_x}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x}=A+\frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x}$$

于是，有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z_x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(A+\frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x}\right)=A$$

即 $$A=f'_x(x_0, y_0)$$

同理可证 $$B=f'_y(x_0, y_0)$$ □

这个定理还说明，函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 可微，则其全微分是唯一的，即

$$dz=f'_x(x_0, y_0)\Delta x+f'_y(x_0, y_0)\Delta y \qquad (16.2)$$

由定理16.1知，如果函数 $f(x, y)$ 可微，则存在两个偏导数，那么反过来如果函数存在两个偏导数，是否可微呢？由上节的例 4 知，函数在一点存在两个偏导数，函数在该点不连续．当然更谈不上可微．如果对偏导数再加一些条件，就可保证函数可微．

定理16.2 如果函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 的某邻域内存在连续偏导数 $f'_x(x, y)$，$f'_y(x, y)$，则 $z=f(x, y)$ 在点 P 可微．

分析 为了应用偏导数，把 $z=f(x, y)$ 在点 P 的全改变量

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)$$

中加减 $f(x_0+\Delta x, y_0)$（如图16.2），有

$$\Delta z=[f(x_0+\Delta x,\ y_0)-f(x_0,\ y_0)]+[f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,\ y_0)]$$

上述等式右端的第一个方括号可看作一元函数$f(x, y_0)$的改变量，而第二个方括号可看作一元函数$f(x_0+\Delta x, y)$的改变量，再应用一元函数的拉格朗日中值定理及偏导数的连续性即可得结果。

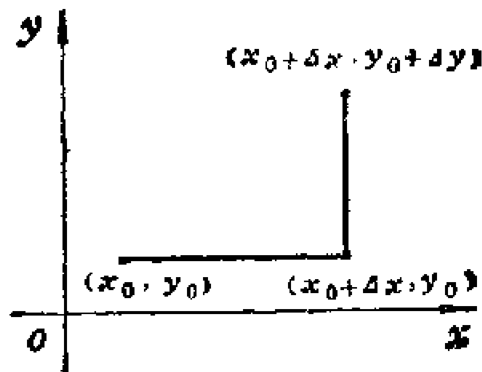


图16.2

证明 在点 $P(x_0, y_0)$邻域内给 x，y 的改变量Δx,Δy。由于$f(x, y)$在此邻域内存在偏导数，函数$f(x, y_0)$与$f(x_0+\Delta x, y)$分别在 x_0 与 $x_0+\Delta x$ 之间和 y_0 与 $y_0+\Delta y$之间，应用拉格朗日中值定理，有

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0)-f(x_0,\ y_0)=f'_x(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0)\Delta x,\quad 0<\theta_1<1$$

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x, y_0)=f'_y(x_0+\Delta x,\ y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y,\quad 0<\theta_2<1$$

于是，函数 $z=f(x, y)$的全改变量可表为

$$\Delta z=[f(x_0+\Delta x,\ y_0)-f(x_0,\ y_0)]+[f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,\ y_0)]=f'_x(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0)\Delta x+f'_y(x_0+\Delta x,\ y_0++\theta_2\Delta y)\Delta y$$

为了使上式符合全微分定义的要求，把它再改写为

$$\Delta z=f'_x(x_0,\ y_0)\Delta x+f'_y(x_0,\ y_0)\Delta y+[f'_x(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0)-f'_x(x_0,y_0)]\Delta x+[f'_y(x_0+\Delta x,\ y_0+\theta_2\Delta y)-f'_y(x_0,\ y_0)]\Delta y$$

我们只须证明，上式等号右端后两项是较ρ的高阶无穷小，即除以ρ之后极限是0（当 $\rho\to0$ 时）。设

$$\alpha=[f'_x(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0)-f'_x(x_0,\ y_0)]\frac{\Delta x}{\rho}+[f'_y(x_0+$$

$$\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y)-f'_y(x_0, y_0)]\frac{\Delta y}{\rho}$$

由于

$$\left|\frac{\Delta x}{\rho}\right|=\left|\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right|\leqslant 1,$$

$$\left|\frac{\Delta y}{\rho}\right|=\left|\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right|\leqslant 1$$

及 $f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x, y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 连续，即当 $\rho\to 0$ ($\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$) 时，有

$$f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0)\to f'_x(x_0, y_0)$$

$$f'_y(x_0+\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y)\to f'_y(x_0, y_0)$$

于是，当 $\rho\to 0$ 时，有 $\alpha\to 0$。 □

最后我们考虑特殊的二元函数 $z=x$，它有连续的偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=1, \frac{\partial z}{\partial y}=0$$

于是，由定理16.2知，

$$dz=dx=1\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y=\Delta x$$

把 x 看成函数时，它的微分 dx 等于 Δx，即

$$dx=\Delta x$$

同样自变量 y 的微分为

$$dy=\Delta y$$

于是，二元函数 $z=f(x, y)$在点 (x, y) 的全微分可写成

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{16.3}$$

同样我们可给出 n元(三元以上)函数的微分公式。例如，三元函数 $u=f(x, y, z)$ 在点 (x, y, z) 的全微分公式为

$$du=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$$

例 1 求函数 $z=e^{xy}$ 的全微分。

解 因为函数的偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}$$

在数平面上连续，所以函数在数平面上可微，其全微分为

$$dz=ye^{xy}dx+xe^{xy}dy$$

例 2　求三元函数 $u=xy+yz+zx$ 的全微分。

解　因为函数的三个偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y+z, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=x+z, \quad \frac{\partial u}{\partial z}=y+x$$

在数平面上连续，所以函数在数平面上可微，其全微分为

$$du=(y+z)dx+(x+z)dy+(y+x)dz$$

三　全微分的几何意义

我们知道，一元函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的微分 $dy=f'(x_0)\Delta x$ 是曲线 $y=f(x)$ 在其上一点 (x_0, y_0) 切线关于 Δx 的改变量。同样，二元函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的全微分 $dz=f'_x(x_0, y_0)\Delta x+f'_y(x_0, y_0)\Delta y$ 是曲面 $z=f(x, y)$ 在其上一点 (x_0, y_0, z_0) $(z_0=f(x_0, y_0))$ 切平面关于 Δx 与 Δy 的全改变量。为此，我们先给出曲面的切平面定义，然后再讨论全微分的几何意义。

定义　如果在曲面 $z=f(x, y)$ 上，过该曲面上一点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 的任意曲线的切线都在同一平面内，则称此平面为曲面 $z=f(x, y)$ 在点 M 处的**切平面**。

如果曲面 $z=f(x, y)$ 在点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 有切平面，由于曲面上过点 M 的任意曲线的切线都在切平面内，所以过点 M 的平面 $y=y_0$ 和 $x=x_0$ 分别与曲面 $z=f(x, y)$ 相交而得的曲线 $z=f(x, y_0)$ 和 $z=f(x_0, y)$，它们过点 M 的切线 MT_x 与 MT_y（如图16.3）也应在切平面内。显然，MT_x 与 MT_y 是过点 M 的两条相交的空间直线。由偏导数的几何意义知，它们的方程分别为

$$MT_x: \begin{cases} y = y_0 \\ z - z_0 = f'_x(x_0,\ y_0)(x - x_0) \end{cases}$$

$$MT_y: \begin{cases} x = x_0 \\ z - z_0 = f'_y(x_0,\ y_0)(y - y_0) \end{cases}$$

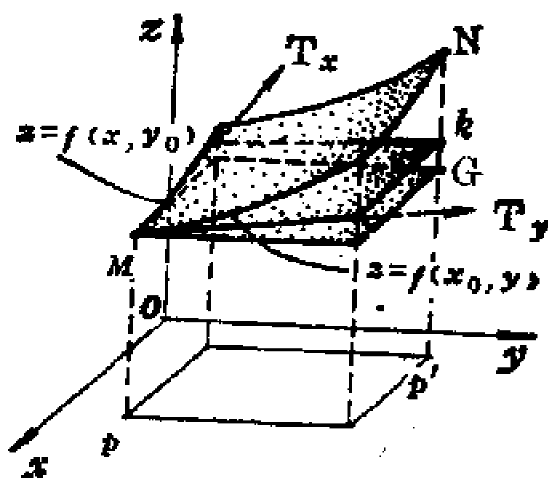


图16.3

由空间解析几何知，切线 MT_x 与 MT_y 的标准方程分别为

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{f'_x(x_0,\ y_0)}$$

与
$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{1} = \frac{z - z_0}{f'_y(x_0,\ y_0)}$$

因此，切线 MT_x，MT_y 的一组方向数分别为

$$\{1,\ 0,\ f'_x(x_0,\ y_0)\} 与 \{0,\ 1,\ f'_y(x_0,\ y_0)\}$$

于是，切平面的一个法向量 $\vec{n}$ 是

$$\vec{n} = \overrightarrow{MT_x} \times \overrightarrow{MT_y} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f'_x(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & f'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = \{-f'_x(x_0, y_0), -f'_y(x_0,\ y_0),\ 1\}$$

由平面的点法式方程，得切平面方程为

$$-f'_x(x_0,\ y_0)(x - x_0) - f'_y(x_0,\ y_0)(y - y_0) + (z - z_0) = 0$$

或 $$z - z_0 = f'_x(x_0,\ y_0)(x - x_0) + f'_y(x,\ y_0)(y - y_0)$$

令 $\Delta x = dx$，$\Delta y = dy$，则上式右端是函数 $z = f(x,\ y)$ 在

点 $P(x_0,y_0)$ 的全微分 dz，而方程的右端是对应于自变量的改变量Δx，Δy，切平面竖坐标的改变量．这就是全微分的几何意义．如图16.3所示，用 N,K,G分别表示对应于点$P'(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ 的曲面上的点，切平面上的点和过点M的平行于 xy 平面上的点，则函数的全改变量

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0)=GN$$

而切平面竖坐标的改变量

$$z-z_0=f'_x(x_0,\ y_0)\Delta x+f'_y(x_0,\ y_0)\Delta y=dz=GK$$

当 $|\Delta x|$，$|\Delta y|$ 很小时，用全微分 dz 近似代替函数的改变量，在几何上就是 $GN\approx GK$，其误差为KN，由全微分的定义知，当 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0$ 时，KN是 ρ 的高阶无穷小，即$KN\to 0$．也就是说，在点P的很小邻域内曲面与切平面差别很小．正因为全微分有这一特性，使全微分在近似计算上有着一定的应用．

四　全微分的应用

若函数$z=f(x,\ y)$在点 $(x_0,\ y_0)$ 可微，则当 Δx，Δy很小时，可以用全微分 dz 近似代替函数的全改变量Δz，即

$$\Delta z\approx dz=f'_x(x_0,\ y_0)\Delta x+f'_y(x_0,\ y_0)\Delta y \qquad (16.3)$$

用这个公式我们可作误差估计．

在某些实际问题中，要计算函数 $z=f(x,\ y)$在点 (x_0,y_0) 的函数值，由于实测的工具和方法等原因，x_0 与 y_0 分别产生了误差 Δx 与 Δy，从而产生了函数 $z=f(x,\ y)$的误差：

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0)$$

现在我们的问题是，已知误差 Δx，Δy 的界限，如何估计误差 Δz 的界限呢？由公式(16.3)，有

$$\begin{aligned}|\Delta z|&\approx|f'_x(x_0,\ y_0)\Delta x+f'_y(x_0,\ y_0)\Delta y|\\&\leqslant|f'_x(x_0,\ y_0)|\ |\Delta x|+|f'_x(x_0,\ y_0)|\ |\Delta y|\end{aligned} \qquad (16.4)$$

例 3　有一直角三角形，测得它的斜边长为 2 尺，一个锐

角为 30°，如果斜边的误差不超过±0.01尺，角的误差不超过±1°，那么这个锐角相邻的直角边长，能否保证其误差不超过0.05尺。

解 设斜边为 x（尺），这个锐角为 y（弧度）。由三角学知，所求的直角边长

$$z=f(x,\ y)=x\cos y$$

这样我们的问题为当 $x_0=2$，$y_0=\frac{\pi}{6}$，$|\Delta x|\leqslant 0.01$，$|\Delta y|\leqslant\frac{\pi}{180}$ 时，求 z 的误差限。

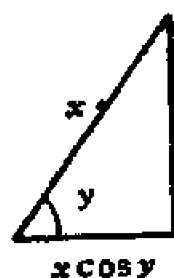


图16.4

因为 $f'_x(x,\ y)=\cos y$，$f'_y(x,\ y)=-x\sin y$，由公式(16.4)，有

$$|\Delta z|\leqslant|\cos y_0|\cdot|\Delta x|+|-x_0\sin y_0||\Delta y|$$

$$=\cos\frac{\pi}{6}\times 0.01+2\sin\frac{\pi}{6}\times\frac{\pi}{180}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 0.01+2\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{180}$$

$$\approx 1.73\times 0.01+0.02=0.037$$

这说明，直角边长的误差不超过0.05。

在公式(16.3)中，Δz 用 $f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ 代入，得

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0)\approx f'_x(x_0,\ y_0)\Delta x+f'_y(x_0,\ y_0)\Delta y$$

即

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)\approx f(x_0,\ y_0)+f'_x(x_0,\ y_0)\Delta x+f'_y(x_0,\ y_0)\Delta y \tag{16.5}$$

这个公式可用来计算函数值的近似值。比如，要计算函数值 $f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$。但是，由于函数 $f(x,\ y)$ 的结构可能很复杂，计算它的精确值很困难。这时如果 $f'_x(x_0,\ y_0)$ 与 $f'_y(x_0,\ y_0)$ 都容易计算，且 $|\Delta x|$ 与 $|\Delta y|$ 又很小，则可用公式 (16.5) 的右端作为所求函数值的近似值。

在具体问题中，一般不给出函数 $f(x, y)$ 和点 (x_0, y_0) 及改变量 Δx，Δy。因此在应用公式（16.5）时，根据问题确定函数 $f(x, y)$ 和点 (x_0, y_0) 及改变量 Δx，Δy。

例 4 求 $\sqrt[3]{(2.02)^2+(1.97)^2}$ 的近似值。

解 显然，我们所要计算的是函数 $f(x, y)=\sqrt[3]{x^2+y^2}$ 在点(2.02,1.97)的值。容易看出点 (x_0, y_0) 及 Δx，Δy 应为点(2,2)及 $\Delta x=0.02$，$\Delta y=-0.03$。

$$f'_x(x,y)=\frac{2x}{3(\sqrt[3]{x^2+y^2})^2}, \quad f'_y(x,y)=\frac{2y}{3(\sqrt[3]{x^2+y^2})^2}$$

从而得

$$f(2, 2)=2, \quad f'_x(2,2)=\frac{1}{3}, \quad f'_y(2,2)=\frac{1}{3}$$

把它代入公式(16.5)的右端，得

$$\sqrt[3]{(2.02)^2+(1.97)^2}\approx 2+\frac{1}{3}\times 0.02+\frac{1}{3}\times(-0.03)$$

$$=2-\frac{0.01}{3}\approx 1.997$$

§16.3 方向导数与梯度

一 方向导数

我们知道，函数 $z=f(x, y)$ 的两个偏导数 $f'_x(x, y)$，$f'_y(x, y)$ 是 $z=f(x, y)$ 在点 (x, y) 沿平行于两个坐标轴方向的变化率。但在实际问题中，还需要考虑沿某特定方向的变化率问题。如在气象学中研究气温沿某一方向的变化率。这类沿特定方向的变化率问题，就是本节讨论的方向导数。

设函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 的某邻域内有定义。在 xy 平面上，过点 P 引任一条射线 l，在该邻域内并在 l 上任取一点 $P'(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$。用 ρ 表示两点 P 与 P' 之间的

距离，即

$$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

定义 如果极限

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0)}{\rho}$$

存在，则称此极限为函数 $f(x, y)$ 在点 P 沿 l 的方向导数，记作

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_P \text{或 } D_l f(x_0,\ y_0)$$

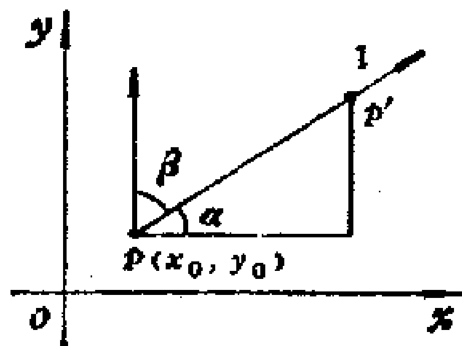


图16.5

在什么条件下，函数 $z=f(x, y)$ 在一点存在任意方向的方向导数呢？有如下的充分性定理。

定理16.3 如果函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 可微，则 $f(x, y)$ 在点 P 沿任一射线 l 的方向导数都存在，且

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_P=f'_x(x_0,\ y_0)\cos\alpha+f'_y(x_0,\ y_0)\cos\beta$$

其中 α,β 分别是 l 与 x 轴和 y 轴的正向夹角(如图16.5)。

证明 设 $P'(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$ 为 l 上的任意点，记ρ 为 P 与 P' 之间的距离，则有

$$\Delta x=\rho\cos\alpha,\ \Delta y=\rho\cos\beta \qquad (1)$$

已知 $f(x, y)$ 在点 P 可微，由可微的定义，有

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0)=f'_x(x_0,\ y_0)\Delta x+f'_y(x_0,\ y_0)\Delta y+o(\rho)$$

把(1)式代入上式的右端，并用 ρ 除上式的两端，得

$$\frac{f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0)}{\rho}$$

$$=f'_x(x_0,\ y_0)\cos\alpha+f'_y(x_0,y_0)\cos\beta+\frac{o(P)}{\rho}$$

当 $\rho\to0$ 时，有 $\frac{o(\rho)}{\rho}\to0$，于是左端的极限存在，且

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_P=\lim_{\rho\to0}\frac{f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0)}{\rho}$$

$$=f'_x(x_0,\ y_0)\cos\alpha+f'_y(x_0,\ y_0)\cos\beta \qquad \square$$

由方向导数的定义容易看到，由于点 $P'(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$是在过点 $P(x_0,\ y_0)$所引的射线 l 上，所以当 $P'\to P$ 所取的极限是单边极限。由此看出，如果函数 $f(x,\ y)$在点 $P(x_0,\ y_0)$ 存在关于 x 的偏导数 $f'_x(x_0,\ y_0)$，则 $f(x,\ y)$在点 P 沿平行于 x 轴，并指向正向 l 的方向导数为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_P=f'_x(x_0,\ y_0)$$

而 $f(x,\ y)$ 在点 P 沿平行于 x 轴，并指向负方向 l' 的方向导数为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l'}\right|_P=-\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|=-f'_x(x_0,\ y_0)$$

关于 $f'_y(x_0,\ y_0)$也有类似的结果。一般地，如果函数 $f(x,y)$在点 $P(x_0,\ y_0)$ 可微，则函数 $f(x,\ y)$ 在点 P 沿射线 l 与沿 l 的相反方向的射线 l' 的方向导数绝对值相等而符号相反。这是因为 l 与 l' 相差 π 角，所以 l 与 l' 的方向余弦相差一个符号.

对于 n 元函数的方向导数也有类似结果. 如果函数$f(x,\ y,\ z)$ 在点 $P(x,\ y,\ z)$ 可微，则函数 $f(x,\ y,\ z)$ 在点 P 沿任一射线 l 的方向导数都存在，且

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

其中α，β，γ分别是 l 与三个坐标轴的正向夹角，即 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 是 l 的方向余弦.

例 1 求函数 $f(x,\ y,\ z)=xy^2+z^3-xyz$ 在点 $P(1,1,2)$ 沿与三个坐标轴的正向夹角分别为$60°$，$45°$，$60°$的方向 l 的方

向导数。

解 函数$u=f(x,y,z)$在点$P(1,1,2)$的三个偏导数为

$$f'_x(1,1,2)=(y^2-yz)|_P=1-2=-1,$$
$$f'_y(1,1,2)=(2xy-xz)|_P=2-2=0$$
$$f'_z(1,1,2)=(3z^2-xy)|_P=12-1=11$$

而方向余弦为

$$\cos\alpha=\cos60°=\frac{1}{2},\ \cos\beta=\cos45°=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\gamma=\cos60°=\frac{1}{2}$$

于是
$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma=(-1)\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{\sqrt{2}}+11\times\frac{1}{2}=5.$$

例 2 证明，函数 $z=f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在原点$(0,0)$沿任一射线的方向导数恒相等。

证明 由§16.1例5知，函数在点$(0,0)$不存在偏导数，因此直接用定义证明。

设 l 为点$(0,0)$的任意射线，在 l 上任取一点 $(0+\Delta x,0+\Delta y)$，在点$(0,0)$沿射线 l 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\rho\to0}\frac{f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)}{\rho}$$
$$=\lim_{\rho\to0}\frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\rho}=\lim_{\rho\to0}\frac{\rho}{\rho}=1$$

由 l 的任意性知，函数在点$(0,0)$沿任一射线的方向导数都等于1，即恒相等。

这个例说明，函数可微是存在方向导数的充分条件，而不是必要条件（因为这个函数在原点不存在偏导数所以不可微，但存在方向导数）。

二 梯 度

我们知道，函数 $f(x, y, z)$ 在点P沿 l 射线的方向导数，刻划函数沿 l 方向的变化率．在实际问题中，有时需要判断函数在点P沿哪一个方向增加最快，也就是说在点P沿哪一个方向，方向导数取最大值。

为了解决这个问题，我们把方向导数的计算公式改写成向量的形成。

设

$$\vec{g}=\left\{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right\}_P, \quad \vec{l}=\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$$

由向量的数量积，把 $f(x, y, z)$在点P沿 l 的方向导数改写为

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial l}&=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\\&=\left\{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right\}\cdot\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}\\&=\vec{g}\cdot\vec{l}=|\vec{g}|\cdot|\vec{l}|\cos(\widehat{\vec{g},\vec{l}})=|\vec{g}|\cos(\widehat{\vec{g},\vec{l}})\end{aligned}$$

即 $$\frac{\partial f}{\partial l}=|\vec{g}|\cos(\widehat{\vec{g},\vec{l}})$$

这样，方向导数就改写为两个因子的乘积．第一个因子 $|\vec{g}|$ 是向量$\vec{g}$ 的长度（模），它只与点P有关，而与射线l的方向无关；第二个因子 $\cos(\vec{g}, \vec{l})$，因为$\vec{g}$是常向量，所以它只与射线l的方向有关．于是，当l变动时，$\cos(\widehat{\vec{g},\vec{l}})$ 也变化．由此看出，当$\cos(\widehat{\vec{g},\vec{l}})=1$时，即射线$l$的方向与向量$\vec{g}$的方向一致时，方向导数$\frac{\partial f}{\partial l}$取最大值．于是，向量$\vec{g}$的方向是函数 $f(x, y, z)$ 在点P增加最快的方向。

定义 设函数 $u=f(x, y, z)$ 在点 $P(x_0, y_0, z_0)$的三个偏导数$\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$，$\frac{\partial f}{\partial z}$不同时为零。以这三个偏导数为坐标的向量

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right\}_P$$

称为函数 $u=f(x, y, z)$在点 P 的梯度，记作

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0)=\left\{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right\}_P$$

$u=f(x, y, z)$在任意一点$Q(x, y, z)$ 的梯度，可简写为

$$\operatorname{grad} f=\left\{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right\}$$

这样，函数在一点的梯度是一个向量，它的方向是使函数值增加最快的方向，它的大小是函数沿该方向的方向导数。

有了梯度概念，就可以给出方向导数与梯度的关系：

$$\frac{\partial f}{\partial l}=|\operatorname{grad} f| \cos(\operatorname{grad} f, \overrightarrow{l})$$

这个式子表明，函数沿射线 l 的方向导数，等于梯度在 l 上的投影。

例 3　求函数 $u=x^3+y^3+z^3-3xyz$ 的梯度。并问在哪些点其梯度：（1）垂直于 z 轴；（2）平行于 z 轴；（3）等于零。

解 函数的三个偏导数为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3yz, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=3y^2-3xz,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=3z^2-3xy$$

于是，函数在点 (x, y, z) 的梯度为

$$\operatorname{grad} u=\{3x^2-3yz, \ 3y^2-3xy, \ 3z^2-3xy\}$$

（1）在 z 轴取单位向量 $\overrightarrow{r}=\{0, 0, 1\}$。grad$u$ 与 z 轴

垂直相当于向量 grad$u$与$\vec{r}$垂直。由两个向量垂直的条件（对应坐标乘积的和等于零），有

$$3z^2-3xy=0$$

即
$$z^2=xy$$

于是，曲面 $z^2=xy$ 上任何一点的梯度都与z轴垂直。

（2）grad$u$ 与 z 轴平行相当于向量 grad$u$ 与$\vec{r}$平行，由两个向量平行的条件（对应坐标之比相等），有

$$\frac{3x^2-3yz}{0}=\frac{3y^2-3xz}{0}=\frac{3z^2-3xy}{1}$$

从而得方程组

$$\begin{cases}x^2-yz=0\\y^2-xz=0\end{cases}$$

解得 $x=y=0$，即 z 轴上任何一点的梯度都平行于z轴。

（3）要使梯度为零，则向量 grad$u$ 的三个坐标必须同时为零。于是，得方程组

$$\begin{cases}x^2-yz=0\\y^2-xz=0\\z^2-xy=0\end{cases}$$

解得 $x=y=z$。在直线 $x=y=z$ 上任何一点的梯度均为零。

§16.4 复合函数微分法

求多元函数的偏导数和全微分统称为多元函数的微分法。这节讨论多元复合函数的微分法。

一 复合函数的偏导数

设 $z=f(x,y)$，而 x，y 又是 t 的函数，即

$$x=x(t),\ y=y(t)$$

复合后得

$$z=f[x(t),\ y(t)]$$

这是 t 的一元函数．如何求它的导数呢？如果函数 $f(x,\ y)$ 是具体的，那么总可以归结为一元函数求导问题．但对一般形式的二元函数，这里有两个中间变量 x 与 y．这就需要建立二元复合函数的求导法则．

定理16.4 如果函数 $x=x(t)$，$y=y(t)$ 在点 t 可导，而二元函数 $z=f(x,\ y)$ 在点 $(x,\ y)=[x(t),\ y(t)]$ 可微，则复合函数 $f[x(t),\ y(t)]$ 在点 t 也可导，且有

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} \tag{16.6}$$

证明 当自变量 t 有改变量 Δt 时，则函数 $x=x(t)$，$y=y(t)$ 相应地也有改变量

$$\Delta x=x(t+\Delta t)-x(t),\ \Delta y=y(t+\Delta t)-y(t)$$

于是，$z=f(x,\ y)$ 也有改变量

$$\Delta z=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)$$

由于二元函数 $z=f(x,\ y)$ 在点 $(x,\ y)$ 可微，根据可微的定义有

$$\Delta z=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\alpha\cdot\rho \tag{1}$$

其中当 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0$ 时，$\alpha\to 0$．在微分定义中，x, y 是自变量，这时 $\Delta x^2+\Delta y^2\neq 0$．当 x, y 是中间变量时，由 $\Delta t\neq 0$ 不一定有 $\Delta x^2+\Delta y^2\neq 0$．我们规定当 $\Delta x^2+\Delta y^2=0$ 时，令 $\alpha=0$．于是，不论 $\Delta x^2+\Delta y^2\neq 0$ 或 $\Delta x^2+\Delta y^2=0$ (1) 式都成立．

对 (1) 式的两端除以 $\Delta t\neq 0$，得

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t}+\alpha\frac{\rho}{\Delta t}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$+\alpha\frac{|\Delta t|}{\Delta t}\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \qquad (2)$$

由于 $x=x(t)$，$y=y(t)$ 在点 t 可导，当 $\Delta t\to 0$ 时，有

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}\to\frac{dx}{dt},\quad \frac{\Delta y}{\Delta t}\to\frac{dy}{dt}$$

由 $x(t)$，$y(t)$ 的连续性，当 $\Delta t\to 0$ 时，有$\Delta x\to 0$，$\Delta y\to 0$，从而 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0$，故 $\alpha\to 0$。所以，当$\Delta t\to 0$时，有

$$\alpha\frac{\rho}{\Delta t}=\alpha\frac{|\Delta t|}{\Delta t}\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}\to 0$$

而$\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$ 与 Δt 无关。于是，对(2)式取极限($\Delta t\to 0$)，得

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

例1 设$z=e^x\mathrm{arctg}\,y$，其中 $x=\sin t$，$y=\cos t$，求$\frac{dz}{dt}$。

解 x，y是中间变量，t 是自变量。为了用求导公式，先分别求对中间变量的偏导数和中间变量对自变量的导数，有

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^x\mathrm{arc\ tg}\,y,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{e^x}{1+y^2}$$

$$\frac{dx}{dt}=\cos t,\quad \frac{dy}{dt}=-\sin t$$

由公式(16.6)，有

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt}&=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\\&=e^x\mathrm{arc\ tg}\,y\cdot\cos t+\frac{e^x}{1+y^2}\cdot(-\sin t)\\&=e^{\sin t}\left(\cos t\ \mathrm{arc\ tg}\cos t-\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\right)\end{aligned}$$

由此例看到，一般来说，中间变量的偏导数$\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$仍是中间变量 x，y 的函数．因此，$\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$中的$x$与$y$分别要换成 $x=x(t)$，$y=y(t)$．

在相应条件下，对公式（16.5）不难推广到三元函数的情形．设 $u=f(x, y, z)$，其中 $x=x(t)$，$y=y(t)$，$z=z(t)$，则有

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} \quad (16.7)$$

例 2　设 $u=e^{x}(y-z)$，其中 $x=t$，$y=\sin t$，$z=\cos t$，求$\frac{du}{dt}$．

解　因为$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{x}(y-z)$，$\frac{\partial u}{\partial y}=e^{x}$，$\frac{\partial u}{\partial z}=-e^{x}$

$$\frac{dx}{dt}=1, \frac{dy}{dt}=\cos t, \quad \frac{dz}{dt}=-\sin t$$

于是，由公式（16.7）有

$$\frac{du}{dt}=e^{x}(y-z)+e^{x}\cos t+e^{x}\sin t$$

$$=e^{t}(\sin t-\cos t+\cos t+\sin t)=2e^{t}\sin t$$

例 3　设 $z=xy+\ln t$，其中 $x=a^{t}$，$y=\sqrt{1+t}$，求$\frac{dz}{dt}$．

解　这个题的一般形式是 $z=f(x, y, t)$，$x=x(t)$，$y=y(t)$．于是，x，y，t 是中间变量，t 又是自变量，由公式（16.6），有

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial t}$$

因为　$\frac{\partial z}{\partial x}=y, \frac{\partial z}{\partial y}=x, \frac{\partial z}{\partial t}=\frac{1}{t}$

$$\frac{dx}{dt}=a^t\ln a,\ \frac{dy}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{1+t}}$$

所以
$$\frac{dz}{dt}=y\cdot a^t\ln a+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+t}}+\frac{1}{t}$$
$$=\ln a\sqrt{1+t}\,a^t+\frac{a^t}{2\sqrt{1+t}}+\frac{1}{t}$$

以上讨论的函数都是经过复合之后是一元函数的简单情形。下面我们讨论经过复合之后仍是多元函数的情形。

设 $z=f(x,\ y)$，$x=x(s,\ t)$，$y=y(s,\ t)$，复合后得s,t的二元函数 $z=f[x(s,\ t),\ y(s,\ t)]$。怎样求$\frac{\partial z}{\partial s}$，$\frac{\partial z}{\partial t}$呢？

这里x，y是中间变量，s，t 是自变量。对s求偏导数时，把t看作常量，这实质上就化为已讨论过的简单情形。只须在公式（16.5）中将导数相应地换成偏导数即可。于是，有下面的定理。

定理16.5 如果函数 $x=x(s,\ t)$，$y=y(s,\ t)$在点$(s,\ t)$可微，函数 $z=f(x,\ y)$在点 $(x,\ y)=[x(s,\ t),\ y(s,\ t)]$ 也可微，则复合函数 $z=f[x(s,\ t),\ y(s,\ t)]$在点$(s,\ t)$ 存在偏导数，且

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$$
$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\qquad(16.8)$$

例 4 设 $z=x\sin y$，其中 $x=st$，$y=2t+s$，求偏导数$\frac{\partial z}{\partial s}$，$\frac{\partial z}{\partial t}$。

解 函数 z 是以 x，y 为中间变量，以 s，t 为自变量的复合函数，由公式（16.8），有

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}=\sin y\cdot t+x\cos y\cdot 1$$

$$= t\sin(2t+s) + st\cos(2t+s)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} = \sin y\cdot s + x\cos y\cdot 2$$

$$= s\sin(2t+s) + 2st\cos(2t+s)$$

例 5 设$z=f(x+y,\ x-y)$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 设 $u=x+y$，$v=x-y$，则 z 是以 u，v 为中间变量，以 x，y 为自变量的复合函数. 由公式（16.8），有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}$$

对于一般形式给出的复合函数的偏导数，为了书写简便，有时用符号 f_1' 和 f_2' 分别表示函数 $z=f(x,\ y)$ 对第一个中间变量 x 和第二个中间变量 y 的偏导数. 如例 5 中对u，v的偏导数记为

$$\frac{\partial f}{\partial u} = f_1',\quad \frac{\partial f}{\partial v} = f_2'$$

于是，例 5 的结果可简写为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1' + f_2',\quad \frac{\partial z}{\partial y} = f_1' - f_2'$$

例 6 设 $u=f(x,\ xy,\ xyz)$，求$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial z}$.

解 这里 x，xy，xyz 是中间变量，又x，y，z都是自变量. 于是，分别有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1' + f_2'\cdot y + f_3'\cdot yz = f_1' + yf_2' + yzf_3'$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f_1'\cdot 0 + f_2'\cdot x + f_3'\cdot xz = xf_2' + xzf_3'$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=f_1'\cdot 0+f_2'\cdot 0+f_3'\cdot xy=xyf_3'$$

二　一阶微分形式的不变性

我们知道，对一元函数 $y=f(x)$，具有一阶微分形式的不变性，即 x 是自变量还是中间变量都是 $dy=f'(x)dx$。多元函数也有一阶全微分形式的不变性。

设有二元函数

$$z=f(x,\ y)$$

当 x，y 为自变量时，函数的全微分为

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

如果 x，y 为中间变量，即

$$x=x(t),\quad y=y(t)$$

复合后得 s，t 的二元函数

$$z=f[x(s,\ t),\ y(s,\ t)]$$

它的全微分是

$$dz=\frac{\partial f}{\partial s}ds+\frac{\partial f}{\partial t}dt$$

由复合函数的求导公式，有

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

把它代入（2）式，合并同类项，得

$$dy=\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial s}ds+\frac{\partial x}{\partial t}dt\right)$$

$$+\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial s}ds+\frac{\partial y}{\partial t}dt\right)$$

不难看到，上式两个括弧分别是函数 $x=x(s,\ t)$，$y=y(s,\ t)$

的全微分，即

$$\frac{\partial x}{\partial s}ds+\frac{\partial x}{\partial t}dt=dx$$

$$\frac{\partial y}{\partial s}ds+\frac{\partial y}{\partial t}dt=dy$$

于是

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy \qquad (2)$$

由（1）式与（2）式看出，无论 x，y 是自变量，还是中间变量，它们的全微分形式是相同的。这个性质叫做**一阶全微分形式的不变性**。

利用一阶全微分形式的不变性，我们可得出多元函数全微分的四则运算法则。当 u，v 为自变量时，有

$$d(u\pm v)=du\pm dv$$

$$d(u,\ v)=vdu+udv$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}\quad(v\neq 0)$$

由一阶全微分形式的不变性，当 u，v 为 x，y 的函数时，上式仍然成立。

有了一阶全微分形式的不变性和全微分的四则运算法则，我们可以通过全微分来求多元函数的偏导数。

例7 设$z=\mathrm{arctg}\frac{y}{x}$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$。

解 设 $u=\frac{y}{x}$，$z=\mathrm{arctg}u$，由一阶微分形式的不变性，

有

$$dz=\frac{1}{1+u^2}du=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{xdy-ydx}{x^2}$$

$$=\frac{1}{x^2+y^2}(xdy-ydx)$$

于是，由定理16.1知，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

例 8 设 $z=e^{xy}+\cos xy$，求$\frac{\partial z}{\partial z}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 由微分法则，有

$$\begin{aligned}dz&=d(e^{xy}+\cos xy)=de^{xy}+d\cos xy\\&=e^{xy}d(xy)-\sin xyd(xy)\\&=e^{xy}(ydx+xdy)-\sin xy(ydx+xdy)\\&=(e^{xy}-\sin xy)ydx+(e^{xy}-\sin xy)xdy\end{aligned}$$

于是，
$$\frac{\partial z}{\partial x}=(e^{xy}-\sin xy)y,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=(e^{xy}-\sin xy)x$$

§16.5 高阶偏导数和高阶全微分

一 高阶偏导数

设函数 $z=f(x,y)$在区域D内存在偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,y)$$

一般说来，$f'_x(x,y)$和$f'_y(x,y)$仍是 x，y 的函数．如果它们还存在偏导数，则称 $z=f(x,y)$的**二阶偏导数**，分别记作

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{x^2}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{y^2}(x, y)$$

一般地，如果 $z=f(x, y)$ 的 $n-1$ 阶偏导数仍存在偏导数，则称此偏导数为 $z=f(x, y)$ 的 **n 阶偏导数**。二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数。这样，$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$叫做一阶偏导数。$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$，叫做**二阶混合偏导数**。

由高阶偏导数的定义可知，求高阶偏导数只是按照求导法则及求导公式逐阶求偏导数即可。

例1 求函数 $z=x^3y^3-xy^2$ 的二阶混合偏导数。

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^3-y^2$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=9x^2y^2-2y$

$\frac{\partial z}{\partial y}=3x^3y^2-2xy$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=9x^2y^2-2y$

例2 求函数

$$f(x, y)=\begin{cases}xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点（0，0）的混合偏导数。

解 当 $x^2+y^2\neq 0$，即$(x, y)\neq(0, 0)$时，有

$$f'_x(x, y)=\frac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2}+\frac{xy[2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)]}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{y}{x^2+y^2}\left(x^2-y^2+\frac{4x^2y^2}{x^2+y^2}\right)$$

$$f'_y(x,y)=\frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}+$$

$$\frac{xy[-2y(x^2+y^2)-2y(x^2-y^2)]}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{x}{x^2+y^2}\left(x^2-y^2-\frac{4x^2y^2}{x^2+y^2}\right)$$

而在点（0，0）的偏导数，由偏导数的定义，有

$$f'_x(0,\ 0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,\ 0)-f(0,\ 0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0$$

同理，有 $f'_y(0,\ 0)=0$。于是，在点（0，0）的两个二阶混合偏导数分别是

$$f'_{yx}(0,\ 0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f'_x(0,\ \Delta y)-f'_x(0,\ 0)}{\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y\left[\frac{-(\Delta y)^2}{(\Delta y)^2}-0\right]}{\Delta y}=-1$$

与

$$f'_{xy}(0,\ 0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'_y(\Delta x,\ 0)-f'_y(0,\ 0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\left[\frac{(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2}-0\right]}{\Delta x}=1$$

由上面两例看到，多元函数的二阶混合偏导可能相等，也可能不等，那么在什么条件下两个二阶混合偏导数相等呢？有下面混合偏导数的换序定理：

定理16.6 设函数$z=f(x,\ y)$在点$P(x_0,\ y_0)$的某邻域内存在二阶偏导数 $f''_{xy}(x,\ y)$，$f''_{yx}(x,\ y)$，且它们在点 $P(x_0, y_0)$ 连续，则

$$f''_{xy}(x_0,\ y_0)=f''_{yx}(x_0,\ y_0)$$

证明 由二阶偏导数的定义，有

$$f''_{xy}(x_0,\ y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'_y(x_0+\Delta x,\ y_0)-f'_y(x_0,\ y_0)}{\Delta x}$$

而

$$f'_y(x_0+\Delta x, y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x, y_0)}{\Delta y}$$

$$f'_y(x_0, y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

于是

$$f''_{xy}(x_0, y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0+\Delta y)+f(x_0,y_0)}{\Delta x\Delta y} \qquad (1)$$

令 $\Delta=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0,y_0+\Delta y)+f(x_0, y_0)$

设 $\varphi(x)=f(x, y_0+\Delta y)-f(x, y_0)$

则 $\Delta=\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)$

因为 $f(x, y)$在点 $P(x_0, y_0)$ 的邻域内存在一阶偏导数，所以一元函数 $\varphi(x)$在点 x_0 与 $x_0+\Delta x$ 之间可导，由拉格朗日中值定理，有

$$\Delta=\varphi'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x=[f'_x(x_0+\theta\Delta x, y_0+\Delta y)-f'_x(x_0+\theta\Delta x, y_0)]\Delta x,\ 0<\theta<1$$

由题设，一元函数 $\psi(y)=f'_x(x_0+\theta\Delta x, y)$在点 y_0 与$y_0+\Delta y$之间可导，由拉格朗日中值定理，有

$$\Delta=[f'_x(x_0+\theta\Delta x, y_0+\Delta y)-f'_x(x_0+\theta\Delta x,y_0)]\Delta x$$
$$=f''_{yx}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta_1\Delta y)\Delta y\Delta x,\ 0<\theta_1<1$$

由于 $f''_{yx}(x, y)$在点 $P(x_0, y_0)$连续，将上式代入（1），得

$$f''_{xy}(x_0, y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0+\Delta y)+f(x_0,y_0)}{\Delta x\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\lim_{\Delta y\to 0} f_{yx}(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta_1\Delta y)$$

$$=f''_{yx}(x_0,\ y_0)$$

即 $$f''_{xy}(x_0,\ y_0)=f''_{yx}(x_0,\ y_0)$$ □

由高阶偏导数的定义知，二元函数 $z=f(x,\ y)$的 n 阶偏导数共有 2^n 个，如果 2^n 个 n 阶偏导数都连续，每个 n 阶混合偏导数经过交换次序，总可化为 $\frac{\partial^n z}{\partial x^k \partial y^{n-k}}$ 的形式，其中 $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$.

求复合函数的高阶偏导数，可以应用链锁法则。

例 3　设$z=f(x,\ y)$, $x=\varphi(s,t)$, $y=\psi(s,t)$, 求$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$.

解　$$\frac{\partial z}{\partial t}=f'_x\cdot x'_t+f'_y\cdot y'_t=f'_x\cdot\varphi'_t+f'_y\cdot\psi'_t$$

求二阶偏导数时，要注意 f'_x 与 f'_y 都是中间变量 x 与 y的二元函数，有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\varphi'_t[f''_{x^2}\cdot\varphi'_t+f''_{yx}\psi'_t]+f'_x\cdot\ \varphi''_{t^2}+\psi'_t[f''_{xy}\cdot$$

$$\varphi'_t+f''_{y^2}\psi_t]+f'_y\cdot\psi''_{t^2}$$

例 4　设 $z=F(x,\ y)$, $y=f(x)$, 求$\frac{d^2 z}{dx^2}$.

解　$$\frac{dz}{dx}=F'_x+F'_y\cdot f'(x)$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2}=F''_{x^2}+\ F''_{yx}f'(x)\ +\ [F''_{xy}+F''_{y^2}\cdot f'(x)]\cdot$$

$$f'(x)+F'_y\cdot f''(x)$$

$$=F''_{x^2}+F''_{yx}\cdot f'(x)+F''_{xy}\cdot f'(x)+F''_{y^2}$$

$$[f'(x)]^2+F'_y\cdot f''(x)$$

如果 $F''_{xy}(x,\ y)$, $F''_{yx}(x,\ y)$连续，则

$$\frac{d^2 z}{dx^2}=F''_{x^2}+2F''_{xy}\cdot f'(x)+F''_{y^2}[f'(x)]^2$$

$+F'_y\cdot f''(x)$

二 高阶微分

我们知道，如果函数 $z=f(x, y)$在点 (x, y)存在连续的偏导数，则 $z=f(x, y)$ 在点(x, y)可微，且 $dz=f'_x(x, y)dx+f'_y(x, y)dy$，其中 x, y 的改变量 dx, dy 与点(x, y)无关，而 $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$还是 x, y 的函数．因此，全微分 dz 仍是 x, y 的函数．如果 dz 可微，它的全微分 $d(dz)$，称为函数 $z=f(x, y)$ 的**二阶微分**，记作d^2z. 类似地二阶微分的全微分 $d(d^2z)=d^3z$ 称为 $z=f(x, y)$ 的**三阶微分**．一般地

定义 如果函数 $z=f(x, y)$在点 (x, y)存在直到 $n(n>1)$阶的连续偏导数，则它的 $n-1$ 阶微分的全微分，称为 $z=f(x, y)$的 n 阶微分，记作

$$d^nz=d(d^{n-1}z)$$

dz 称为 $z=f(x, y)$的一阶微分，高于一阶的微分统称为**高阶微分**.

由定义知，求高阶微分就是逐次求微分，需要注意的是，在计算过程中把 dx, dy 看作常量，而$f'_x(x, y)$, $f'_y(x,y)$是x, y的函数.

为了推出高阶微分的一般公式，我们先观察一下 $z=f(x, y)$的一、二、三阶微分

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$$d^2z=d(dz)=d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\right)$$

$$=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dy\right)dx+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy\right)dy$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$$

三阶微分，经计算整理得

$$d^3z=d(d^2z)=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}dx^2dy$$

$$+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3$$

虽然 dz，d^2z，d^3z 越来越复杂，但是，不难发现它们很有规律，类似于二项式展开．为此我们引入算符概念．

例如，$\frac{d}{dx}$是一个算符．算符$\frac{d}{dx}$将函数$\sin x$变成$\frac{d}{dx}\sin x=\cos x$．算符$\frac{d}{dx}$将函数$\mathrm{arctg}x$ 变成$\frac{d}{dx}\mathrm{arctg}x=\frac{1}{1+x^2}$．算符$\frac{d}{dx}$将函数 $f(x)$ 变成$\frac{d}{dx}f(x)=f'(x)$．

再如，$\frac{\partial}{\partial x}$，$\frac{\partial}{\partial y}$等也是算符．算符$\frac{\partial}{\partial x}$将函数 $\ln(1+xy)$ 变成$\frac{\partial}{\partial x}\ln(1+xy)=\frac{y}{1+xy}$．算符$\frac{\partial}{\partial y}$ 将函数 $\ln(1+xy)$ 变成$\frac{\partial}{\partial y}\ln(1+xy)=\frac{x}{1+xy}$．算符$\frac{\partial}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial}{\partial y}$将函数 $f(x,y)$ 分别变为$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=f'_x(x,y)$ 与 $\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=f'_y(x,y)$．

当将 dx 与 dy 看作常数时，将

$$\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^n$$

按二项式公式展开，是 $n+1$ 项 n 阶算符的和．例如，当 $n=3$ 时，是

$$\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^3$$

$$=dx^3\frac{\partial^3}{\partial x^3}+3dx^2dy\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+3dxdy^2\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}$$

$$+dy^3\frac{\partial^3}{\partial y^3}$$

于是，二元函数 $z=f(x,\ y)$ 在点$(x,\ y)$的微分 dz，d^2z，d^3z 可用算符简单记为

$$dz=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot f$$

$$d^2z=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\cdot f$$

$$d^3z=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^3\cdot f$$

用数学归纳法不难证明 n（$n>3$）阶微分是

$$d^nz=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^n\cdot f$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k dx^k dy^{n-k}\frac{\partial^n f}{\partial x^k\partial y^{n-k}}$$

同一元复合函数一样．设$z=f(x,\ y)$，$x=x(s,\ t)$与 $y=y(s,\ t)$，即 z 是二元复合函数．这时 dx 与 dy 是 s 与 t 的函数．一般来说，高阶微分不再具有微分形式的不变性。但是，如果 x 与 y 都是 s，t 的线性函数，那么 d^2x，d^2y，… 都是 0，从而高阶微分仍具有微分形式的不变性。

§16.6 泰勒公式

在全微分的应用中，我们曾指出，二元函数$z=f(x,\ y)$在一点存在全微分，其意义是在这一点的小邻域内可用线性函数近似代替这个函数．但是在某些实际问题中，用线性函数代替

精度不够，需要用高次多项式代替这个函数。这就是本节讨论的二元函数的泰勒公式。

我们先复习一下一元函数的泰勒公式。如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内存在直至 $n+1$ 阶导数，则对此邻域内任意x，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta\Delta x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$$(0<\theta<1)$$

为了书写方便起见，令 $x-x_0=\Delta x$。自变量的改变量Δx等于它的微分 dx，即 $\Delta x=dx$。于是

$$f'(x_0)(x-x_0)=f'(x_0)dx=df(x_0)$$

$$f''(x_0)(x-x_0)^2=f''(x_0)dx^2=d^2f(x_0)$$

$$\cdots\cdots$$

于是，泰勒公式可简写为

$$f(x)=f(x_0)+df(x_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0)+\cdots+$$

$$\frac{1}{n!}d^nf(x_0)+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_0+\theta\Delta x)$$

$$(0<\theta<1)$$

下面讨论二元函数的泰勒公式。其方法是通过适当的变换把二元函数化为一元函数，再利用一元函数的泰勒公式得出二元函数的泰勒公式。

定理16.7 如果函数 $z=f(x,\ y)$ 在点 $P_0(x_0,\ y_0)$的某邻域内存在直至 $n+1$ 阶连续偏导数，则对此邻域内任意一点 $P(x,\ y)=P(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$，有

$$f(x,\ y)=f(x_0,\ y_0)+df(x_0,\ y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0,\ y_0)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}d^nf(x_0, y_0)+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)$$

$$(0<\theta<1) \qquad (16.9)$$

分析 为把二元函数转化为一元函数，点 P_0 暂时固定，联结点 P_0 和 P，得线段 P_0P，设它的参数方程为

$$x=x_0+t\Delta x,\ y=y_0+t\Delta y\ (0\leqslant t\leqslant 1)$$

当局限于线段 P_0P 上考虑二元函数时，二元函数就变为关于变量 t 的一元函数

$$\varphi(t)=f(x_0+t\Delta x,\ y_0+t\Delta y)$$

于是，当 $t=0$ 时，$\varphi(0)=f(x_0, y_0)$，即对应于点 P_0；当 $t=1$ 时，$\varphi(1)=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=f(x, y)$，即对应于点 P。这样 $f(x, y)$ 在点 P 的值变为 $\varphi(t)$ 在点 $t=1$ 的值．利用 $\varphi(t)$ 的一元泰勒公式，即可得 $f(x, y)$ 的二元泰勒公式．

证明 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的邻域内任取一点 $P(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$．设线段 P_0P 的参数方程是

$$x=x_0+t\Delta x,\ y=y_0+t\Delta y\ (0\leqslant t\leqslant 1)$$

将参数方程代入函数 $f(x, y)$ 中，得变量 t 的一元函数

$$\varphi(t)=f(x, y)=f(x_0+t\Delta x,\ y_0+t\Delta y)$$

因为 $f(x, y)$ 在点 P_0 的邻域内存在直至 $n+1$ 阶连续偏导数，所以函数 $\varphi(t)$ 在 $[0,1]$ 上也存在 $n+1$ 阶导数。于是，$\varphi(t)$ 在点 $t=0$ 可展成一元泰勒公式

$$\varphi(t)=\varphi(0)+d\varphi(0)+\frac{1}{2!}d^2\varphi(0)+\cdots+\frac{1}{n!}d^n\varphi(0)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}\varphi(\theta t)\ (0<\theta<1).$$

在上式中，令 $t=1$，得

$$f(x, y)=\varphi(0)+d\varphi(0)+\frac{1}{2!}d^2\varphi(0)+\cdots+$$

$$\frac{1}{n!}d^n\varphi(0)+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}\varphi(\theta)(0<\theta<1)$$

$$(1)$$

现在只要把$\varphi(t)$及其各阶微分用$f(x, y)$及其各阶微分表示出就可以。

因为参数方程的x与y是关于t的线性函数，由上节知道，函数$f(x, y)$的高阶微分具有形式的不变性，即

$$d^k\varphi(t)=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^k\cdot\varphi(x_0+t\varDelta x, y_0+t\varDelta y)$$

当$t=0$时，有

$$d^k\varphi(0)=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^k\cdot f(x_0, y_0)=d^kf(x_0, y_0)$$

其中$k=0,1,2,\cdots,n$，$d^0f(x_0, y_0)=f(x_0, y_0)$。当$t=\theta$时，有

$$d^{n+1}\varphi(\theta)=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}\cdot f(x_0+\theta\varDelta x, y_0+\theta\varDelta y)$$

$$=d^{n+1}f(x_0+\theta\varDelta x, y_0+\theta\varDelta y)$$

于是，二元函数$z=f(x, y)$在点$P_0(x_0, y_0)$的泰勒公式是

$$f(x, y)=f(x_0, y_0)+df(x_0, y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0, y_0)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}d^nf(x_0, y_0)+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_0+\theta\varDelta x, y_0+\theta\varDelta y)$$ □

在泰勒公式（16.9）中，当$n=0$时，有

$$f(x, y)=f(x_0, y_0)+df(x_0+\theta\varDelta x, y_0+\theta\varDelta y)$$

即
$$f(x_0+\varDelta x, y_0+\varDelta y)=f(x_0, y_0)+f'_x(x_0+\theta\varDelta x, y_0+\theta\varDelta y)\varDelta x+f'_y(x_0+\theta\varDelta x, y_0+\theta\varDelta y)\varDelta y$$

$$(0<\theta<1)$$

当$n=1$时，有

$$f(x_0+\varDelta x, y_0+\varDelta y)=f(x_0, y_0)+f'_x(x_0, y_0)\varDelta x+f'_y(x_0, y_0)\varDelta y+\frac{1}{2!}\{f''_{x^2}(x_0+\theta\varDelta x, y_0+\theta\varDelta y)\varDelta x^2+2f''_{xy}(x_0+\theta\varDelta x, y_0+\theta\varDelta y)\varDelta x\varDelta y+f''_{y^2}(x_0+\theta\varDelta x, y_0+\theta\varDelta y)\varDelta y^2\}$$

$(0<\theta<1)$ (16.10)

我们知道，用一元函数的泰勒公式，可对函数值近似计算．同样，多元函数的泰勒公式也可对多元函数的函数值作近似计算．

例 计算$0.97^{1.05}$的近似值．

解 容易看出，我们所要计算的是二元函数$f(x, y)=x^y$在点$(0.97, 1.05)$的值．取$x_0=1$，$y_0=1$，$\Delta x=-0.03$，$\Delta y=0.05$．将函数$f(x, y)=x^y$在点$(x_0, y_0)=(1, 1)$展成泰勒公式可算出$0.97^{1.05}$的近似值．展开式中的项数愈多精确度就愈高．我们只取到$n=2$，即

$$(1+\Delta x)^{1+\Delta y}\approx f(1, 1)+df(1, 1)+\frac{1}{2}d^2f(1, 1) \tag{2}$$

为此我们先算出$f(x, y)=x^y$的一阶与二阶偏导数在点$(1, 1)$的值，即

$$f(x, y)=x^y,\ f(1, 1)=1$$
$$f'_x(x, y)=yx^{y-1},\ f'_x(1, 1)=1$$
$$f'_y(x, y)=x^y\ln x,\ f'_y(1, 1)=0$$
$$f''_{x^2}(x, y)=y(y-1)x^{y-2},\ f''_{x^2}(1, 1)=0$$
$$f''_{xy}(x, y)=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x,\ f''_{xy}(1, 1)=1$$
$$f''_{y^2}(x, y)=x^y\ln^2 x,\ f''_{y^2}(1, 1)=0$$

从而有

$$df(1, 1)=f'_x(1, 1)\Delta x+f'_y(1, 1)\Delta y=1\times(-0.03)+0\times 0.05=-0.03$$

$$d^2f(1, 1)=f''_{x^2}(1, 1)\Delta x^2+2f''_{xy}(1, 1)\Delta x\Delta y+f''_{y^2}(1, 1)\Delta y^2$$
$$=0\times(-0.03)^2+2\times(-0.03)\times 0.05+0\times(0.05)^2=-0.003$$

将$f(1, 1)$，$df(1, 1)$，$d^2f(1, 1)$代入（2）式，得

$$0.97^{1.05}\approx 1-0.03-0.003=0.967$$

§16.7 极　　值

多元函数的极值是多元函数微分学的一个重要应用。本节主要讨论二元函数的极值。

定义　设函数$z=f(x, y)$在点$P(x_0, y_0)$的某邻域内有定义，在此邻域内任意点$P(x, y)$，如果有不等式

$$f(x, y)\leqslant f(x_0, y_0) \text{ 或 } f(x, y)\geqslant f(x_0, y_0)$$

则称函数$z=f(x, y)$在点P取极大值$f(x_0, y_0)$或极小值$f(x_0, y_0)$；点$P(x_0, y_0)$称为极值点。

由极值定义看到，极值与最大、最小值不同，前者是局部概念，而后者是整体概念。

下面我们给出函数$f(x, y)$在点$P(x_0, y_0)$取极值的必要条件。

定理16.8　如果函数$f(x, y)$在点$P(x_0, y_0)$可微，且在点$P(x_0, y_0)$取极值，则

$$f'_x(x_0, y_0)=0, \quad f'_y(x_0, y_0)=0$$

证明　我们不妨设函数$f(x, y)$在点$P(x_0, y_0)$取极大值。根据极大值的定义，存在点P的某邻域，在此邻域内任意点(x, y)，有

$$f(x, y)\leqslant f(x_0, y_0)$$

因而在此邻域内固定$y=y_0$，即在平行于x轴的直线$y=y_0$上任何一点，也有

$$f(x, y_0)\leqslant f(x_0, y_0)$$

即x的一元函数$\varphi(x)=f(x, y_0)$在点x_0取极大值。又$f(x, y)$在点P可微，所以存在偏导数。于是，根据一元函数取极值的必要条件，有

$$\varphi'(x_0)=f'_x(x_0, y_0)=0$$

同理有

$$\psi'(y_0)=f'_y(x_0, y_0)=0$$

即 $\qquad f'_x(x_0, y_0)=0,\ f'_y(x_0, y_0)=0$ □

我们把满足方程

$$\begin{cases} f'_x(x, y)=0 \\ f'_y(x, y)=0 \end{cases}$$

的点 (x, y)，称函数 $f(x, y)$ 的**稳定点**.

定理16.8说明，如果函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 可微，且点 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 的极值点，那么点 (x_0, y_0) 必是 $f(x, y)$ 的稳定点. 但反之未必. 例如，函数 $f(x, y)=xy$，令

$$f'_x(x, y)=y=0,\ f'_y(x, y)=x=0$$

有唯一的稳定点 $(0, 0)$，但它不是极值点. 这是因为 $f(0, 0)=0$ 而在点 $(0, 0)$ 的任一邻域内，一、三象限点 (x, y) 的函数值 $f(x, y)>0$，二、四象限点 (x, y) 的函数值 $f(x, y)<0$，所以，点 $(0, 0)$ 不是极值点.

那么在什么条件下，函数的稳定点才是极值点呢？于是有下面充分性的定理.

定理16.9 设函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 的某邻域内存在连续的一阶和二阶偏导数，并设 $A=f''_{x^2}(x_0, y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0, y_0)$，$C=f''_{y^2}(x_0, y_0)$. 又点 P 是 $f(x, y)$ 的稳定点，有

(i) 如果 $B^2-AC<0$，则 $f(x, y)$ 在点 P 取极值，当 $A<0$（或 $C<0$）时，取极大值；当 $A>0$（或 $C>0$）时，取极小值.

(ii) 如果 $B^2-AC>0$，则 $f(x, y)$ 在点 P 不取极值.

(iii) 如果 $B^2-AC=0$，则 $f(x, y)$ 在点 P 可能取极值，也可能不取极值.

证明 在点 $P(x_0, y_0)$ 的邻域内任取一点 $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$. 由泰勒公式 (16.10)，有

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)=f'_x(x_0, y_0)\Delta x+f'_y(x_0, y_0)\Delta y+\frac{1}{2!}\{f''_{x^2}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta x^2+2f''_{xy}(x_0+$$

$\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y)\Delta x\Delta y+f''_{y^2}(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y)\Delta y^2\}$

$$(0<\theta<1) \qquad (1)$$

已知 $f''_{x^2}(x,\ y)$，$f''_{xy}(x,\ y)$，$f''_{y^2}(x,\ y)$ 在点 $(x_0,\ y_0)$ 连续，有

$$f''_{x^2}(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y)=f''_{x^2}(x_0,\ y_0)+\varepsilon_1=A+\varepsilon_1$$

$$f''_{xy}(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y)=f''_{xy}(x_0,\ y_0)+\varepsilon_2=B+\varepsilon_2$$

$$f''_{y^2}(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y)=f''_{y^2}(x_0,\ y_0)+\varepsilon_3=C+\varepsilon_3$$

其中 ε_1，ε_2，ε_3 是当 $\Delta x\to 0$ 与 $\Delta y\to 0$ 时的无穷小量。又点 $(x_0,\ y_0)$ 是 $f(x,\ y)$的稳定点，所以 $f'_x(x_0,\ y_0)=0$，$f'_y(x_0,\ y_0)=0$。于是，（1）式可写为

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0)=\frac{1}{2}(A\Delta x^2+2B\Delta x\Delta y+C\Delta y^2)+\frac{1}{2}(\varepsilon_1\Delta x^2+2\varepsilon_2\Delta x\Delta y+\varepsilon_3\Delta y^2)$$

由于 ε_1，ε_2，ε_3 是当 $\Delta x\to 0$ 与 $\Delta y\to 0$ 时的无穷小量，所以上式右端$\frac{1}{2}(\varepsilon_1\Delta x^2+2\varepsilon_2\Delta x\Delta y+\varepsilon_3\Delta y^2)$是 $\Delta x^2+\Delta y^2$ 的高阶无穷小（当 $\Delta x\to 0$ 与 $\Delta y\to 0$ 时）。于是

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0)$$

$$=\frac{1}{2}(A\Delta x^2+2B\Delta x\Delta y+C\Delta y^2)+o(\rho^2) \qquad (2)$$

其中 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$。当$A\neq 0$ 时，（2）式可改写为

$$\Delta z=\frac{1}{2A}\{(A\Delta x+B\Delta y)^2+(AC-B^2)\Delta y^2\}+o(\rho^2)$$

令
$$M=\frac{1}{2A}\{(A\Delta x+B\Delta y)^2+(AC-B^2)\Delta y^2\} \qquad (3)$$

由于 $o(\rho^2)$ 是 $\rho^2=\Delta x^2+\Delta y^2$ 的高阶无穷小，所以当$|\Delta x|$与$|\Delta y|$充分小时，Δz 的符号由M决定，即 Δz 的符号与M的符号一致。而M的符号是由 B^2-AC 与A的符号所决定。

(i) 当 $B^2-AC<0$ 时，A与C都不能为零，且A与C同号。这时因为（3）式花括号内的数值恒为正，故M与A同

号．所以当$A>0$时，有$M>0$，即 $\Delta z>0$。于是，由极值的定义，$z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取极小值；当$A<0$时，有$M<0$，即$\Delta z<0$，于是，$z=f(x, y)$ 在点(x_0, y_0) 取极大值。

(ii) 当 $B^2-AC>0$ 时，我们分三种情况讨论：

(1) 当$A\neq 0$时，设$A>0$。一方面，取 $\Delta y\neq 0$，总存在 $\Delta x=-\frac{B\Delta y}{A}$，使 $A\Delta x+B\Delta y=0$. 对这样的$\Delta x, \Delta y$，由 (3) 式，有$M<0$，即$\Delta z<0$；另一方面，取$\Delta y=0$，对任一 Δx，由 (3) 式，有$M>0$，即$\Delta z>0$。这说明，在点(x_0, y_0) 的邻域内 Δz 改变符号．于是，$f(x, y)$在点 (x_0, y_0)不取极值．同理可证$A<0$时，也不取极值．

(2) 当$A=0$ 时，$C\neq 0$，(3) 式可变为

$$M=\frac{1}{2C}\{(B\Delta x+C\Delta y)^2+(AC-B^2)\Delta x^2\}$$

这时同 (1) 的讨论完全一样，无论 $C>0$ 还是 $C<0$，都不取极值．

(3) 当$A=C=0$ 时，由 (2) 式有

$$\Delta z=B\Delta x\Delta y+o(\rho^2)$$

显然，当 Δx 或 Δy 改变符号时，Δz 也改变符号．于是，$f(x, y)$在点 (x_0, y_0)不取极值．

(iii) 当 $B^2-AC=0$ 时，不能断定 $f(x, y)$ 在点(x_0,y_0)能否取极值，需要进一步讨论．例如，函数 $z=(x^2+y^2)^2$在点 $(0, 0)$取极小值；函数 $z=-(x^2+y^2)^2$在点 $(0, 0)$ 取极大值；函数 $z=xy^2$ 在点 $(0, 0)$ 不取极值．但是它们在点 $(0, 0)$ 都有$B^2-AC=0$. □

由函数取极值的必要条件和充分条件，现将求二元函数 $z=f(x, y)$ 极值的步骤归纳如下：

1．解联立方程

$$\begin{cases} f'_x(x, y)=0 \\ f'_y(x, y)=0 \end{cases}$$

求所有稳定点．设点 (x_0, y_0) 是它的一个稳定点．

2. 求三个二阶偏导数在每一个稳定点(x_0, y_0)的值．设 $A=f''_{x^2}(x_0, y_0), B=f''_{xy}(x_0, y_0), C=f''_{y^2}(x_0, y_0)$

3. 由 B^2-AC 与A（或C）的符号，按下表判定是否取极值．如果取极值是取极大值还是取极小值：

B^2-AC	−		+	0
A（或 C）	+	−	不取极值	不　　定
	极小值	极大值		

例1　求函数 $f(x, y)=4(x-y)-x^2-y^2$的极值．

解　解方程组

$$\begin{cases} f'_x(x, y)=4-2x=0 \\ f'_y(x, y)=-4-2y=0 \end{cases}$$

解得稳定点为$(2, -2)$．求三个二阶偏导数

$$f''_{x^2}(x, y)=-2, f''_{xy}(x, y)=0, f''_{y^2}(x, y)=-2$$

它在稳定点$(2, -2)$的值为

$$A=f''_{x^2}(2, -2)=-2, B=f''_{xy}(2, -2)=0,$$

$$C=f''_{y^2}(2, -2)=-2$$

因为 $B^2-AC=0-(-2)\times(-2)=-4<0$，又$A=-2<0$，所以 $f(x, y)$ 在点$(2, -2)$取极大值，其极大值为 $f(2, -2)=4(2+2)-4-4=8$．

例2　确定函数 $f(x, y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值点．

解　解方程组

$$\begin{cases} f'_x(x, y)=3x^2+6x-9=0 & (1) \\ f'_y(x, y)=-3y^2+6y=0 & (1) \end{cases}$$

解得稳定点为

$$(1,0),(1,2),(-3,0),(-3,2)$$

三个二阶偏导数为

$$f''_{x^2}(x, y)=6x+6, \qquad f''_{xy}(x, y)=0,$$

$$f''_{y^2}(x, y)=-6y+6$$

下面分别判定在每个稳定点上 B^2-AC 的符号：

点 $(1,0)$，$B^2-AC=-12\times6<0$，$A=12>0$，是极小值点；

点 $(1, 2)$，$B^2-AC=-12\times(-6)>0$，不是极值点；

点 $(-3, 0)$，$B^2-AC=-(-12)\times6>0$，不是极值点；

点 $(-3, 2)$，$B^2-AC=-(-12)\times(-6)<0$，$A=-12<0$，是极大值点。

同一元函数一样，可利用函数的极值求某些函数的最大值和最小值。如果二元函数 $f(x, y)$ 在闭区域D上连续，并且存在一阶和二阶连续偏导数。我们知道，$f(x,y)$在D上必能取到最大值和最小值，而且可由 $f(x, y)$在D上所有极值和它在边界上的最大值、最小值相比较而求得。

例 3　求函数 $f(x, y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$在圆域 $x^2+y^2\leqslant1$ 上的最大值。

解　先求极值。解方程组

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}=0 \\ f'_y(x,y)=\dfrac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}=0 \end{cases}$$

解得稳定点（0， 0）三个二阶偏导数为

$$f''_{x^2}(x, y)=\frac{y^2-4}{(4-x^2-y^2)^{3/2}}, \; f''_{xy}(x, y)=\frac{-xy}{(4-x^2-y^2)^{3/2}}, \; f''_{y^2}(x, y)=\frac{x^2-4}{(4-x^2-y^2)^{3/2}}$$

在点(0,0)，$B^2-AC=-\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}<0$，$A<0$，故取极大值，极大值为 $f(0,\ 0)=2$.

其次在区域的边界上，即圆周 $x^2+y^2=1$ 上，$f(x,\ y)$ 的值恒为$\sqrt{3}$。

综上讨论，所给函数 $f(x,\ y)$在点 (0, 0) 取最大值2。

上面我们虽然给出了求最大值和最小值的一般方法。但在一般情况下求二元函数在区域的边界上的最大值和最小值是很复杂的。如果在某些实际问题中，根据实际问题的性质，可以断定函数在区域内部取到最大值（或最小值），又函数在区域内只有一个稳定点，那么函数在该稳定点一定取最大值（或最小值）。

例4 将正数 a 表为三个非负数的和，问这三个数各为多少它们的乘积最大。

解 设其中的两个数为 x, y，则第三个数为$a-x-y$. 我们的问题是求二元函数

$$f(x,\ y)=xy(a-x-y)$$

在闭区域 $D=\{(x,\ y)\,|x+y\leqslant a,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$ 上的最大值. 闭区域 D是由两个坐标轴和直线 $x+y=a$ 所围成的直角三角形(如图16.6)。

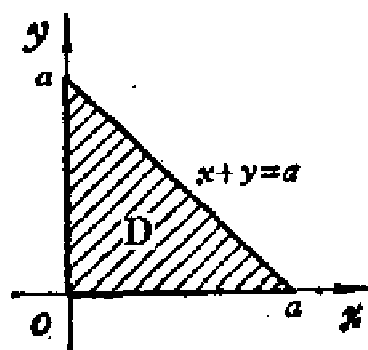


图16.6

因为 $f(x,\ y)$在D上连续，故在D上能取到最大值. 显然，在D的边界上，有$f(x,\ y)=0$. 而在D内的任一点$(x,\ y)$，$f(x,\ y)>0$，故 $f(x,\ y)$的最大值在D内取到。

解方程组

$$\begin{cases} f'_x(x,\ y)=ay-2xy-y^2=0 \\ f'_y(x,\ y)=ax-2xy-x^2=0 \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} a-2x-y=0 \\ a-2y-x=0 \end{cases}$$

解得D内唯一稳定点$\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$, $f(x, y)$ 在点$\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$一定取到最大值．即将$a$三等分时，它们的乘积最大．

例 5　在半径为a的圆的内接三角形中，求面积为最大的三角形．

解　设三角形 ABC 为圆的任意内接三角形，三角形的三个顶点 A, B, C 分别与圆的中心O相连接．把三角形ABC分成三个小三角形 ABO, BCO, CAO（如图16.7）．设中心角$\angle AOB=\theta$, $\angle BOC=\varphi$, 则$\angle COA=2\pi-(\theta+\varphi)$．由三角学知，三个小三角形的面积分别为

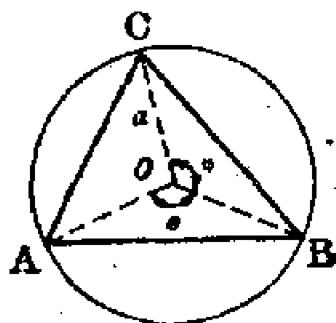


图16.7

$$\frac{1}{2}a^2\sin\theta, \quad \frac{1}{2}a^2\sin\varphi,$$

$$\frac{1}{2}a^2\sin[2\pi-(\theta+\varphi)]=-\frac{1}{2}a^2\sin(\theta+\varphi)$$

于是，我们的问题是求二元函数

$$f(\theta, \varphi)=\frac{1}{2}a^2\{\sin\theta+\sin\varphi-\sin(\theta+\varphi)\}$$

在区域 $D=\{(\theta, \varphi)|\, 0\leqslant\theta\leqslant\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi, 0\leqslant\theta+\varphi\leqslant2\pi\}$上的最大值．由于$f(\theta, \varphi)$在闭区域$D$上连续，它在$D$上能取到最大值．又$f(\theta, \varphi)$在$D$的边界上的值为零，即当 $\theta=0$ 或$\varphi=0$或 $\theta+\varphi=2\pi$ 时，$f(\theta, \varphi)=0$, 所以只能在D内部取最大值．解方程组

$$\begin{cases} f'_\theta(\theta, \varphi)=\frac{1}{2}a^2\{\cos\theta-\cos(\theta+\varphi)\}=0 \\ f'_\varphi(\theta, \varphi)=\frac{1}{2}a^2\{\cos\varphi-\cos(\theta+\varphi)\}=0 \end{cases}$$

解得$\theta=\varphi=\frac{2\pi}{3}$, 即$D$内有唯一稳定点$\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$．于是，它在

该稳定点取最大值$f\left(\frac{2\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3}\right)=3\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$。即内接正三角形的面积最大，其面积为$\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$。

学 习 指 导

一 内容概要

1．重点及要求

本章的重点是偏导数、全微分及复合函数的微分法。要求读者搞清偏导数的定义及其几何意义，熟练地掌握多元函数的微分法，尤其要正确掌握求复合函数高阶偏导数的方法。要弄清可微、偏导数、连续三者之间的关系以及方向导数与偏导数之间的关系。作为多元函数微分学的应用，掌握求极值的步骤及会求某些函数的最大值和最小值。

2．内容概要

我们应用一元函数在一点导数概念，由二元函数在一点的偏改变量，引入了二元函数在一点的偏导数。二元函数的偏导数是函数固定一个变量关于另一个变量的变化率，即二元函数沿平行于 x 轴及 y 轴方向的变化率。它实质上是两个特殊的一元函数的导数，即把二元函数分别看作 x 的一元函数（固定 y）和 y 的一元函数（固定 x）的导数，所以求偏导运算与求导运算没有本质的差别。

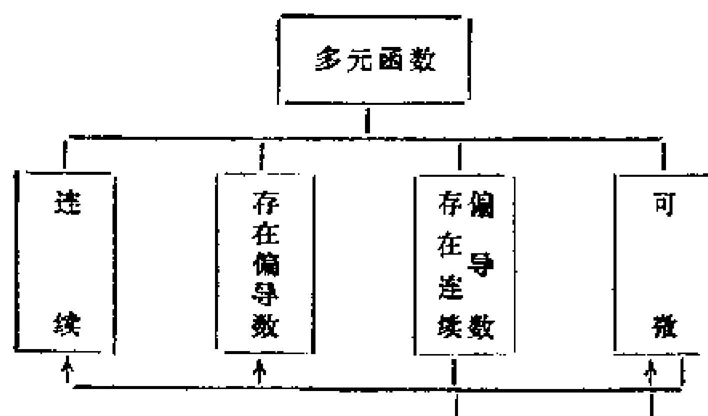
由偏导数的定义知，二元函数在一点存在两个偏导数，不能反映函数在该点邻域全面变化情况，所以偏导数与连续的关系是：二元函数在一点存在两个偏导数，但它在该点不一定连续；反之连续也不一定存在偏导数。

多元函数的全微分，刻划了函数在一点邻域的全面变化情况，可微与偏导数的关系是：可微必存在偏导数，但存在偏导

数未必可微．如果存在连续偏导数，则一定可微．

函数在一点可微，那么函数在这一点的改变量可用它在这一点的全微分近似代替，所以应用全微分可以近似计算函数在一点的函数值．

多元函数在一点连续、存在偏导数，可微之间的关系列表如下：



多元函数的方向导数是刻划函数在一点沿任一给定方向上的变化率，它与所给方向有关，可微函数一定存在方向导数．梯度是刻划函数在一点增加最快的方向，即函数在一点沿梯度方向的方向导数最大．

概括起来说，全微分、偏导数、方向导数、梯度，都是用来刻划函数在一点邻域内的变化情况．全微分、偏导数和方向导数都是数量，梯度是向量．

多元函数的微分法，主要掌握复合函数偏导数的求导法则．关键是应用链锁规则：函数对自变量的偏导数，等于函数对中间变量的偏导数乘以中间变量对该自变量偏导数之和，函数有几个与该自变量有关的中间变量其结果就有几项，函数有几次复合，每一项就有几个因子相乘．

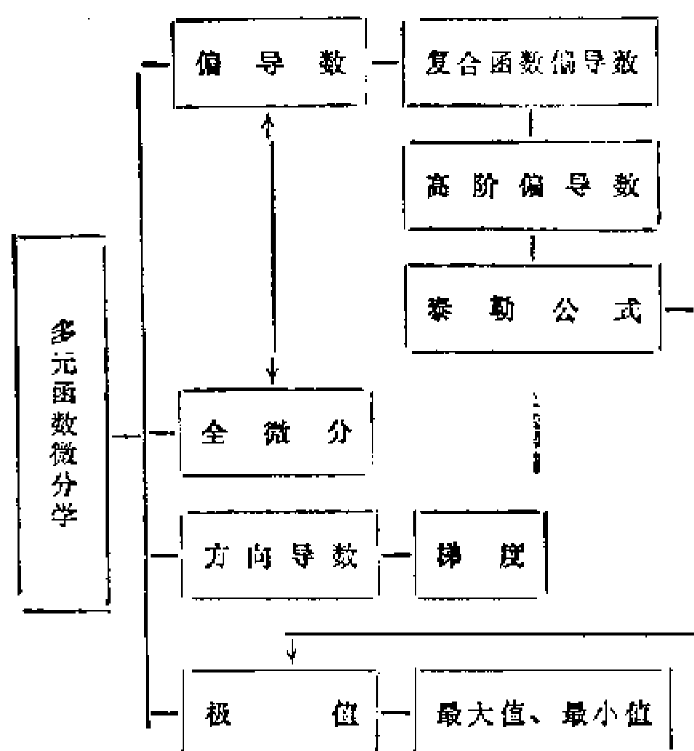
同一元函数一样，多元函数的高阶偏导数，逐阶求偏导数而得．二元函数的二阶偏导数有四个，n 阶偏导数有 2^n 个．如果各阶混合偏导数都连续，n 阶偏导数只有 $n+1$ 个．

我们应用一元函数的泰勒公式导出二元函数的泰勒公式．

多元函数的泰勒公式是研究多元函数的重要工具．应用多元函数的泰勒公式，可把多元函数用多元多项式近似地表示出来．也可应用它作多元函数的近似计算．

最后我们作为多元函数微分学的应用，讨论了多元函数的极值及多元函数在区域上的最大值和最小值．这些我们仅就二元函数存在一、二阶连续偏导数的条件下讨论的．

本章内容的主要结构如下：



二 几点说明

1．关于连续与偏导数、偏导数与可微之间的关系

我们已讨论了，连续不一定存在偏导数，存在偏导数也不一定连续．但利用泰勒公式，我们可以证明，如果偏导数有界，则一定连续．

定理 如果函数 $f(x, y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 的邻域 $U(P, \delta_1)$ 内，存在两个偏导数，且偏导数有界，则 $f(x, y)$ 在点 P 连续．

证明 由于在邻域 $U(P, \delta_1)$ 内 $f(x, y)$ 的偏导数有界，即存在常数 $M>0$，对任意 $(x, y)\in U(P, \delta_1)$，有

$$|f'_x(x, y)|\leqslant M, \quad |f'_y(x, y)|\leqslant M$$

由 $n=0$ 时的泰勒公式，有

$$\begin{aligned}
&|f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)|\\
&=|f'_x(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta x+f'_y(x_0+\theta\Delta x,\\
&\quad y_0+\theta\Delta y)\Delta y|\\
&\leqslant|f'_x(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)|\,|\Delta x|+|f'_y(x_0+\theta\Delta x,\\
&\quad y_0+\theta\Delta y)|\,|\Delta y|\\
&\leqslant M|\Delta x|+M|\Delta y|
\end{aligned}$$

于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在$\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{2M},\delta_1\right\}$，在$U(P, \delta_1)$ 内，当 $|\Delta x|<\delta$，$|\Delta y|<\delta$ 时，有

$$|f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)|<M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}+M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}$$

$$=\varepsilon$$

这就证明了 $f(x, y)$在点 $P(x_0, y_0)$ 连续. □

我们知道，函数存在连续偏导数，那么函数一定可微．但这只是一个充分条件，即函数可微不一定存在连续偏导数．

例 二元函数

$$z=f(x, y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点（0，0）可微，但两个偏导数不连续. □

解 先证明函数在点（0，0）可微．由偏导数的定义，有

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x, 0)-f(0,0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2\sin\dfrac{1}{\Delta x^2}}{\Delta x}=0$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y^2\ \sin\frac{1}{\Delta y^2}}{\Delta y}=0$$

于是

$$\Delta z=f(0+\Delta x,\ 0+\Delta y)-f(0,0)$$

$$=[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]\ \sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}-0$$

$$=f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y+\rho^2\ \sin\frac{1}{\rho^2}$$

$$=\rho^2\ \sin\frac{1}{\rho^2}$$

因为

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2\ \sin\frac{1}{\rho^2}}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\ \rho\cdot\sin\frac{1}{\rho^2}=0$$

即 $\rho^2\ \sin\frac{1}{\rho^2}=o(\rho)$，所以函数 $f(x,\ y)$在点 (0，0) 可微.

再证明函数的两个偏导数在点（0，0）不连续.

当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，

$$f'_x(x,y)=2x\ \sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2},$$

$$f'_y(x,y)=2y\ \sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

对 $f'_x(x,y)$ 我们取沿 x 轴 $P\to(0,0)$，即

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f'_x(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}}f'_x(x,0)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(2x\ \sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}\right)$$

上式右端第一项极限为0，而第二项极限不存在，即导函数

$f'_x(x, y)$ 在点（0，0）不存在极限，于是 $f'_x(x, y)$ 在点（0，0）不连续．同理可证 $f'_y(x, y)$ 在点（0，0）也不连续．

由定理16.1和16.2及这个例子说明，可微的条件比偏导数存在的条件强，而比存在连续偏导数的条件弱．

2　关于齐次函数

我们知道，由次数相同的项组成的多项式称为齐次多项式．例如，$x^2+3xy+y^2$是二次齐次多项式．对这个二次齐次多项式的 x 和 y 各乘上一个因子 t，则整个多项式获得因子t^2．显然，任何齐次多项式都具有这个性质．这种性质除齐次多项式之外对某些函数也具有．例如，函数

$$f(x, y)=x\sqrt{x^4+y^4}\ln\frac{y}{x}$$

对变量 x 和 y 都乘上 t（$t>0$），有

$$f(tx, ty)=tx\sqrt{(tx)^4+(ty)^4}\ln\frac{ty}{tx}$$

$$=t^3\left(x\sqrt{x^4+y^4}\ln\frac{y}{x}\right)=t^3f(x, y)$$

即获得因子 t^3．就这一点来说，这一类函数与齐次多项式类似．我们将这类函数叫做齐次函数，下面我们给出定义：

定义　设 n 元函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在邻域 U 内有定义，如果对所有的变量各乘上因子 t（为简单起见令 $t>0$），当点 $(tx_1, tx_2, \cdots, tx_n)\in U$时，就能获得因子 t^m（m 为实数），即

$$f(tx_1, tx_2 \cdots, tx_n)=t^mf(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

则称函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为**m次齐次函数**．

例如，函数

$$f(x, y)=x^4+y^4\cos\frac{x}{y}$$

就是 a 次齐次函数．

下面我们给出一个函数是齐次函数的必要充分条件。

定理 设函数 $f(x, y, z)$ 在三维空间区域 V 内有定义，如果 $f(x, y, z)$ 在 V 上有连续偏导数，对任意 $t>0$，它是 m 次齐次函数的必要充分条件是：

$$f'_x(x, y, z)\cdot x+f'_y(x, y, z)\cdot y+f'_z(x, y, z)\cdot z \\ =mf(x, y, z) \qquad (1)$$

证明 **必要性** 设点 (x, y, z) 为 V 上任意一点，因为 $f(x, y, z)$ 是 m 次齐次函数，有

$$f(tx, ty, tz)=t^m f(x, y, z)$$

由于 $f(x, y, z)$ 有连续偏导数，根据复合函数的求导法则，把上式两端对 t 求导数，有

$$f_1'(tx, ty, tz)\cdot x+f'_2(tx, ty, tz)\cdot y+f'_3(tx, ty, tz)\cdot z=mt^{m-1}f(x, y, z)$$

令 $t=1$，则有

$$f'_x(x, y, z)\cdot x+f'_y(x, y, z)\cdot y+f'_z(x, y, z)\cdot z \\ =mf(x, y, z)$$

充分性 设

$$\varphi(t)=\frac{f(tx, ty, tz)}{t^m} \quad (t>0)$$

显然，$\varphi(t)$ 可导，由商的求导公式，$\varphi'(t)$ 的分子为

$$[f_1'(tx, ty, tz)\cdot x+f_2'(tx, ty, tz)\cdot y+f_3'(tx, ty, tz)\cdot z]\cdot t^m-mt^{m-1}f(tx, ty, tz) \qquad (2)$$

提出公因子 t^{m-1}，并将(1)中的 x，y，z 分别换成 tx，ty，tz，则上面的差式 (2) 等于零，即 $\varphi'(t)=0$，从而 $\varphi(t)\equiv c$（c 是常数）。在 $\varphi(t)$ 的表达式中，令 $t=1$，得

$$c=f(x, y, z)$$

于是，得

$$f(tx, ty, tz)=t^m f(x, y, z)$$ □

3 我们在 §16.8 中只讨论了二元函数的极值，对二元以上的多元函数的极值也可类似讨论，在这里仅举一例加以说

明.

例 求三元函数

$$u=f(x,\ y,\ z)=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z}$$

在三维空间区域 $V=\{(x,\ y,\ z)|\ x>0,\ y>0,\ z>0\}$ 上的极值.

解 先求稳定点. 解方程组

$$\begin{cases} f'_x(x,\ y,z)=1-\dfrac{y^2}{4x^2}=0 \\ f'_y(x,\ y,\ z)=\dfrac{y}{2x}-\dfrac{z^2}{y^2}=0 \\ f'_z(x,\ y,\ z)=\dfrac{2z}{y}-\dfrac{2}{z^2}=0 \end{cases}$$

由于 $x>0,\ y>0,\ z>0$, 有

$$\begin{cases} 4x^2-y^2=0 \\ y^3-2xz^2=0 \\ z^3-y=0 \end{cases}$$

解得稳定点为$\left(\frac{1}{2},1,1\right)$, 为讨论

$$\Delta u=f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y,\ z_0+\Delta z)-f(x_0,\ y_0,z_0)$$

的符号, 先求各二阶偏导数在点$\left(\frac{1}{2},1,1\right)$的值

$$f''_{x^2}\left(\frac{1}{2},\ 1,\ 1\right)=\frac{y^2}{2x^3}\bigg|_{\left(\frac{1}{2},1,1\right)}=4$$

$$f''_{y^2}\left(\frac{1}{2},\ 1,\ 1\right)=\left(\frac{1}{2x}+\frac{2z^2}{y^3}\right)\bigg|_{\left(\frac{1}{2},1,1\right)}=3$$

$$f''_{z^2}\left(\frac{1}{2},\ 1,\ 1\right)=\left(\frac{2}{y}+\frac{4}{z^3}\right)\bigg|_{\left(\frac{1}{2},1,1\right)}=6$$

$$f''_{xy}\left(\frac{1}{2},\ 1,\ 1\right)=-\frac{y}{2x^2}\bigg|_{\left(\frac{1}{2},1,1\right)}=-2$$

$$f''_{xz}\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)=0$$

$$f''_{yz}\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)=-\frac{2z}{y^2}\Big|_{\left(\frac{1}{2},1,1\right)}=-2$$

于是，由三元函数当 $n=2$ 时的泰勒公式，有

$$\begin{aligned}\Delta u=&\frac{1}{2!}[f''_{x^2}(x, y, z)\Delta x^2+f''_{y^2}(x, y, z)\Delta y^2\\&+f''_{z^2}(x, y, z)\Delta z^2+2f''_{xy}(x, y, z)\Delta x\Delta y\\&+2f''_{xz}(x, y, z)\Delta x\Delta z+2f''_{yz}(x, y, z)\\&\Delta y\Delta z]_{\left(\frac{1}{2},1,1\right)}+0(\rho^2)\\=&\frac{1}{2}(4\Delta x^2+3\Delta y^2+6\Delta z^2-4\Delta x\Delta y-4\Delta y\Delta z)\\&+o(\rho^2)\\=&2\left(\Delta x-\frac{1}{2}\Delta y\right)^2+(\Delta y-\Delta z)^2+2\Delta z^2+o(\rho^2)\end{aligned}$$

其中 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$. 当 $|\Delta x|$，$|\Delta y|$，$|\Delta z|$ 很小时，Δu的符号由上式右端前三项所决定. 因为无论$\Delta x, \Delta y$, Δz的符号怎么样，上式右端前三项之和总是非负，即 $\Delta u=f\left(\frac{1}{2}+\Delta x, 1+\Delta y, 1+\Delta z\right)-f\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)\geqslant 0$ 所以函数在点$\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$取极小值$f\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)=4$.

三 例题选讲

例1 设 $z=(1+xy)^y$，求在点（1，1）的偏导数与全微分.

解 $z'_x=y(1+xy)^{y-1}\cdot y=y^2(1+xy)^{y-1}$. 为求对 y 的偏导数，先求对数然后求偏导数.

$$\ln z=y\ln(1+xy), \frac{1}{z}z'_y=\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}$$

从而得

$$z'_y=(1+xy)^y\left[\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}\right]$$

于是，有

$$z'_x(1,\ 1)=y^2(1+xy)^{y-1}\big|_{(1,1)}=1$$

$$z'_y(1,\ 1)=(1+xy)^y\left[\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}\right]\Bigg|_{(1,1)}$$

$$=1+2\ln2$$

又 z'_x 和 z'_y 在点（1，1）连续，故函数 z 在点（1，1）存在全微分

$$dz(1,\ 1)=z'_x(1,\ 1)dx+z'_y(1,\ 1)dy$$
$$=dx+(1+2\ln2)dy$$

例 2 求函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点（0，0）的两个偏导数，并讨论它在该点的可微性。

解 由偏导数的定义

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(0+\Delta x,\ 0)-f(0,\ 0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\dfrac{\Delta x^3}{\Delta x^2}}{\Delta x}=1$$

$$f'_y(0,\ 0)=\lim_{\Delta y\to0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y\to0}\frac{-\dfrac{\Delta y^3}{\Delta y^2}}{\Delta y}=-1$$

但因为 $\Delta z=f(0+\Delta x,\ 0+\Delta y)-f(0,0)=\dfrac{\Delta x^3-\Delta y^3}{\Delta x^2+\Delta y^2}$，所以

$$\Delta z - dz = \frac{\Delta x^3 - \Delta y^3}{\Delta x^2 + \Delta y^2} - \Delta x + \Delta y$$

当取 $\Delta x = -\Delta y$ 时，$\Delta z - dz = -\Delta x$。于是

$$\left|\frac{\Delta x}{\rho}\right| = \frac{|\Delta x|}{\sqrt{2(\Delta x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

即当 $\rho \to 0$ 时，$\Delta z - dz$不是关于 ρ 的高阶无穷小量，所以函数 $f(x, y)$ 在点 (0, 0) 不可微。

例 3 设$z = f\left(xy, \frac{x}{y}\right)$①，求偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$。

解 因$\frac{\partial z}{\partial x} = yf_1' + \frac{1}{y}f_2'$，$\frac{\partial z}{\partial y} = xf_1' - \frac{x}{y^2}f_2'$。所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y\left[f''_{11} \cdot y + f''_{12} \cdot \frac{1}{y}\right] + \frac{1}{y}\left[f''_{21} \cdot y + f''_{22} \cdot \frac{1}{y}\right]$$

$$= y^2 f''_{11} + 2f''_{122} + \frac{1}{y^2}f''_{22}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial y} = y\left[f''_{11} \cdot x + f''_{12} \cdot \left(\frac{-x}{y^2}\right)\right] + f_1' + \frac{1}{y}\left[f''_{21} \cdot x + f''_{22} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right)\right] - \frac{1}{y^2}f'_2 = xyf''_{11} - \frac{x}{y^2}f''_{22} + f'_1 - \frac{1}{y^2}f'_2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x\left[f''_{11} \cdot x + f''_{12}\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right] - \frac{x}{y^2}\left[f''_{21} \cdot x - f''_{22} \cdot \left(\frac{x}{y^2}\right)\right] + \frac{2x}{y^3}f'_2 = x^2 f''_{11} - 2\frac{x^2}{y^2}f''_{12} + \frac{x^2}{y^4}f''_{22} + \frac{2x}{y^3}f'_2$$

①例 3 和以后一些题总假设一切偏导数连续。

例 4 证明，如果 $f(u,v)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=0$$

则函数 $f(x^2-y^2,\ 2xy)$ 也满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

证明 设 $u=x^2-y^2$，$v=2xy$. 由复合函数的求导法则

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2x+\frac{\partial f}{\partial v}2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot(-2y)+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot 2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2\ \frac{\partial f}{\partial u}+2x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\ 2x+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}2y\right)$$

$$+2y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\ 2x+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot 2y\right)$$

$$\frac{\partial f^2}{\partial y^2}=-2\ \frac{\partial f}{\partial u}-2y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot -2y+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot 2x\right)$$

$$+2x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\ 2x-\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}2y\right)$$

于是

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial f^2}{\partial y^2}=2\ \frac{\partial f}{\partial u}+4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+4xy\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}$$

$$+4xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+4y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}-2\ \frac{\partial f}{\partial u}+4y^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$$

$$-4xy\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}-4xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}$$

$$=4x^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)+4y^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)=0$$

例 5 证明，如果函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上两个偏导数都有界，则 $f(x, y)$ 在 D 上一致连续.

证明 在区域 D 内任取两点 $P_1(x, y)$ 和 $P_2(x+\Delta x, y+\Delta y)$，由 $n=0$ 时二元函数的泰勒公式，有

$$
\begin{aligned}
|f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)| &= |f'_x(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y)\Delta x+f'_y(x+\Delta x, y+\theta\Delta y)\Delta y| \\
&\leqslant |f'_x(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y)|\cdot|\Delta x| + |f'_y(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y)|\cdot|\Delta y| \quad (0<\theta<1)
\end{aligned}
$$

因为两个偏导数都有界，存在常数 $M>0$，使

$$
|f'_x(x, y)|\leqslant M,\ |f'_y(x, y)|\leqslant M,\ (x,y)\in D
$$

于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2M}$，对任意两点 (x,y)，$(x+\Delta x, y+\Delta y)\in D$，当 $|\Delta x|<\delta$，$|\Delta y|<\delta$ 时，有

$$
\begin{aligned}
|f(x\Delta x, y+\Delta y)|-f(x, y)| &\leqslant M(|\Delta x|+|\Delta y|) \\
&< M\left(\frac{\varepsilon}{2M}+\frac{\varepsilon}{2M}\right)=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon
\end{aligned}
$$

即函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上一致连续.

例 6 设

$$
f(x, y, z)=\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ d+z & e+x & f+y \\ g+y & h+z & k+x \end{vmatrix}
$$

求 $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. 其中 a, b, c, d, e, f, g, h, k 是常数.

解 由行列式给出函数的偏导数（或导数）等于分别对每列（或行）求偏导数后的行列式之和.

$$
\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{vmatrix} (a+x)'_x & (b+y)'_x & (c+z)'_x \\ d+z & e+x & f+y \\ g+y & h+z & k+x \end{vmatrix}
$$

$$
+\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ (d+z)'_x & (e+x)'_x & (f+y)'_x \\ g+y & h+z & k+x \end{vmatrix}
+\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ d+z & e+x & f+y \\ (g+y)'_x & (h+z)'_x & (k+x)'_x \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d+z & e+x & f+y \\ g+y & h+z & k+x \end{vmatrix}
+\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ 0 & 1 & 0 \\ g+y & h+z & k+x \end{vmatrix}
+\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ d+z & e+z & f+y \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ g+y & h+z & k+x \end{vmatrix}
+\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d+z & e+x & f+y \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}
+\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ g+y & h+z & k+x \end{vmatrix}
+\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}
+\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d+z & e+x & f+y \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}
+\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}
$$

由行列式的计算法，有

$$
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=(k+x)+(e+x)+(k+x)+(a+x)+(e+x)
$$

$$
+(a+x)
$$

$$
=6x+2(k+e+a)
$$

例 7　设二元函数 $F(x, y)$在直角坐标系里可写成

$$
F(x, y)=f(x)\cdot g(y)
$$

又在极坐标系可写成

$$
F(x, y)=\varphi(r)
$$

试求出二元函数 $F(x, y)$ 的表达式。

解 设

$$\begin{cases} x = \cos r\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

把 x，y 看成中间变量，把r,θ看成自变量，由所给条件 $F(x, y)$ 不依赖于 θ，于是

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$= f'(x)g(y)\cdot(-r\sin\theta) + f(x)g'(y)\cdot(r\cos\theta) \equiv 0$$

或 $$-yf'(x)g(y) + xf(x)g'(y) \equiv 0$$

即 $$\frac{f'(x)}{xf(x)} \equiv \frac{g'(y)}{yg(y)}$$

上式左端只是 x 的函数，右端只是 y 的函数，所以要恒等式成立，它必然为一常数，记作 λ

$$\frac{f'(x)}{xf(x)} \equiv \lambda, \frac{g'(y)}{yg(y)} \equiv \lambda$$

对第一个式可改写为

$$\frac{df(x)}{f(x)} = \lambda x dx \text{ 或 } d\ln f(x) = d\left(\frac{\lambda}{2}x^2\right)$$

于是，对上式两边积分得

$$\ln f(x) = \frac{\lambda}{2}x^2 + \ln c_1$$

这里 $\ln c_1$ 表示任意常数，所以

$$f(x) = c_1 e^{\frac{\lambda}{2}x^2}$$

同理 $$g(y) = c_2 e^{\frac{\lambda}{2}y^2}$$

从而解得

$$F(x, y) = f(x)\cdot g(y) = ce^{\frac{\lambda}{2}(x^2+y^2)}$$

其中 $c = c_1\cdot c_2$ 仍为任意常数.

例 8　求函数 $z = x^2 - xy + y^2$ 在点 $P(1, 1)$沿与 x 轴正

向夹角为 α 方向 l 上的方向导数，在 α 为何值时此方向导数(1)取最大值；(2)取最小值；(3)等于零。

解 因为

$$z'_x(1,\ 1)=(2x-y)|_{(1,1)}=1;$$

$$z'_y(1,\ 1)=(-x+2y)|_{(1,1)}=1$$

所以函数在点 $P(1,\ 1)$ 方向 l 上的方向导数为

$$\frac{\partial z}{\partial l}=z'_x(1,\ 1)\cos\alpha+z'_y(1,\ 1)\sin\alpha=\cos\alpha+\sin\alpha$$

设 $f(\alpha)=\cos\alpha+\sin\alpha$，求稳定点，解方程

$$f'(\alpha)=-\sin\alpha+\cos\alpha=0$$

得 $\alpha=\frac{\pi}{4}$，$\alpha=\frac{5\pi}{4}$.

$$f''(\alpha)=-\cos\alpha-\sin\alpha$$

$f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}<0$，$f''\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\sqrt{2}>0$. 于是，容易看出，当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$时，方向导数取最大值；当 $\alpha=\frac{5\pi}{4}$时，方向导数取最小值. 而令 $\cos\alpha+\sin\alpha=0$，解得 $\alpha=\frac{3\pi}{4}$, $\alpha=\frac{7\pi}{4}$. 所以当 $\alpha=\frac{3\pi}{4}$，$\frac{7\pi}{4}$时，方向导数为零.

例 9 设 $u=u(x,\ y,\ z)$，$v=v(x,\ y,\ z)$，证明：

$$\text{grad}\,f(u,\ v)=\frac{\partial f}{\partial u}\text{grad}\,u+\frac{\partial f}{\partial v}\text{grad}\,v$$

证明 由梯度的定义及复合函数的求导法则，有

$$\text{grad}\,f(u,\ v)=\left\{\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial z}\right\}$$

$$=\left\{\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\right\}$$

$$=\left\{\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\right\}$$

$$+\left\{\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\right\}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial u}\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z}\right\}+\frac{\partial f}{\partial v}\left\{\frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial v}{\partial z}\right\}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{grad}u+\frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{grad}v$$

例10 将函数 $f(x,\ y)=e^{x+y}$ 在原点（0，0）的邻域内展成泰勒公式（到 n 项）。

解 因为

$$f(0,\ 0)=1,\ \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\left.e^{x+y}\right|_{(0,0)}=1,$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}=e^{x+y}\right|_{(0,0)}=1,\ \cdots,\ \left.\frac{\partial^n f}{\partial x^k\partial y^{n-k}}\right|_{(0,0)}$$

$$=\left.e^{x+y}\right|_{(0,0)}=1$$

所以

$$e^{x+y}=f(0,0)+df(0,0)+\frac{1}{2!}d^2f(0,0)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}d^nf(0,0)+R_n$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}d^kf(0,0)+R_n$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left[\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k\cdot e^{x+y}\right]_{(0,0)}+R_n$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}(x+y)^k+R_n$$

其中

$$R_n=\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot e^{\theta(x+y)} \qquad (0<\theta<1)$$

例11 在椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

的内接长方体中，求体积为最大的长方体.

解 我们可以证明椭球面的内接长方体，而长方体的面平行于坐标面，且长方体的八个顶点对称地分布在八个卦限. 设内接长方体在第一卦限上的顶点为 $P(x, y, z)$，因顶点在椭球面上，有

$$z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

所以长方体的体积为：

$$V(x, y)=8xyz=8cxy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

于是，我们的问题是求二元函数 $V(x, y)$在闭区域 $D=\left\{(x, y)\middle|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1,\ 0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b\right\}$的最大值. 由于$V(x, y)$ 在D上连续定能取到最大值，又在边界上 $V(x, y)=0$，而且D内的任意一点 $V(x, y)>0$，所以在D内部取到最大值. 解方程组

$$\begin{cases} V'_x=8cy\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}+8cxy\dfrac{\left(-\dfrac{x}{a^2}\right)}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}}=0 \\ V'_y=8cx\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}+8cxy\dfrac{\left(-\dfrac{y}{b^2}\right)}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}}=0 \end{cases}$$

化简得

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{2y^2}{b^2}=1 \end{cases}$$

由此解得 $x=\frac{a}{\sqrt{3}}, y=\frac{b}{\sqrt{3}}$，即在$D$内只有唯一一个稳定点 $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right)$。所以$V(x, y)$在点 $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right)$ 取最大值

$$V\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right)=8\cdot\frac{a}{\sqrt{3}}\cdot\frac{b}{\sqrt{3}}\cdot\frac{c}{\sqrt{3}}=\frac{8}{3\sqrt{3}}abc$$

即当内接长方体的边长为$\frac{a}{\sqrt{3}}$，$\frac{b}{\sqrt{3}}$，$\frac{c}{\sqrt{3}}$时，长方体的体积最大，其体积为$\frac{8}{3\sqrt{3}}abc$。

习　　题

§16.1

1　求下列函数的偏导数

（1）$z=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$；　（2）$z=\frac{\cos x^2}{y}$；

（3）$z=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$；　（4）$z=(x+y)^y$

（5）$u=\left(\frac{x}{y}\right)^z$；　（6）$u=x^{\frac{y}{z}}$

2　设函数

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{当}x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & \text{当}x^2+y^2=0 \end{cases}$$

求 $f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$，$f'_x(0,1)$，$f'_y(1,0)$。

3　求曲线

$$\begin{cases} z=\sqrt{1+x^2+y^2} \\ x=1 \end{cases}$$

在点 $(1,1,\sqrt{3})$ 处的切线与 y 轴正向的夹角。

4 设 $z=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$，验证

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}$$

5 设 $z=x^n f\left(\frac{y}{x^2}\right)$ (其中 f 为可微函数)，验证

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=nz$$

6 证明，如果函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上，关于变量 x 连续，且关于变量 y 有有界的偏导数 $f'_y(x, y)$，则 $f(x, y)$ 在 D 上连续。

§16.2

7 求下列函数的全微分

(1) $z=\sin(x+y)+\cos(xy)$; (2) $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$;

(3) $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; (4) $u=x^y\cdot y^z\cdot z^x$。

8 求下列函数在给定点的全微分

(1) $z=\ln\left(x+\dfrac{y}{2x}\right)$在点 $(1,0)$;

(2) $u=\sqrt{\sin^2x+\sin^2y+\sin^2z}$ 在点 $\left(0, 0, \dfrac{\pi}{4}\right)$。

9 证明，函数

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & 当\ x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & 当\ x^2+y^2=0 \end{cases}$$

在点$(0,0)$存在偏导数，但在此点不可微。

10 证明，$P(x, y)dx+Q(x, y)dy$ 为某函数 $f(x, y)$ 的全微分的必要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

其中 $P(x, y)$，$Q(x, y)$ 存在连续偏导数。

11 证明，如果函$f(x, y)$在区域 D 上偏导数

$$\frac{\partial f}{\partial x}\equiv 0, \frac{\partial f}{\partial y}\equiv 0$$

则 $f(x, y)$ 在 D 上为一常数。

12 计算近似值

（1）$\sin 29°\times \mathrm{tg} 46°$；（2）$1.002\times(2.003)^2\times(3.004)^3$

§16.3

13 求函数 $z=x^2-xy+y^2$，在点 $(1,1)$ 沿方向 $\alpha=45°$ 的方向导数。

14 设由原点 $(0,0)$ 到点 (x, y) 的矢经 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 x 轴的正向夹角为θ，求函数 r 沿方向 α 的方向导数，并问 (1)：在哪个方向上取最大值；(2) 在哪个方向上取最小值；(3) 在哪个方向上等于零。

15 求函数 $u=xyz$ 在点 $M(1, 1, 1)$ 处的梯度，并求 u 沿方向 $l=\{2, -1, 3\}$的方向导数。

16 求函数 $u=x^2+y^2-z^2$ 在点 $M(a, 0, 0)$及点 $N(0, a, 0)$ 梯度之间的夹角。

17 设 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，求 (1) 使 $u=c$ (c 为常数) 的等值线，并画出图形；（2）$\mathrm{grad}u$；(3) 满足 $|\mathrm{grad}u|=1$的点。

§16.4

18 求下列复合函数的导数

（1）$z=x^2+xy+z^2$，$x=t^2$，$y=t$；

（2）$u=f(x, y, z)$，$x=t$，$y=\sin t$，$z=\cos t$。

19 设 $z=f(x, y)$ 满足方程

$$x\frac{\partial f}{\partial x}-y\frac{\partial f}{\partial y}=f(x, y)$$

证明，一元函数 $z=f(e^t, e^{-t})=z(t)$ 满足方程

$$\frac{dz}{dt}=z(t)$$

20 设函数 $u=f(x, y, z)$满足方程

$$xf'_x+yf'_y+zf'_z=0$$

证明：$u=f(x, y, z)$ 是零次齐次函数（参看说明 2）。

21 求下列复合函数的偏导数

（1）$z=x^2y-xy^2$，$x=t\cos s$，$y=t\sin s$；

（2） $z=f(x+y,\ xy)$；（3） $z=f(x^2-y^2,\ e^{xy})$；

（4） $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$；（5） $u=f(x^2+y^2+z^2)$；

（6） $u=f\left(\frac{x}{y},\ \frac{y}{z}\right)$；（7） $u=f(x^2+y^2,\ x^2-y^2,\ 2xy)$。

22 设 $z=xy+xF(u)$，$u=\frac{y}{x}$且 F 为可微分函数，证明：

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z+xy$$

23 证明，如果函数 $z=f(x,\ y)$满足方程

$$xf'_x+yf'_y=0$$

则在极坐标系里 $f(x,\ y)$ 只是 θ 的函数。

24 设 $u=u(x,\ y,\ z)$，$v=v(x,\ y,\ z)$，证明下列公式：

1） $\mathrm{grad}(u+v)=\mathrm{grad}u+\mathrm{grad}v$；

2） $\mathrm{grad}(u\cdot v)=v\mathrm{grad}u+u\mathrm{grad}v$；

3） $\mathrm{grad}f(u)=f'(u)\mathrm{grad}u$。

§16.5

25 求下列函数的偏导数

（1） $z=x^4+y^4-4x^2y^2$，求所有二阶偏导数；

（2） $z=x\sin(x+y)$，求所有二阶偏导数；

（3） $u=e^{xyz}$，求$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$；

（4） $z=f(x+y,\ xy)$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；

（5） $u=f(x^2+y^2+z^2)$，求$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$；

（6） $u=f(x,\ xy,\ xyz)$，求$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$。

26 证明，函数

$$u=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}\ (a,\ b\ 为常数)$$

满足热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

27　证明，如果 $f(u, v)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=0$$

则函数 $z=f(x^2-y^2, 2xy)$ 也满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

28　证明，函数

$$u=\frac{c_1e^{-ar}+c_2e^{ar}}{r}$$

满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=a^2u$$

其中，c_1，c_2，a 为常数，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。

29　设 $u=f(x, y, z)$，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$z=z$，求证

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

§16.6

30　将函数 $f(x, y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$ 在点 $(1, -2)$ 的邻域内展成泰勒公式。

31　在点(0, 0)的邻域内按泰勒公式展开下列函数到二阶为止

（1）$f(x, y)=e^x\cos y$；（2）$f(x, y)=\sin(x^2+y^2)$；

（3）$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$。

32　应用泰勒公式证明，如果 $z=f(x, y)$ 在区域 D 上有

$$\frac{\partial f}{\partial x}\equiv 0,\ \frac{\partial f}{\partial y}\equiv 0$$

则 $f(x, y)$ 在区域 D 上为一个常数。

§16.7

33　求下列函数的极值

（1）$z=x^2-xy+y^2-2x+y$；（2）$z=e^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2)$ $(a>b>0)$　（3）$z=xy\ln(x^2+y^2)$。

34 求函数 $z=x^2-xy+y^2$ 在区域 $|x|+|y|\leqslant 1$ 上的最大值和最小值。

35 在半径 a 的球面内接长方体中，求体积为最大的长方体。

36 求抛物线 $y=x^2$ 到直线 $x-y-2=0$ 之间的最短距离。

第十七章　隐函数

到目前为止，我们所讨论的函数，其自变量与因变量之间相依关系都是直接以明显的解析表达式给出的函数。例如，$y=x^2$，$y=x+\sin x$，$z=\cos(x^2+y^2)$ 等等。但在许多实际问题中，自变量与因变量之间的相依关系是由方程给出的。例如，方程$x^2+y^2=1$可以确定函数$y=\sqrt{1-x^2}$，$y=-\sqrt{1-x^2}$；方程$x^2+y^2+z^2=1$可以确定二元函数$z=\sqrt{1-(x^2+y^2)}$，$z=-\sqrt{1-(x^2+y^2)}$等。这种由方程给出的函数，就是所谓的隐函数。本章主要讨论隐函数存在条件、隐函数的微分法及其在几何和极值上的应用。

§17·1　隐函数概念

我们先看几个例子。

例 1　考查直线方程

$$F(x,y)=ax+by+c=0 \quad (b\neq 0) \tag{1}$$

对每一个给定的x值，由方程（1）唯一确定y的值与之相对应。这样方程（1）就隐含着一个函数$y=f(x)$。其实，这个函数$y=f(x)$可由方程（1）直接解出来，即

$$y=-\frac{ax+c}{b} \quad (-\infty<x<+\infty)$$

把它代入方程（1），则方程（1）就变成关于x的恒等式

$$F[x,f(x)]=ax+b\left(-\frac{ax+c}{b}\right)+c\equiv 0$$

例 2　设有方程

$$F(x,y)=x^2+y^2-1=0 \qquad (2)$$

显然，解这个方程，得到两个（连续）函数

当$y\geqslant 0$时，$y=f_1(x)=\sqrt{1-x^2}$　$(|x|\leqslant 1)$

当$y\leqslant 0$时，$y=f_2(x)=-\sqrt{1-x^2}$　$(|x|\leqslant 1)$

这就是说，当$y\geqslant 0$或$y\leqslant 0$时，由方程（2）可以确定y是x的函数。把它们代入方程（2），则方程（2）就变成恒等式

$$F[x,f_1(x)]=x^2+(\sqrt{1-x^2})^2-1\equiv 0$$

$$F[x,f_2(x)]=x^2+(-\sqrt{1-x^2})^2-1\equiv 0$$

通过以上两个例子，我们可以给出由方程所确定的函数。

定义　设有方程

$$F(x,y)=0 \qquad (17.1)$$

如果在某一区间$\varDelta$内，对每一个$x\in\varDelta$，都有由方程（17.1）确定相应的$y=f(x)$值，即

$$F[x,f(x)]\equiv 0$$

则称$y=f(x)$为由方程（17.1）所确定的隐函数。

由这个定义及例2看出，一个方程$F(x,y)=0$可能确定几个隐函数。由方程$F(x,y)=0$所确定的函数$y=f(x)$就是方程$F(x,y)=0$的解，即

$$F[x,f(x)]\equiv 0$$

从例1和例2来看，凡由方程所确定的隐函数，好象都能由方程"解出"因变量，成为显函数形式。其实不然，很多方程能够确定隐函数，但是我们不能将这个隐函数的因变量用自变量的初等函数的有限形式表示。例如，开普勒方程

$$y-x-\varepsilon\sin y=0$$

其中ε是常数（$0<\varepsilon<1$）。我们能够证明，它确定一个隐函数$y=f(x)$，但是不能将y用x的初等函数表示出来。再如，方程

$$y^5+2y-x-3x^7=0$$

对x的任意给定值，根据代数学的基本定理知，y至少有一个实根，所以该方程确定了一个隐函数$y=f(x)$，但是我们不能将y

表示成x的显式. 所以，研究如何直接由定义隐函数的方程来讨论隐函数性质的方法，是很有意义的。

§17.2 由一个方程所确定的隐函数

首先我们指出，不是所有的方程都能确定隐函数。例如，方程

$$F(x,y)=x^2+y^2+1=0$$

就不能确定隐函数。

这样，就提出一个问题：给定一个方程，在什么条件下它能确定一个隐函数，下面我们先从几何直观上来分析。

方程$F(x, y)=0$所确定的隐函数有明显的几何意义。二元连续函数

$$z=F(x,y)$$

表示三维空间中的一个曲面Ω. 当$z=0$时，则方程

$$F(x,y)=0$$

表示曲面Ω与xy平面的交线. 这个交线能够确定一个或若干个x与y之间的函数，而每一个这样的函数都是由此方程所确定的隐函数。

由隐函数的几何意义知，要使方程$F(x, y)=0$存在连续的隐函数，要求曲面$z=F(x, y)$必须与xy平面相交成一条曲线. 因此，要使它有交线，曲面$z=F(x,y)$与xy平面至少有一个交点，即至少存在一点$P(x_0,y_0)$，使

$$F(x_0,y_0)=0$$

可是有一个交点未必有交线. 例如，曲面$z=x^2+y^2$与xy平面有一交点(0, 0)，但没有一条相交的曲线. 对此我们容易看出，之所以曲面$z=x^2+y^2$在点(0, 0)与xy平面相交，但没有相交的曲线，其主要原因是曲面$z=x^2+y^2$在点(0, 0)的切平面恰好是xy平面. 由此，我们容易猜想到，如果曲面$z=F(x,y)$在xy平面上的点$P(x_0, y_0)$相交，且曲面在

这点的切平面与 xy 平面有一定角度(即切平面与xy平面不平行)，从而曲面$z=F(x,y)$在点$P(x_0,y_0)$的某邻域穿过xy平面，于是有交线$y=f(x)$，或 $x=g(y)$. 根据全微分的几何意义知，曲面$z=F(x,y)$在点 $P(x_0,y_0)$ 的切平面不与xy平面平行，要求$F'_x(x_0,y_0)$和$F'_y(x_0,y_0)$不能同时为零. 通过上述的几何直观说明，我们得到隐函数存在定理.

定理17.1（隐函数存在定理） 如果函数$F(x,y)$满足下列条件：

（1） 函数$F(x,y)$及其$F'_y(x,y)$在区域$D=\{(x,y)\mid |x-x_0|\leqslant a,|y-y_0|\leqslant b\}$上连续；

（2） $F(x_0,y_0)=0$

（3） $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$

则在点x_0的某邻域$\Delta=(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 内，存在唯一连续函数$y=f(x)$，使$F[x,f(x)]\equiv 0$，并且$f(x_0)=y_0$.

分析 我们分两步证明，先证明隐函数的存在性，然后证明它的连续性. 关于存在性，由引入定理的几何分析知，只须证明，在定理条件下，曲面$z=F(x,y)$必然通过点$P(x_0,y_0)$且与xy平面相交成一条曲线，该曲线就是区间Δ上的方程 $F(x,y)=0$所确定的隐函数. 为此我们只须证明，在点$P(x_0,y_0)$某邻域内，曲面$z=F(x,y)$的一部分在xy平面之上，一部分在xy平面之下，再由$z=F(x,y)$的连续性，必能推得曲面与 xy 平面相交成一条曲线（如图17.1）.

证明 1. 隐函数的存在性.

由条件（3），我们不妨设$F'_y(x_0,y_0)>0$，再由条件（1）函数$F'_y(x,y)$在点$P(x_0,y_0)$连续，根据连续

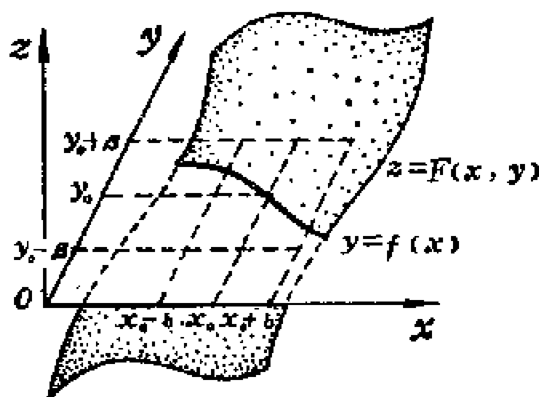


图17.1

函数的局部保号性，存在某个区域$D'=\{(x,y)\ |x_0-\alpha\leqslant x\leqslant x_0+$

$\alpha; y_0-\beta\leqslant y\leqslant y_0+\beta\}$ $(D'\subset D)$,

$$有F'_y(x,y)>0,\quad P(x,y)\in D'$$

特别当$x=x_0$时，也有

$$F'_y(x_0,y)>0\qquad(y_0-\beta\leqslant y\leqslant y_0+\beta)$$

于是，一元函数$F(x_0,y)$在闭区间$[y_0-\beta,\ y_0+\beta]$上是严格递增的。又根据条件（2）$F(x_0,y_0)=0$，必有

$$F(x_0,y_0-\beta)<0,\ F(x_0,y_0+\beta)>0\qquad(1)$$

再考虑两个函数

$F(x,y_0-\beta)$ 与$F(x,y_0+\beta)$.

这两个函数在点x_0连续。于是，根据不等式（1）和连续函数的保号性，存在区间$[x_0-\delta,x_0+\delta]$使

$$F(x,y_0-\beta)<0,F(x,y_0+\beta)>0,\ x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]\qquad(2)$$

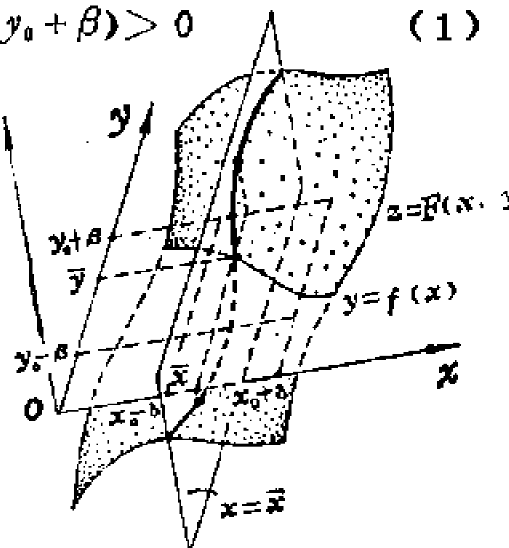


图17.2

在区间$[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$上任取一点 $\bar{x}$，由（2）式知，

$$F(\bar{x},y_0-\beta)<0,\ F(\bar{x},\ y_0+\beta)>0$$

于是，y的一元函数$F(\bar{x},\ y)$ 在区间$[y_0-\beta,\ y_0+\beta]$上是严格递增的连续函数，根据连续函数的零点定理，在 $[y_0-\beta,\ y_0+\beta]$ 内存在唯一一点 $\bar{y}$（图17．2）使

$$F(\bar{x},\ \bar{y})=0$$

这说明区间$[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$上的任意一点$x$，在区间 $[y_0-\beta,\ y_0+\beta]$内都有唯一一点 y与它相对应，并且

$$F(x,y)=0$$

于是，变量x与变量 y之间构成了函数关系，表示为

$$y=f(x)$$

且有 $\qquad F[x,f(x)]\equiv0\qquad(x_0-\delta\leqslant x\leqslant x+\delta_0)\qquad(3)$

即函数 $y=f(x)$是由方程$F(x,y)=0$所确定的隐函数。

因为，我们已知$F(x_0,y_0)=0$，根据（3）式，有 $F\ [x_0,$

$f(x_0)]=0$，而且在区间 $[y_0-\beta, y_0+\beta]$ 内与 x_0所对应的值 y，满足方程$F(x_0,y)=0$是唯一的，所以

$$f(x_0)=y_0$$

2．隐函数的连续性．

在区间 $[x_0-\delta, x_0+\delta]$上，任取一点x'，这时我们记 $y'=f(x')$．由前面的证明知，$y_0-\beta\leqslant y'\leqslant y_0+\beta$．
对任意给定$\varepsilon>0$ （$\varepsilon\leqslant\min\{y_0-y'+\beta, y'-y_0+\beta\}$），即

$$y_0-\beta\leqslant y'-\varepsilon<y'+\varepsilon\leqslant y_0+\beta$$

根据前面的证明知，有

$$F(x',y'-\varepsilon)<0\text{，与 }F(x', y'+\varepsilon)>0$$

再根据$F(x,y)$的连续性，必存在点x' 的某邻域 $(x'-\delta_1, x'+\delta_1)$，当$x\in(x'-\delta_1,x'+\delta_1)$ 时，有

$$F(x,y'-\varepsilon)<0,\quad F(x,y'+\varepsilon)>0$$

于是，同1的证明一样，在区间 $[x'-\delta_1, x'+\delta_1]$ 上由方程$F(x,y)=0$唯一确定一个函数$\varphi(x)$，使

$$y'-\varepsilon<\varphi(x)<y'+\varepsilon,\quad x\in(x'-\delta_1,x'+\delta_1) \qquad (4)$$

由于总可以选取充分小的δ，使 $(x'-\delta_1, x'+\delta_1)\subset(x_0-\delta, x_0+\delta)$，而$f(x)$为由方程$F(x,y)=0$所确定的在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 上的唯一一个隐函数，所以在 $(x'-\delta_1,x'+\delta_1)$ 上

$$\varphi(x)\equiv f(x)$$

故（4）式可写成

$$y'-\varepsilon<f(x)<y'+\varepsilon$$

即 $\quad f(x')-\varepsilon<f(x)<f(x')+\varepsilon,\quad x\in(x'-\delta_1, x'+\delta_1)$

这就证明了隐函数$y=f(x)$在区间$(x'-\delta_1,x'+\delta_1)$上连续．□

定理17.2（隐函数可微性定理） 如果函数$F(x, y)$除了满足定理17.1的条件外，还满足：$F'_x(x,y)$在区域D上连续，则在点x_0的某邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内$y=f(x)$有连续导函数，且

$$f'(x)=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} \qquad (17.2)$$

证明 设x是区间$(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$上的任意一点，任取$x$的改变量$\Delta x$，使$x+\Delta x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$，而

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x)$$

于是，根据隐函数的概念知

$$F(x,y)=0,\quad F(x+\Delta x,\ y+\Delta y)=0$$

从而 $F(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-F(x,y)=0$

或 $F(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-F(x,y+\Delta y)+F(x,y+\Delta y)-F(x,y)=0$

根据微分中值定理，有

$$F(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-F(x,y+\Delta y)=F'_x(x+\theta_1\Delta x,\ y+\Delta y)\Delta x$$

$$F(x,y+\Delta y)-F(x,y)=F'_y(x,y+\theta_2\Delta y)\Delta y$$

其中$0<\theta_1<1$，$0<\theta_2<1$。于是，

$$F'_x(x+\theta_1\Delta x,\ y+\Delta y)\Delta x+F'_y(x,y+\theta_2\Delta y)\Delta y=0 \tag{5}$$

因为点$(x,y+\theta_2\Delta y)\in D'$①，所以$F'_y(x,y+\theta_2\Delta y)\neq 0$。

由（5）式有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{F'_x(x+\theta_1\Delta x,\ y+\Delta y)}{F'_y(x,y+\theta_2\Delta y)}$$

因为$y=f(x)$连续，故当$\Delta x\to 0$时，$\Delta y\to 0$。又已知$F'_x(x,y)$和$F'_y(x,y)$是连续的，所以有

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[-\frac{F'_x(x+\theta_1\Delta x,\ y+\Delta y)}{F'_y(x,\ y+\theta_2\Delta y)}\right]$$

$$=-\frac{F'_x(x,\ y)}{F'_y(x,\ y)}$$

即在$(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$上，有

$$f'(x)=-\frac{F'_x(x,\ y)}{F'_y(x,\ y)}$$

---

①关于区域D'参看定理17.1的证明。

又因为$F'_x(x,y)$ 和$F'_y(x,y)$连续，所以$f'(x)$在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 上也连续。

注意：（1）定理17.1和定理17.2的条件只是充分的，而不是必要的。例如，方程

$$F(x, y) = y^3 - x^3 = 0$$

在点（0，0）不满足条件（3），即$F'_y(0,0) = 3y^2|_{(0,0)} = 0$，但它仍能确定唯一的连续可微函数 $y = x$。

（2）在定理17.1和定理 17.2 的条件（3），如果改为$F'_x(x_0,y_0) \neq 0$，这时结论则是存在唯一连续可微函数$x = g(y)$，

$$g'(y) = -\frac{F'_y(x,y)}{F'_x(x, y)} \qquad (17.3)$$

例1 验证方程

$$F(x,y) = xy + e^x - e^y = 0$$

在点（0，0）的邻域内，存在连续可微的隐函数 $y = f(x)$，并求$\frac{dy}{dx}$。

解 显然，函数$F(x, y) = xy + e^x - e^y$ 在点（0，0）的邻域内连续，并且

$$F'_x(x, y) = y + e^x, \quad F'_y(x, y) = x - e^y$$

在点（0，0）的邻域内也是连续的，且

$$F(0,0) = 0, \quad F'_y(0,0) = -1 \neq 0$$

根据定理17.1和定理17.2知，在邻域 $(-\delta, \delta)$ 内存在唯一的连续函数（隐函数）$y = f(x)$，使得

$$F[x, f(x)] \equiv 0, \quad 0 = f(0)$$

并且它有连续导数，其导数为

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{y + e^x}{x - e^y}$$

以上讨论的内容，我们可以推广到含有 $n+1$ 个变量的方程

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, y) = 0$$

上去，以三元函数为例。

定理17.3 如果三元函数 $F(x,y,z)$ 满足下列条件：

(1) 函数$F(x,y,z)$ 及其 $F'_x(x,y,z)$、$F'_y(x,y,z)$、$F'_z(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某邻域$U(P_0,\delta)$ 内存在且连续；

(2) $F(x_0,y_0,z_0)=0$

(3) $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$

则在邻域$U(P_0,\delta)$ 内存在唯一的一个连续隐函数$z=f(x,y)$，使

$$F[x,y,f(x,y)]\equiv 0$$

并且 $f(x_0,y_0)=z_0$

而函数$z=f(x,y)$ 在邻域 $U(p_0,\delta)$ 内，对两个自变量存在连续偏导数，并且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} \qquad (17.4)$$

证明从略。

例2 设

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-5=0$$

求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$。

解 函数 $F(x,y,z)$ 及它的三个偏导数 $F'_x=2x-2$，$F'_y=2y+2$，$F'_z=2z-4$ 在三维空间上连续，且当 $z\neq 2$ 时，有$F'_z\neq 0$。于是，根据定理17.3知，方程$F(x,y,z)=0$ 可确定二元函数 $z=f(x,y)$，且有连续偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{x-1}{z-2};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{y+1}{z-2}$$

$$(z\neq 2)$$

§17.3 由方程组所确定的隐函数

一 隐函数组概念

上一节讨论的是由一个方程所确定的一个隐函数，这节将讨论由方程组所确定的隐函数组。

设有一方程组

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases} \tag{17.5}$$

如果在某一区间Δ内，对每一个$x\in\Delta$，都由方程组（17.5）可以确定两个函数$y=f_1(x)$，$z=f_2(x)$，且满足方程组

$$\begin{cases} F_1[x,f_1(x),\ f_2(x)]\equiv 0 \\ F_2[x,f_1(x),\ f_2(x)]\equiv 0 \end{cases}$$

则称y,z为由方程组（17.5）所确定的隐函数组。

例如，由方程组

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=x+y+z-1=0 \\ F_2(x,y,z)=2x+y-3z-2=0 \end{cases} \tag{1}$$

解得

$$y=f_1(x)=\frac{1-5x}{4},\quad z=f_2(x)=\frac{x+3}{4}$$

代入方程组（1），有

$$F_1[x,f_1(x),\ f_2(x)]=\frac{4x+1-5x+x+3-4}{4}$$

$$\equiv 0$$

$$F_2[x,f_1(x),\ f_2(x)]=\frac{8x+1-5x-3x-9+8}{4}$$

$$\equiv 0$$

于是，$y=\frac{1}{4}(1-5x)$，$z=\frac{1}{4}(x+3)$ 是由方程组（1）所确定的隐函数组。

隐函数组的一般情形是：带有$n+m$个自变量的m个方程的方程组

$$\begin{cases} F_1(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m)=0 \\ F_2(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m)=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_m(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m)=0 \end{cases}$$

确定$y_1,y_2,\cdots,y_m$为另外n个变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$的隐函数组

$y_1=f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$y_2=f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n),\cdots,y_m=f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 即 $F_i[x_1,x_2,\cdots,x_n,f_1(x_1,x_2,\cdots x_n),\cdots,f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)]\equiv 0\quad(i=1,2,\cdots,m)$。

二　函数行列式

讨论由方程组所确定的隐函数（组），函数行列式起着重要的作用．其实，在数学分析中，函数行列式是论证与计算的一个重要工具．为了简单起见，这里仅就二元函数的情形加以讨论．

设在平面区域D上给定了两个函数

$$u=F_1(x,y),\quad v=F_2(x,y)$$

它们在D内具有一阶连续偏导数，由这些偏导数组成的行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

称为函数u,v关于变量x,y的函数行列式或称雅可比行列式，记作

$$J=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\text{或}J=\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}$$

下面我们讨论函数行列式的两个性质。

性质1 如果（1）$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 是 x，y 的连续函数，并且对x,y有连续偏导数；

（2）x与y又是变量 s,t的连续函数

$$x=x(s,t)\ ,\ y=y(s,t)$$

且有对s与t的连续偏导数，则有

$$\frac{\partial\ (u,v)}{\partial\ (s,t)}=\frac{\partial\ (u,v)}{\partial\ (x,y)}\cdot\frac{\partial\ (x,y)}{\partial\ (s,t)} \tag{17.6}$$

证明 根据条件知，函数u与v对自变量s，t的偏导数存在。由复合函数的微分法，有

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s},\quad \frac{\partial v}{\partial s}=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t},\quad \frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

于是

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t}\\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\\ \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t}\\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t}\end{vmatrix}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\qquad\square$$

当y为x的函数，x为t 的函数时，（17.6）式就是一元函数的复合函数的求导公式：

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

因而公式（17.6）也可以看作是一元复合函数求导公式的一个推广。

质性2 如果（1）$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 连续，且有连续的偏导数；

（2）$x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$ 存在唯一反函数组，连续，且有连续的偏导数，则

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=1 \tag{17.7}$$

证明 因为 u,v 可以看成通过中间变量x,y关于u，v本身的复合函数。因此根据性质1，有

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(u,v)}$$

而

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial v}\\ \frac{\partial v}{\partial u} & \frac{\partial v}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$$

所以公式（17.7）成立。 □

三　方程组所确定的隐函数

定理17.4 如果函数$F_1(x,y,z)$及$F_2(x,y,z)$在点$M(x_0,y_0,z_0)$的某邻域U内满足条件：

（1）$F_1(x,y,z)$，$F_2(x,y,z)$ 在点M的邻域U内连续，且对三个变量都有连续偏导数；

（2）$$\begin{cases}F_1(x_0,y_0,z_0)=0\\ F_2(x_0,y_0,z_0)=0\end{cases}$$

（3）在点$M(x_0,y_0,z_0)$的函数行列式

$$J=\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}\neq 0$$

则在点x_0的某邻域$\varDelta$内存在唯一的连续函数组

$$y=f_1(x),\quad z=f_2(x)$$

满足方程组（17.5），即

$$\begin{cases} F_1[x,f_1(x),\ f_2(x)]\equiv 0 \\ F_2[x,f_1(x),\ f_2(x)]\equiv 0 \end{cases}$$

并且有

$$f_1(x_0)=y_0,\ \ f_2(x_0)=z_0$$

同时，$y=f_1(x)$，$z=f_2(x)$在Δ内有连续导数。

分析 首先应用定理17.3，由方程$F_1(x,y,z)=0$确定二元函数$z=f(x,y)$，把它代入到函数$F_2(x,y,z)$，得$F_2[x,y,f(x,y)]$。然后应用定理17.1由方程$F_2[x,y,f(x,y)]=0$确定一元函数$y=f_1(x)$，并令$z=f[x,f_1(x)]=f_2(x)$。最后验证$y=f_1(x)$，$z=f_2(x)$满足定理的要求。

证明 由条件（3）

$$J=\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}\bigg|_M=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z}\\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z}\end{vmatrix}_M\neq 0$$

则$\dfrac{\partial F_1}{\partial y}$，$\dfrac{\partial F_1}{\partial z}$中至少有一个在点$M$不为零，为确定起见，不妨设

$$\frac{\partial F_1}{\partial z}\bigg|_M\neq 0$$

于是，函数$F_1(x,y,z)$满足下列条件：

（1）$F_1(x,y,z)$在点M的邻域U内连续，且对任何变量都有连续偏导数；

（2）$F_1(x_0,y_0,z_0)=0$

（3）$F'_{1z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$

根据定理17.3，在点$N(x_0,y_0)$的某邻域R内存在唯一的连续函数

$$z=f(x,y)$$

满足方程$F_1(x,y,z)=0$，即

$$F_1[x,y,f(x,y)]\equiv 0 \qquad (1)$$

并且 $\quad f(x_0,y_0)=z_0$

而函数 $z=f(x,y)$ 在 R 内有连续偏导数。

现将函数 $z=f(x,y)$ 代入函数 $F_2(x,y,z)$ 之中，得

$$F_2[x,y,f(x,y)]$$

设 $\quad \varphi(x,y)=F_2[x,y,f(x,y)]$

我们验证函数 $\varphi(x,y)$ 满足定理17.1的条件：

（1）$\varphi(x,y)$ 在点 N (x_0,y_0) 的邻域 R 内连续，且有连续偏导数．事实上，

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial F_2}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_2}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}$$

其中 $\frac{\partial F_2}{\partial x}$，$\frac{\partial F_2}{\partial y}$，$\frac{\partial F_2}{\partial z}$，$\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$ 皆连续；

（2）$\varphi(x_0,y_0)=F_2[x_0,y_0,f(x_0,y_0)]=F_2(x_0,y_0,z_0)=0$

（3）$\varphi'_y(x_0,y_0)\neq 0$。事实上，

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_2}{\partial z}\ \frac{\partial f}{\partial y} \qquad (2)$$

其中 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 可由（1）式求出。对（1）式关于 y 求偏导数，得

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}+\frac{\partial F_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}=0\text{，即}\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F_1}{\partial y}}{\frac{\partial F_1}{\partial z}}\left(\left.\frac{\partial F_1}{\partial z}\right|_M\neq 0\right)$$

将它代入（2）式，在点 $N(x_0,y_0)$，有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_2}{\partial z}\left(-\frac{\frac{\partial F_1}{\partial y}}{\frac{\partial F_1}{\partial z}}\right)=\frac{1}{\frac{\partial F_1}{\partial z}}\left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\ \frac{\partial F_1}{\partial z}\right.$$

$$-\frac{\partial F_2}{\partial z}\frac{\partial F_1}{\partial y}\Big)=\frac{1}{\frac{\partial F_1}{\partial z}}\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial z} & \frac{\partial F_1}{\partial y}\\ \frac{\partial F_2}{\partial z} & \frac{\partial F_2}{\partial y}\end{vmatrix}$$

$$=-\frac{1}{\frac{\partial F_1}{\partial z}}\cdot\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}\Bigg|_M\neq 0$$

根据定理17.1，在点x_0的某邻域$\varDelta$内存在唯一的一个连续函数 $y=f_1(x)$，满足方程$\varphi(x,y)=0$，即

$$\varphi[x,f_1(x)]\equiv 0 \tag{3}$$

并且$f(x_0)=y_0$。再根据定理17.2，$y=f_1(x)$在$\varDelta$内有连续导数。

将$y=f_1(x)$代入$z=f(x,y)$，令

$$z=f[x,f_1(x)]\equiv f_2(x) \tag{4}$$

从而得一函数组

$$y=f_1(x),\quad z=f_2(x)$$

下面证明，这两个函数满足定理的要求。

首先，由于$y=f_1(x)$和$z=f(x,y)$连续，因此$z=f[x,f(x)]=f_2(x)$也连续，即$f_1(x)$，$f_2(x)$在点x_0的某邻域$\varDelta$内连续。

其次，在（1）式与（3）式中以$f_1(x)$代替y，有

$$F_1[x,f_1(x),f_2(x)]=F_1\{x,f_1(x),f[x,f_1(x)]\}\equiv 0$$

$$F_2[x,f_1(x),f_2(x)]=F_2\{x,f_1(x),f[x,f_1(x)]\}$$
$$\equiv\varphi[x,f_1(x)]\equiv 0$$

最后，由（3）式，对x求导数，有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{df_1}{dx}=0,\ 即\frac{df_1}{dx}=-\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}$$

由（4）式，对x求导数，有

$$\frac{df_2}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{df_1}{dx}$$

因为，$\frac{\partial\varphi}{\partial x}$，$\frac{\partial\varphi}{\partial y}$，$\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$皆存在，且连续，所以，$\frac{df_1}{dx}$和$\frac{df_2}{dx}$在点$x_0$的邻域$\Delta$内存在，且连续。 □

例1 判别方程组

$$\begin{cases} F_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-6=0 \\ F_2(x,y,z) = x+y+z=0 \end{cases}$$

在点M $(1,-2,1)$ 的邻域内确定唯一可导的连续函数组

$$y=f_1(x),\quad z=f_2(x)$$

解 （1）显然，函数F_1, F_2及$F'_{1x}=2x, F'_{1y}=2y$, $F'_{1z}=2z, F'_{2x}=1$，$F'_{2y}=1$，$F'_{2z}=1$在点M的邻域内连续；

（2）$F_1(1,-2,1)=(1)^2+(-2)^2+(1)^2-6=0$

$F_2(1,-2,1)=1+(-2)+1=0$

（3）

$$J=\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}\right|_M=\left|\begin{matrix}\frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z}\\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z}\end{matrix}\right|_M$$

$$=\left|\begin{matrix}2y & 2z\\ 1 & 1\end{matrix}\right|_M=(2y-2z)_M=-6\neq 0$$

根据定理17.4，在点M的邻域内确定唯一的可导的连续函数组$y=f_1(x)$，$z=f_2(x)$。

在定理17.4中，F_1和F_2改为4个变量的方程，即

$$\begin{cases} F_1(x,y,u,v)=0 \\ F_2(x,y,u,v)=0 \end{cases} \tag{17.8}$$

则在相应条件下，存在唯一的具有连续偏导数的二元函数组。

定理17.5 如果函数$F_1(x,y,u,v)$，$F_2(x,y,u,v)$ 满足下列条件：

（1）$F_1(x,y,u,v)$ 和$F_2(x,y,u,v)$ 在点$M(x_0,y_0,u_0,v_0)$的某邻域U内连续，且有对任何变量的连续偏导数；

（2）$F_1(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，$F_2(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$

（3） $J=\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}\right|_M \neq 0$

则在点 $P(x_0,y_0)$ 的某邻域内，存在唯一具有连续偏导数的二元函数组

$$u=f_1(x,y),\quad v=f_2(x,y)$$

满足方程组（17.8），即

$$\begin{cases} F_1[x,y,f_1(x,y),\ f_2(x,y)]\equiv 0 \\ F_2[x,y,f_1(x,y),\ f_2(x,y)]\equiv 0 \end{cases}$$

且有

$$f_1(x_0,y_0)=u_0,\ f_2(x_0,y_0)=v_0$$

证明从略。

例 2 判断方程组

$$\begin{cases} F_1(x,y,u,v)=u^2+v^2-x^2-y^2=0 \\ F_2(x,y,u,v)=u+v-x-y=0 \end{cases}$$

在点 $M(2,1,1,2)$ 的邻域内，存在唯一的具有连续偏导数的二元函数组

$$u=f_1(x,y),\ v=f_2(x,y)$$

解 （1）容易看出函数F_1和F_2及其它们的所有偏导数，在点M的邻域内连续；

（2） $F_1(2,1,1,2)=1+4-4-1=0$

$F_2(2,1,1,2)=1+2-2-1=0$

（3）由于

$$\frac{\partial F_1}{\partial u}=2u,\ \frac{\partial F_1}{\partial v}=2v,\ \frac{\partial F_2}{\partial u}=1,\ \frac{\partial F_2}{\partial u}=1$$

有
$$J=\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}\right|_M=\left|\begin{matrix}\frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v}\end{matrix}\right|_M=\left|\begin{matrix}2u & 2v \\ 1 & 1\end{matrix}\right|_M$$

$$=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2-4=-2\neq 0$$

根据定理17.5，在点M的邻域内，存在唯一的具有连续偏导数的二元函数组

$$u=f_1(x,y),\ \ v=f_2(x,y)$$

§17.4 隐函数的微分法

求由方程所确定的隐函数（一元、多元）的导数和偏导数是经常遇到的问题。本节在前两节的基础上总结一下计算隐函数导数和偏导数的一般法则。

一 由一个方程所确定的隐函数的微分法

1 设方程

$$F(x,y)=0 \tag{1}$$

满足隐函数存在定理和可微性定理的条件。于是，由方程(1)可确定y是x的函数（或x是y的函数），把它代入方程（1），就可把$F(x,y)$看作关于x的恒等于零的复合函数。由复合函数的求导法则，有

$$F'_x(x,y)+F'_y(x,y)\frac{dy}{dx}=0 \tag{2}$$

于是，得公式

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}\quad (F'_y\neq 0) \tag{17.9}$$

例1 设y是由方程

$$\ln\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

所确定的x的函数，求$\frac{dy}{dx}$。

解法1 应用公式（17.9）。设

$$F(x, y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=0$$

$F(x,y)$的两个偏导数为

$$F'_x=\frac{2x}{2(x^2+y^2)}-\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{x+y}{x^2+y^2}$$

$$F'_y=\frac{2y}{2(x^2+y^2)}-\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{y-x}{x^2+y^2}$$

于是，由公式（17.9），有

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{x+y}{y-x}=\frac{x+y}{x-y}$$

解法2 应用一阶微分形式的不变性。

对等式两边求微分，得

$$\frac{2xdx+2ydy}{2(x^2+y^2)}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{xdy-ydx}{x^2}$$

$$\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

于是，
$$xdx+ydy=xdy-ydx$$
$$(x-y)dy=(x+y)dx$$

有
$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$$

例2 设y是由方程

$$x^2+y^2-a^2=0$$

所确定的x的隐函数，求$\frac{d^2y}{dx^2}$。

解 方程对x求导，得

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0，\text{即}x+y\frac{dy}{dx}=0\ (*)$$

对(*)式，再求导得

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

于是， $$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{y}$$

由(*)解出$\frac{dy}{dx}$代入上式中，有

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{x^2+y^2}{y^3}=\frac{-a^2}{y^3}$$

例 2 设方程

$$F(x,y,z)=0 \tag{3}$$

满足隐函数存在定理和可微性定理的条件。于是，由方程(3)可确定 z 是 x,y 的二元函数。由方程（3）分别对 x 和y求偏导数，有

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

有 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\quad\left(\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0\right) \tag{17.10}$$

例 3 设 z 是由方程

$$x+y+z=e^{x+y+z}$$

所确定的隐函数，求$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$。

解 设

$$F(x,y,z)=x+y+z-e^{x+y+z}=0$$

$F(x,y,z)$ 的三个偏导为

$$F'_x = 1 - e^{x+y+z},\ F'_y = 1 - e^{x+y+z},\ F'_z = 1 - e^{x+y+z}$$

于是，由公式（17.10），有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{1 - e^{x+y+z}}{1 - e^{x+y+z}} = -1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{1 - e^{x+y+z}}{1 - e^{x+y+z}} = -1$$

例 4 设 $F(x, x+y, x+y+z) = 0$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$。

解 此题指出z是x, y的函数。设

$$u = x + y,\ v = x + y + z$$

这时$F(x, x+y, x+y+z) = F(x, u, v)$。由复合函数的求导法则，有

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

即
$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}\left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$$

所以有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial u} + \dfrac{\partial F}{\partial v}}{\dfrac{\partial F}{\partial v}}$$

二 由方程组所确定的隐函数

1 设方程组

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \tag{17.11}$$

满足定理17.4的条件，则隐函数y, z关于x可导。由复合函数的求导法则有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F_1}{\partial x}+\dfrac{\partial F_1}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\partial F_1}{\partial z}\dfrac{dz}{dx}=0\\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x}+\dfrac{\partial F_2}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\partial F_2}{\partial z}\dfrac{dz}{dx}=0\end{cases}$$

这是关于$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{dz}{dx}$的线性方程组，其系数行列式恰是函数F_1,F_2关于y,z的函数行式，根据假设它不等于零。因此解得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\begin{vmatrix}-\dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z}\\ -\dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z}\\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z}\end{vmatrix}}=-\frac{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,z)}}{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}}$$

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,x)}}{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}}$$

例 5 求由方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-6=0\\ x+y+z=0\end{cases}$$

所确定的隐函数y，z在点（1，－2，1）的导数。

解 我们在 §17.2例 1 中已判断此方程组满足定理17.4的所有条件。对每一方程关于x求导数，有

$$\begin{cases}2x+2y\dfrac{dy}{dx}+2z\dfrac{dz}{dx}=0\\ 1+\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}=0\end{cases}$$

于是，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\begin{vmatrix}-2x & 2z\\ -1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2y & 2z\\ 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{2z-2x}{2y-2z}=\frac{z-x}{y-z}$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\begin{vmatrix}2y & -2x\\ 1 & -1\end{vmatrix}}{2y-2z}=\frac{2x-2y}{2y-2z}=\frac{x-y}{y-z}$$

所以在点（1，−2，1）上，有$\frac{dy}{dx}=0$，$\frac{dz}{dy}=-1$。

2　**设方程组**

$$\begin{cases}F_1(x,y,u,v)=0\\ F_2(x,y,u,v)=0\end{cases}$$

满足定理17.4的条件，如同1一样考虑，不难得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}} \tag{17.12}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}}$$

例6　设u,v是由方程组

$$\begin{cases}F_1=u^2+v^2-x^2-y=0\\ F_2=u+v-x^2+y=0\end{cases} \tag{1}$$

所确定的x,y的隐函数，求它们的偏导数。

解　对（1）分别求关于x,y,u,v的偏导数，有

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}=-2x,\quad \frac{\partial F_2}{\partial x}=-2x,\quad \frac{\partial F_1}{\partial y}=-1$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y}=1,\ \frac{\partial F_1}{\partial u}=2u,\ \frac{\partial F_2}{\partial u}=1,\ \frac{\partial F_1}{\partial v}=2v$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial v}=1$$

于是，由公式（17.12），有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix}-2x & 2v\\ -2x & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2u, & 2v\\ 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{x(1-2v)}{u-v}$$

同理

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1+2v}{2(u-v)},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{x(2u-1)}{u-v}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{-(2u+1)}{2(u-v)}$$

§17.5 映 射

先引入映射的概念．设函数组

$$f:\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases}\tag{1}$$

是定义在xy平面上某一点集D上的两个二元函数．在D上每取定一个点(x,y)时，由函数组，（1）在uv平面上有唯一一点(u,v)与之相对应．于是，xy平面上的点集D，通过函数组（1）得到uv平面上的一个点集D'，我们称函数组（1）确定了一个xy平面上的点集D到uv平面上的点集D'的**映射**．在这个映射下，D'的点(u,v)称为D中的点(x,y)的**象**，而(x,y)则称为(u,v)的**原象**（如图17.3）．

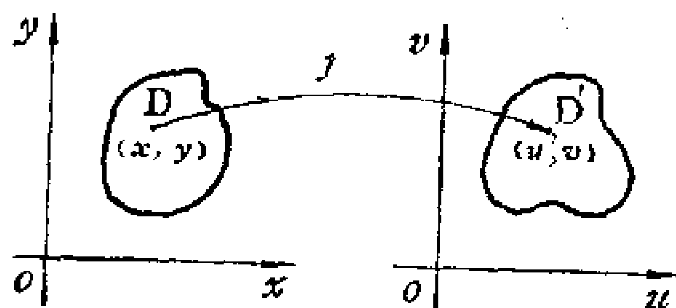


图17.3

反过来，点集D'中的每一个点(u,v)，是否也只有点集D中唯一的一点与之相对应呢？正如并不是每一个一元函数都存在反函数一

样，一般说来未必如此．但当D与D'两个平面点集之间按函数组（1）能建立一一对应关系时，我们才能确定一个定义在D'上的函数组

$$f^{-1}:\begin{cases}x = x(u,v)\\ y = y(u,v)\end{cases} \qquad (2)$$

使得D'中的每个象都只有D中的一个原象与之相对应．这时，我们称映射（2）是映射（1）的**逆映射**．映射（1）用记号f表示时，它的逆映射（2）用f^{-1}来表示．

存在逆映射的映射，也称为**变换**．逆映射就是它的**逆变换**．

由映射的概念不难看出，映射是函数概念的一种推广．其实，我们在前面学过的一元函数和多元函数的概念，完全可以由映射来定义（对此进一步的说明参看学习指导）．从函数角度来看，函数组（2）是函数组（1）的**反函数组**．

关于逆映射（逆变换）的存在性，有如下的定理：

定理17.6 如果映射f，即函数组（1），在点$P(x_0,y_0)$某邻域$U(P,\delta)$内，满足条件：

（1）函数$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$及其它们的偏导数都连续；

（2）$u_0=u(x_0,y_0)$，$v_0=v(x_0,y_0)$

（3）$J=\left.\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|_P \neq 0$

则在点$Q(u_0,v_0)$的某邻域$U(Q,\delta')$内，有映射f的逆映射

$$f^{-1}:\begin{cases}x = x(u,v)\\ y = y(u,v)\end{cases}$$

证明 把函数组（1）改写成下面形式：

$$\begin{cases}F_1(u,v,x,y) = u - u(x,y) = 0\\ F_2(u,v,x,y) = v - v(x,y) = 0\end{cases} \qquad (3)$$

由此可看出，这个定理是定理17.4的推论．

事实上，由条件（2）知

$$F_1(u_0, v_0, x_0, y_0) = u_0 - u(x_0, y_0) = 0$$

$$F_2(u_0, v_0, x_0, y_0) = v_0 - v(x_0, y_0) = 0$$

由条件（3）知，有

$$J = \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y)}\bigg|_P = \begin{vmatrix} -\dfrac{\partial u}{\partial x} & -\dfrac{\partial u}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial v}{\partial x} & -\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}_P$$

$$= \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\bigg|_P \neq 0$$

于是，根据定理17.5，在点Q的某邻域$U(Q, \delta')$内，由方程组（3）可确定一组唯一的具有连续偏导数的函数组

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases} \qquad (4)$$

映射（4），正是映射f的逆映射f^{-1}。因为

$$x(u_0, v_0) = x_0, \quad y(u_0, v_0) = y_0$$

所以逆映射f^{-1}把点$Q(u_0, v_0)$映射到点$P(x_0, y_0)$，而且根据（4）的唯一性，对于每一点$(u, v) \in U(Q, \delta')$，都是邻域$U(P, \delta)$内唯一一点(x, y)的象，也就是说，对于点Q的邻域$U(Q, \delta')$的每一个象，都有点P的邻域$U(P, \delta)$内唯一一个原象相对应。这样，映射f在邻域$U(P, \delta)$与$U(Q, \delta')$之间建立了一一对应关系，所以映射（4）是映射f的逆映射f^{-1}。 □

顺便指出，在满足定理17.6的条件下，函数组（4）是函数组（1）的反函数组，而且它们都存在连续的偏导数。它们的偏导数，可借助于隐函数的微分法，直接从（3）式推得。

从定理17.6不难理解，如果定义在开区域D上的映射

$$f: \begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

是一一对应的，而且在D内

$$J=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\neq 0$$

则在映射f下，区域D的象D'是uv平面上的某开区域。这叫做保持区域的映射。

本节最后我们给出雅可比行列式的几何意义。

定理17.7 如果函数$x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$在uv平面上的区域E'上存在连续偏导数，且

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$$

映射

$$f:\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\end{cases}$$

是E'到xy平面上E的一一映射，设$\Delta\sigma'$为在E'上以点(u_0,v_0)为一个顶点的小矩形的面积，$\Delta\sigma$为在映射f下在E上的象，则映射f的雅可比行列式为

$$\lim_{\substack{\Delta u\to 0\\ \Delta v\to 0}}\frac{\Delta\sigma}{\Delta\sigma'}=|J(u_0,v_0)|$$

即映射f的雅可比行列式的绝对值是由映射f所引起的在点(u_0,v_0)的邻域内面积的膨胀或收缩系数。

证明 在区域E'中，任取以(u_0,v_0)为一个顶点的小矩形$ABCD$，使其边平行于坐标轴。设顶点的坐标分别为

$A(u_0,v_0)$，$B(u_0+\Delta u,v_0)$，$C(u_0+\Delta u,v_0+\Delta v)$，$D(u_0,v_0+\Delta v)$

显然，小矩形$ABCD$的面积$\Delta\sigma'=\Delta u\Delta v$。

映射f将E'内的四点A,B,C,D，映射到E内的四点A'，B'，C'，D'。矩形$ABCD$的象为曲边四边形$A'B'C'D'$（图17.4）。其顶点的坐标是

$A'[x(u_0,v_0),\ y(u_0,v_0)]$，

$B'[x(u_0+\Delta u,v_0),y(u_0+\Delta u,v_0)]$

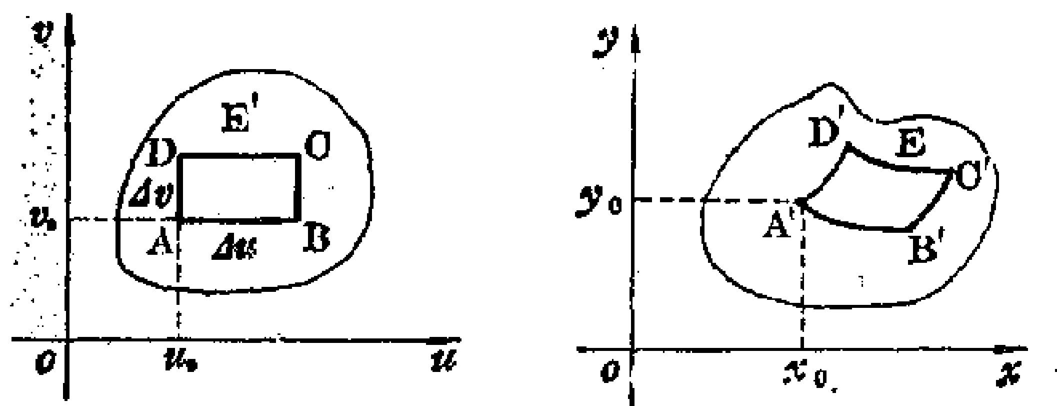


图17.4

$$C'[x(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v),\ y(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v)],$$

$$D'[x(u_0, v_0+\Delta v), y[u_0, v_0+\Delta v)]$$

设曲边四边形$A'B'C'D'$的面积为$\Delta\sigma$，则$\Delta\sigma$可近似看作以A', B'，C'为顶点的三角形面积的二倍，由解析几何知

$$\Delta\sigma \approx \pm \begin{vmatrix} x(u_0+\Delta u, v_0)-x(u_0,v_0) & x(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v)-x(u_0+\Delta u, v_0) \\ y(u_0+\Delta u, v_0)-y(u_0,v_0) & y(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v)-y(u_0+\Delta u, v_0) \end{vmatrix}$$

根据拉格朗日中值定理和偏导数的连续性，有

$$\Delta\sigma \approx \pm \begin{vmatrix} x'_u(u_0+\theta_1\Delta u, v_0)\Delta u & x'_v(u_0+\Delta u, v_0+\theta_2\Delta v)\ \Delta v \\ y'_u(u_0+\theta_3\Delta u, v_0)\Delta u & y'_v(u_0+\Delta u, v_0+\theta_4\Delta v)\ \Delta v \end{vmatrix}$$

$$\approx \pm \begin{vmatrix} x'_u(u_0,v_0) & x'_v(u_0,v_0) \\ y'_u(u_0,v_0) & y'_v(u_0,v_0) \end{vmatrix} \Delta u\Delta v = |J\ (u_0,v_0)\ |\Delta u\Delta v$$

其中$\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4$都是0与1之间的数。于是当$\Delta u$，$\Delta v$ 充分小时，有

$$\Delta\sigma \approx |J\ (u_0,v_0)|\Delta u\Delta v = |J\ (u_0,v_0)\ |\Delta\sigma'$$

即

$$\lim_{\substack{\Delta u\to 0\\ \Delta v\to 0}} \frac{\Delta\sigma}{\Delta\sigma'} = |J\ (u_0,v_0)\ | \qquad \square$$

如果$d\sigma$表示E的面积微元，$d\sigma'$ 表示E'的面积微元，则上面结果可表为

$$\frac{d\sigma}{d\sigma'}=|J\ (u_0,v_0)\ |$$

§17.6 在几何上的应用

在这一节我们讨论隐函数在空间几何上的应用。

一 空间曲线的切线与法平面

设空间曲线L由参数方程

$$L:\ x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t),\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta \quad (1)$$

给出，在点$P(x_0,y_0,z_0)$ 处有

$$x_0=x(t_0),\ y_0=y(t_0),\ z_0=z(t_0),\ \alpha\leqslant t_0\leqslant\beta$$

并假定（1）式的三个函数可微。

在曲线L上点P的邻域任取一点$P'(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,\ z_0+\Delta z)$，这时点$P$与$P'$的割线方程为

$$\frac{x-x_0}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{\Delta y}=\frac{z-z_0}{\Delta z}$$

其中 $\Delta x=x(t_0+\Delta t)-x(t_0)$，$\Delta y=y(t_0+\Delta t)-y(t_0)$，$\Delta z=z(t_0+\Delta t)-z(t_0)$。用$\Delta t$除上式的分母，有

$$\frac{x-x_0}{\dfrac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{y-y_0}{\dfrac{\Delta y}{\Delta t}}=\frac{z-z_0}{\dfrac{\Delta z}{\Delta t}}$$

当$P'\to P$时，$\Delta t\to 0$。于是，有

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}\to x'(t_0),\frac{\Delta y}{\Delta t}\to y'(t_0),\frac{\Delta z}{\Delta t}\to z'(t_0)$$

从而得曲线L在点P的切线PT方程为

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)} \qquad (17.13)$$

由此可见$x'(t_0)$，$y'(t_0)$，$z'(t_0)$是曲线L在点P 处切线的方向数。从而切线的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{x'(t_0)}{\sqrt{x'^2(t_0) + y'^2(t_0) + z'^2(t_0)}}$$

$$\cos\beta = \frac{y'(t_0)}{\sqrt{x'^2(t_0) + y'^2(t_0) + z'^2(t_0)}}$$

$$\cos\gamma = \frac{z'(t_0)}{\sqrt{x'^2(t_0) + y'^2(t^0) + z'^2(t_0)}}$$

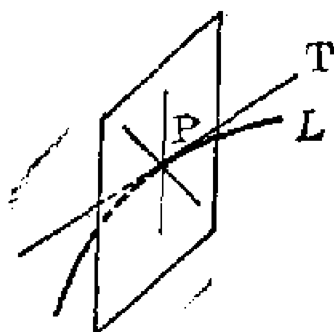


图17.5

过曲线L上的点P可以作无限多条垂直于切线PT的直线．如果所有这些直线都在同一平面上，则称这平面为曲线L在点P处的**法平面**（如图17.5）．于是可知过点P，且在点P处的法平面的法线就是曲线在点P处的切线。因此由解析几何知，法平面的法线方向数为

$$x'(t_0),\ y'(t_0),\ z'(t_0)$$

于是，过曲线L在点P处的法平面方程为

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0 \tag{17.14}$$

例1　求螺旋线

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = ct$$

在当$t = \frac{\pi}{3}$时的切线方程和法平面方程。

解　由于

$$x'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -a\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}a,\ y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = a\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}a,$$

$$z'\left(\frac{\pi}{3}\right) = c$$

所以根据公式(17.13)切线方程为

$$\frac{x - \frac{1}{2}a}{-\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{y - \frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{1}{2}a} = \frac{z - c\frac{\pi}{3}}{c}$$

即
$$\frac{2x - a}{-\sqrt{3}a} = \frac{2y - \sqrt{3}a}{a} = \frac{3z - c\pi}{3c}$$

根据公式(17.14)，法平面方程为

$$-\sqrt{3}a\left(x-\frac{1}{2}a\right)+a\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)+2c\left(z-\frac{c\pi}{3}\right)=0$$

例2 求曲线$y=x, z=x^2$在点P（1,1，1）处的切线方程与法平面方程。

解 我们把x看作参数，则曲线的参数方程为

$$x=x,\quad y=x,\quad z=x^2$$

过点P的切线的方向数为1，1，2。所以点P的切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$$

法平面方程为

$$(x-1)+(y-1)+2(z-1)=0$$

即 $$x+y+2z-4=0$$

设空间曲线由方程组

$$L:\begin{cases}F_1(x,y,z)=0\\F_2(x,y,z)=0\end{cases}\tag{2}$$

给出，如果它在点P（x_0,y_0,z_0）的某邻域内满足定理17.4的所有条件，则方程组（2）在点P的邻域可确定隐函数组

$$y=f_1(x),\quad z=f_2(x)\tag{3}$$

使得$y_0=f_1(x_0)$，$z_0=f_2(x_0)$，且

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,z)}}{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}},\quad \frac{dz}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,x)}}{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}}$$

由于方程组（2）与函数组（3）表示同一条曲线，现以x为参量，就得点P邻域的曲线方程

$$x=x,\quad y=f_1(x),\quad z=f_2(x)$$

于是点P处的切线方程和法平面方程为

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{dy}{dx}\right|_P}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{dz}{dx}\right|_P}$$

即

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}\right|_P}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,x)}\right|_P}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}\right|_P} \quad (17.15)$$

$$\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}\right|_P(x-x_0)+\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,x)}\right|_P(y-y_0)$$

$$+\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}\right|_P(z-z_0)=0 \quad (17.16)$$

例 3 求球面$x^2+y^2+z^2=6$与平面$x+y+z=0$的交线在点$P(1,-2,1)$处的切线方程与法平面方程。

解 设

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6=0 \\ F_2(x,y,z)=x+y+z=0 \end{cases}$$

它们的偏导数为

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial F_1}{\partial y}=2y,\ \frac{\partial F_1}{\partial z}=2z$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}=1,\ \frac{\partial F_2}{\partial y}=1,\ \frac{\partial F_2}{\partial z}=1$$

于是

$$\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}\right|_P=\begin{vmatrix}-4 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-6$$

$$\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,x)}\right|_P=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0$$

$$\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}\right|_P=\begin{vmatrix}2 & -4\\ 1 & 1\end{vmatrix}=6$$

从而曲线在点P处的切线方程为

$$\frac{x-1}{-6}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{6}$$

法平面方程为

$$-6(x-1)+0(y+2)+6(z-1)=0$$

即 $$x-z=0$$

二 曲面的切平面与法线

我们在全微分的几何意义中曾讨论过，如果曲面由方程 $z=f(x,y)$ 给出，且函数 $z=f(x,y)$ 可微，则曲面在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面方程为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_P(x-x_0)+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_P(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

如果曲面由方程 $F(x,y,z)=0$ 给出，设曲面上，过点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的任一条曲线的参数方程为

$$x=x(t),\qquad y=y(t),\qquad z=z(t) \tag{3}$$

并假定（3）在对应于 P 的 t_0 点可微，则过点 P 的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}$$

由于曲线（3）在曲面 $F(x,y,z)=0$ 上，所以有恒等式

$$F[x(t),\ y(t),\ z(t)]\equiv 0$$

如果函数 $F(x,y,z)$ 可微，则根据复合函数的求导法则有

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)\ x'(t_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)\ y'(t_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)\ z'(t_0)=0$$

由此可知，通过点 P 的任意一条曲线的切向量 $\{x'(t_0),\ y'(t_0)\ z'(t_0)\}$ 与向量 $\vec{n}=\{F'_{x_0},F'_{y_0},\ F'_{z_0}\}$ 垂直，所以过点 P 的任一条曲线的切线都在以向量 $\vec{n}$ 为法向量的平面上，于是，过点 P 的切平面方程为

$$F'_{x_0}(x-x_0)+F'_{y_0}(y-y_0)+F'_{z_0}(z-z_0)=0$$

而法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F'_{x_0}}=\frac{y-y_0}{F'_{y_0}}=\frac{z-z_0}{F'_{z_0}}$$

如果用α,β,γ分别表示曲面$F(x,y,z)=0$在点P的法线与坐标轴正向夹角，则法线的方向余弦为

$$\cos\alpha=\pm\frac{F'_{x_0}}{\sqrt{F'^2_{x_0}+F'^2_{y_0}+F'^2_{z_0}}},$$

$$\cos\beta=\pm\frac{F'_{y_0}}{\sqrt{F'^2_{x_0}+F'^2_{y_0}+F'^2_{z_0}}},$$

$$\cos\gamma=\pm\frac{F'_{z_0}}{\sqrt{F'^2_{x_0}+F'^2_{y_0}+F'^2_{z_0}}}$$

这里根式前面的符号，同时取正号或者负号。

如果曲面由参数方程

$$x=x(s,t),\ y=y(s,t),\ z=z(s,t) \tag{4}$$

给出，在st平面上的一点$M(s_0,t_0)$对应于曲面上的一点$P(x_0,y_0,z_0)$，其中

$$x_0=x(s_0,t_0),\ y_0=y(s_0,t_0),\ z_0=z(s_0,t_0)$$

假定函数组（4）在点M的邻域内存在对s与t的连续偏导数，且$\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right|_M\neq 0$，则根据定理17.6，函数组$x=x(s,t)$，$y=y(s,t)$存在反函数组$s=s(x,y)$，$t=t(x,y)$。于是曲面方程可表为

$$z=z[s(x,y),\ t(x,y)]$$

由隐函数的求导法则，有

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

于是

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(s,t)}}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(s,t)}}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}}$$

从而曲面在点P的切平面方程为

$$\left.\frac{\partial(y,z)}{\partial(s,t)}\right|_M (x-x_0)+\left.\frac{\partial(z,x)}{\partial(s,t)}\right|_M (y-y_0)$$

$$+\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right|_M (z-z_0)=0$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{\left.\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(s,t)}\right|_M}=\frac{y-y_0}{\left.\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(s,t)}\right|_M}=\frac{z-z_0}{\left.\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right|_M}$$

例 4 求曲面

$$F(x,y,z)=x^2-xy-8x+z+5=0$$

在点$P(2,-3,1)$的切平面方程和法线方程.

解 由于

$$F'_x|_P=(2x-y-8)|_P=-1,\quad F'_y|_P=(-x)|_P=-2$$

$$F'_z|_P=1$$

所以，在点P的切平面方程为

$$-(x-2)-2(y+3)+(z-1)=0$$

即 $$x+2y-z+5=0$$

法线方程为

$$\frac{x-2}{-1}=\frac{y+3}{-2}=z-1$$

例 5 求曲面

$$x=s+t,\quad y=s^2+t^2,\quad z=s^3+t^3$$

在点M（0，2）所对应的点P的切平面方程和法线方程.

解 点M（0，2）所对应的曲面上点P的坐标是$x=2$，$y=4$，$z=8$.

$$\frac{\partial x}{\partial s}=1,\quad \frac{\partial x}{\partial t}=1,\quad \frac{\partial y}{\partial s}=2s,\quad \frac{\partial y}{\partial t}=2t,\quad \frac{\partial z}{\partial s}=3s^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=3t^2$$

$$\left.\frac{\partial(y,z)}{\partial(s,t)}\right|_P = 0, \quad \left.\frac{\partial(z,x)}{\partial(s,t)}\right|_P = -12$$

$$\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right|_P = 4$$

于是，曲面在点P的切平面方程为

$$-12(y-4)+4(y-8)=0$$

即 $$3y-z-4=0$$

法线方程为

$$\frac{x-2}{0}=\frac{y-4}{-12}=\frac{z-8}{4} \text{ 即 } \frac{x-2}{0}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z-8}{1}$$

§17.7 条件极值

在十六章讨论的多元函数极值问题中，对自变量没有什么约束，它可以在其定义域内自由变化，这种极值我们称为普通极值。但在实际问题中往往对自变量提出一些约束条件，使自变量只能在定义域的某一范围内变化。例如，在已知周长为$2p$的一切三角形中，求面积为最大的三角形。设x，y，z分别为三角形的三边之长，则我们要求函数

$$f(x,y,z)=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)} \tag{1}$$

的最大值，但是自变量x,y,z要受条件$x+y+z=2p$的限制。这种极值称为条件极值。

在有些情况下，将条件极值可化为普通极值。如上述问题，可由条件$x+y+z=2p$，将z表示成x，y的函数$z=2p-x-y$，再把它代入（1）中，于是问题就化为

$$\varphi(x,y)=\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}$$

的普通极值问题。

可是在很多情况下，将条件极值化为普通极值，问题并不这样简单，甚至不可能。我们另有一种直接寻求条件极值的方

法，这就是下面要介绍的拉格朗日乘数法

现在我们讨论函数

$$z=f(x,y)$$

在条件

$$F(x,y)=0 \qquad (2)$$

下取极值的必要条件.

如果函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)取极值，则首先有

$$F(x_0,y_0)=0$$

我们假定函数$f(x,y)$与$F(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内有连续的一阶偏导数，且$F'_y(x_0,y_0)\neq 0$，则由隐函数存在定理可知，方程（2）可确定一个可微函数$y=\varphi(x)$，将其代入$z=f(x,y)$中得变量x的一元函数

$$z=f[x,\varphi(x)] \qquad (3)$$

于是函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)取极值，相当于函数（3）在点x_0取极值．由一元可微函数取极值的必要条件，有

$$f'_x(x_0,y_0)+f'_y(x_0,y_0)\varphi'(x_0)=0$$

再由隐函数的微分法，有

$$\varphi'(x_0)=-\frac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}$$

于是，$$f'_x(x_0,y_0)-f'_y(x_0,y_0)\frac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}=0 \qquad (4)$$

设 $\frac{f'_y(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}=-\lambda$，则由（4）式可得

$$\begin{cases} f'_x(x_0,y_0)+\lambda F'_x(x_0,y_0)=0 \\ f'_y(x_0,y_0)+\lambda F'_y(x_0,y_0)=0 \\ F(x_0,y_0)=0 \end{cases} \qquad (5)$$

这就是函数$z=f(x,y)$在条件方程$F(x,y)=0$下在点(x_0,y_0)取极值的必要条件.

由以上讨论，我们得到如下的结论：

拉格朗日乘数法 求函数$z=f(x,y)$在条件$F(x,y)=0$下的极值点。先作辅助函数

$$\Phi(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda F(x,y) \tag{6}$$

然后令函数Φ关于x,y,λ的偏导数为零，即

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}=f'_x(x,y)+\lambda F'_x(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}=f'_y(x,y)+\lambda F'_y(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \lambda}=F(x,y)=0 \end{cases} \tag{7}$$

求这个方程组的解(x_0,y_0,λ_0)，求解过程中消去λ，求得满足方程组的点(x_0,y_0)，这个点就是稳定点，这种方法称为拉格朗日乘数法，它的实值是把求条件极值的问题转化为讨论函数（6）的普通极值的问题。

拉格朗日乘数法，只给出了取条件极值的必要条件，方程组（7）的解即稳定点是否是极值点，一般可由实际问题的具体意义来判别。

拉格朗日乘数法还可以推广到自变量多于两个，条件多于一个的情形。例如，要求函数

$$u=f(x,y,z)$$

在条件

$$F_1(x,y,z)=0,\quad F_2(x,y,z)=0$$

下的极值。先作辅助函数

$$\Phi(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=f(x,y,z)+\lambda_1F_1(x,y,z)+\lambda_2F_2(x,y,z)$$

然后令函数Φ关于$x,y,z,\lambda_1,\lambda_2$的偏导数为零

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}=f'_x(x,y,z)+\lambda_1F'_{1x}(x,y,z)+\lambda_2F'_{2x}(x,y,z)=0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}=f'_y(x,y,z)+\lambda_1F'_{1y}(x,y,z)+\lambda_2F'_{2y}(x,y,z)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = f'_z(x,y,z) + \lambda_1 F_{1z}'(x,y,z) + \lambda_2 F_{2z}'(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_1} = F_1(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_2} = F_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

求这个方程的解 (x_0, y_0, z_0)，然后根据实际问题的具体意义判别它是否为极值点。

例 1　我们解本节开始提出的问题，即在周长为 $2p$ 的三角形中求面积为最大的三角形。

解　我们已经知道，这是函数

$$f(x,y,z) = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$$

在条件

$$x + y + z = 2p$$

下的极值问题。

为了计算方便起见我们用面积函数的平方来作。作辅助函数

$$F(x,y,z,\lambda) = p(p-x)(p-y)(p-z) + \lambda(x + y + z - 2p)$$

解方程组

$$\begin{cases} F'_x = -p(p-y)(p-z) + \lambda = 0 & (1) \\ F'_y = -p(p-x)(p-z) + \lambda = 0 & (2) \\ F'_z = -p(p-x)(p-y) + \lambda = 0 & (3) \\ F'_\lambda = x + y + z - 2p = 0 & (4) \end{cases}$$

由（1）和（2）得 $x = y$，由（2）和（3）得 $y = z$，再由（4）得

$$x = y = z = \frac{2}{3}p$$

于是方程组只有一个解。显然这个问题存在最大值，因此，函

数$f(x,y,z)$在点$\left(\frac{2}{3}p,\ \frac{2}{3}p,\ \frac{2}{3}p\right)$必取最大值，即周长为一定的一切三角形中，正三角形的面积最大。

例2　求三维空间的一点(x_0,y_0,z_0)到平面$Ax+By+Cz+D=0$的距离。

解　设(x,y,z)为平面上的任意一点。此题就是求函数

$$r(x,y,z)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

在条件

$$Ax+By+Cz+D=0$$

下的最小值。

为方便起见我们考虑函数$r^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$。注意，函数$r$与$r^2$的极值点相同，作辅助函数

$$F(x,y,z,\lambda)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2+\lambda(Ax+By+Cz+D)$$

$$\begin{cases} F'_x=2(x-x_0)+\lambda A=0 & (1)\\ F'_y=2(y-y_0)+\lambda B=0 & (2)\\ F'_z=2(z-z_0)+\lambda C=0 & (3)\\ F'_\lambda=Ax+By+Cz+D=0 & (4)\end{cases}$$

由(1)，(2)，(3)式解得

$$x=x_0-\frac{1}{2}\lambda A,\quad y=y_0-\frac{1}{2}\lambda B,\quad z=z_0-\frac{1}{2}\lambda C$$

将x,y,z代入(4)式，得

$$\lambda=\frac{2(Ax_0+By_0+Cz_0+D)}{A^2+B^2+C^2}$$

于是方程组只有一个解：

$$x'=x_0-\frac{A(Ax_0+By_0+Cz_0+D)}{A^2+B^2+C^2}$$

$$y'=y_0-\frac{B(Ax_0+By_0+Cz_0+D)}{A^2+B^2+C^2}$$

$$z' = z_0 - \frac{C(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)}{A^2 + B^2 + C^2}$$

显然这个问题存在最小值。因此，r^2在点（x'，y'，z'）必取最小值。最小值为

$$r^2 = \frac{(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)^2}{A^2 + B^2 + C^2}$$

于是，点（x_0, y_0, z_0）到平面$Ax + By + Cz + D = 0$的距离为

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

这与解析几何中点到平面的距离公式一致。

学 习 指 导

一 内容概要

1 重点及要求

本章的重点是隐函数的存在性、隐函数的微分法及隐函数在几何和条件极值上的应用。对隐函数的存在性，要求掌据由一个方程（或方程组）可确定隐函数（或隐函数组）的条件，尤其是注意理解定理17.1和定理17.4中条件 $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ 和 $J = \left.\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y, z)}\right|_M \neq 0$ 在证明定理中所处的重要地位。

对隐函数的微分法，不必死记公式，在隐函数存在的条件下，注意哪个变量是哪个（或哪些）变量的函数，再由恒等式出发，根据复合函数的求导法则，对方程求导后解出所求的隐函数的导数或偏导数。

对几何上的应用，要求掌握空间曲线的切线与法平面方程和曲面的切平面与法线方程的公式，并能解决一些实际问题。对条件极值，要掌握拉格朗日乘数法和根据问题的实际意义能够判别所求得的稳定点是否是极值点。

2 内容概要

本章主要讨论了隐函数理论：在什么条件下，一个方程

（或方程组）可确定隐函数（或隐函数组），即隐函数的存在性；如何直接由确定隐函数的方程来研究隐函数的性质，如连续性、可微性等。

隐函数的存在性，我们是先从由一个方程所确定的隐函数开始讨论的。它是所有隐函数理论的基础，要给予足够的重视。在存在性定理的条件中，$F(x_0,y_0)=0$是能确定隐函数的必要条件；而$F'_y(x,y)$连续及$F'_y(x_0,y_0)\neq 0$是关键性条件，它保证函数$F(x,y)$在点(x_0,y_0)的邻域内，对任意固定的x，$F(x,y)$是y的严格单调函数，从而可推出y是x的函数。由方程组（我们讨论的是二个方程）所确定的隐函数组，是以一个方程所确定的隐函数为基础，采用类似于代数中解方程组的代入法。连续用两次定理17.1证明的，这里起关键作用的是条件$J=\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}\right|_M\neq 0$。

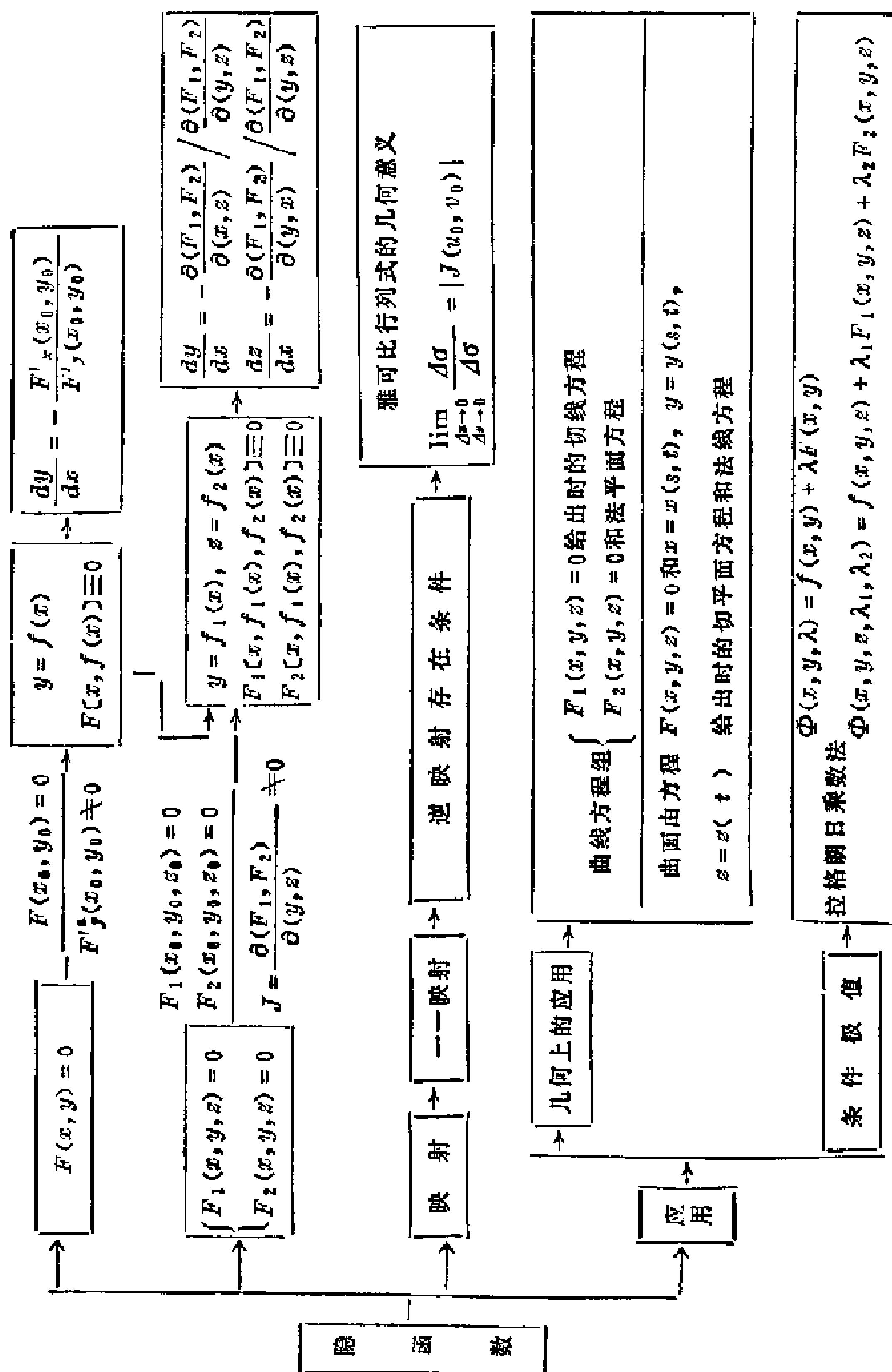
隐函数的可微性，我们是应用拉格朗日中值定理解决的，这种二元函数中固定一个变量，对另一个变量应用中值定理是解决二元函数不少问题的常用方法，注意掌握它的思想方法。隐函数的微分法，是从恒等式出发，应用复合函数的求导法则给出的。

映射概念是函数概念的一种推广。解析几何中的坐标变换，高等代数中的线性变换等等，都是映射的例子。在映射这一节中，我们重点讨论了在平面区域上一一映射的概念及一个映射存在逆映射的条件，即在平面上一个变换存在逆变换的条件，这里变换（映射）的雅可比行列式不为零起决定性作用。关于雅可比行列式的几何意义在重积分的计算中有重要应用。

本章最后我们讨论了隐函数在几何和条件极值上的应用。对几何上的应用，我们推导了当空间曲线由方程给出时的切线方程及法平面方程；当曲面由方程给出时的切平面方程及法线方面。这些是多元函数的微分学在几何上的重要应用。关于条件极值，我们仅讨论了取极值的必要条件。拉格朗日乘数法的

实质，就是把条件极值转化为普通极值来解决．对实际问题，根据它的实际意义，可判别辅助函数在稳定点是否取极值．

本章内容的结构列表如下：



二　几点说明

1　隐函数存在性定理的另一叙述

我们已知在隐函数存在性定理17.1中，$F'_y(x, y)$ 连续和 $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$ 是定理成立的关键性条件，它的作用在于由此可推得当x固定时，$F(x,y)$对于y是严格单调的．这样隐函数存在性定理还有另一种叙述：

如果函数$F(x,y)$满足条件：

（1）在点（x_0,y_0）的某邻域

$$D=\{(x,y)|\,|x-x_0|\leqslant a,|y-y_0|\leqslant\beta\}$$

内连续；

（2）$F(x_0,y_0)\neq 0$

（3）当x固定时，函数$F(x,y)$是对y的严格单调函数．

则在点x_0的某邻域（$x_0-\delta$，$x_0+\delta$）内，存在唯一的连续函数$y=f(x)$，使

$$F[x,f(x)]\equiv 0$$

且

$$y_0=f(x_0)$$

2　隐函数的极值

设函数$F(x, y)$存在二阶偏导数，且方程$F(x,y)=0$满足存在隐函数$y=f(x)$的一切条件．我们讨论隐函数取极值的必要条件和充分条件．

必要条件　设隐函数$y=f(x)$在点x_0（$f(x_0)=y_0$）取极值，则根据一元函数取极值的必要条件，有

$$f'(x_0)=-\frac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}=0$$

由于$F'_y(x_0,y_0)\neq 0$，而且$F(x_0,y_0)=0$，所以隐函数$y=f(x)$在点x_0取极值，则有

$$\begin{cases}F(x_0,y_0)=0\\ F'_x(x_0,y_0)=0\end{cases}$$

其中$y_0=f(x_0)$。由此可得由方程$F(x, y)=0$所确定的隐函数$y=f(x)$的稳定点是方程组

$$\begin{cases}F(x,y)=0\\ F'_x(x,y)=0\end{cases}$$

所有解(x_0,y_0)中的x_0。

充分条件 设x_0是$y=f(x)$的稳定点，则

$$f''(x_0)=$$

$$-\frac{[F_{x^2}''+F_{xy}''f'(x)]F'_y-[F_{yx}''+F_{y^2}''f'(x)]F'_x}{F_y'^2}\Bigg|_{(x_0,y_0)}$$

$$=-\frac{F_{x^2}''(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}$$

于是

当$F_{x^2}''(x_0,y_0)$与$F'_y(x_0,y_0)$同号时取极大值$y=y_0$；

当$F_{x^2}''(x_0,y_0)$与$F'_y(x_0,y_0)$异号时取极小值$y=y_0$。

例 求由方程$xy(y-x)-2a^3=0$ $(a>0)$所确定的隐函数$y=f(x)$的极值。

解 设$F(x,y)=xy(y-x)-2a^3=0$，显然$F(x,y)$满足隐函数存在的条件。解方程组

$$\begin{cases}F(x,y)=xy(y-x)-2a^3=0\\ F'_x(x,y)=y^2-2xy=0\end{cases}$$

得一组$x=a, y=2a$。又$F_{x^2}''(x,y)=-2y$，$F_y'(x, y)=2xy-x^2$。于是$F_{x^2}''(a, 2a)=-4a<0$，$F_y'(a, 2a)=3a^2>0$。所以隐函数$y=f(x)$在点$x=a$取极小值$y=2a$。

3 条件极值的补充

我们在条件极值中，只推导了最简单的情形：二元函数在一个联系方程下取极值的必要条件。下面我们给出证明四元函数在两个联系方程下取极值的必要条件。

定理 设函数$u=f(x,y,z,t)$与$F_1(x,y,z,t)$，$F_2(x,y,z,t)$的所有偏导数在点$P(x_0, y_0, z_0, t_0)$的邻域内连续，且

$\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,t)}\right|_P \neq 0$。如果点 P 是 $u=f(x,y,z,t)$ 在条件

$$F_1(x,y,z,t)=0, F_2(x,y,z,t)=0$$

下的极值点，则在点 P 有

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial y}=0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial z}=0 \\ F_1(x,y,z,t)=0 \\ F_2(x,y,z,t)=0 \end{cases} \qquad (*)$$

其中 λ_1,λ_2 是待定系数。

证明 由已知条件，根据隐函数组存在定理，在点 (x_0,y_0) 的邻域内存在唯一的具有连续偏导数的函数组

$$z=z(x,y),\quad t=t(x,y) \qquad (1)$$

使

$$\begin{cases} F_1[x,y,z(x,y),\ t(x,y)]\equiv 0 \\ F_2[x,y,z(x,y),\ t(x,y)]\equiv 0 \end{cases} \qquad (2)$$

$$z_0=z(x_0,y_0),\quad t_0=t(x_0,y_0)$$

将隐函数组（1）代入 $u=f(x,y,z,t)$ 之中，并设

$$g(x,y)=f[x,y,z(x,y),\ t(x,y)] \qquad (3)$$

我们已知 $F_1(P)=0$，$F_2(P)$，且函数 $u=f(x,y,z,t)$ 在点 P 取极值，所以函数 $g(x,y)$ 在点 $Q(x_0,y_0)$ 取普通极值。根据二元函数取极值的必要条件，在点 $Q(x_0,y_0)$ 有

$$\frac{\partial g}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial g}{\partial y}=0$$

首先讨论 $\frac{\partial g}{\partial x}=0$。由复合函数的求导法则及（3）式有

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\ \frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t}\ \frac{\partial t}{\partial x}=0 \qquad (4)$$

在（2）式中分别对x求偏导数，在点Q有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x}+\dfrac{\partial F_1}{\partial z}\,\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial F_1}{\partial t}\,\dfrac{\partial t}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x}+\dfrac{\partial F_2}{\partial z}\,\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial F_2}{\partial t}\,\dfrac{\partial t}{\partial x}=0 \end{cases} \tag{5}$$

讨论齐次线性方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}u+\dfrac{\partial f}{\partial z}v+\dfrac{\partial f}{\partial t}w=0 \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial x}u+\dfrac{\partial F_1}{\partial z}v+\dfrac{\partial F_1}{\partial t}w=0 \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x}u+\dfrac{\partial F_2}{\partial z}v+\dfrac{\partial F_2}{\partial t}w=0 \end{cases} \tag{6}$$

由（4）、（5）式知，方程组（6）有一组非零解

$$u=1,\quad v=\frac{\partial z}{\partial x},\quad w=\frac{\partial t}{\partial x}$$

由高等代数中的线性方程组理论知，齐次线性方程组（6）的系数矩阵

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial z} & \dfrac{\partial f}{\partial t} \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z} & \dfrac{\partial F_1}{\partial t} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z} & \dfrac{\partial F_2}{\partial t} \end{pmatrix}$$

的三个行向量是线性相关的。因为已知$\left.\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,t)}\right|_Q\neq0$，所以第二个与第三个行向量是线性无关的。于是，第一个行向量可表为第二与第三个行向量的线性组合，即存在常数λ_1与λ_2，使

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda_1\dfrac{\partial F_1}{\partial x}+\lambda_2\dfrac{\partial F_2}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}+\lambda_1\dfrac{\partial F_1}{\partial z}+\lambda_2\dfrac{\partial F_2}{\partial z}=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial t}+\lambda_1\dfrac{\partial F_1}{\partial t}+\lambda_2\dfrac{\partial F_2}{\partial t}=0 \end{cases} \tag{7}$$

其次讨论$\dfrac{\partial g}{\partial y}=0$。将在（3）、(2)式中对$y$求偏导数，得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial y}=0 \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial y}+\dfrac{\partial F_1}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y}+\dfrac{\partial F_1}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial y}=0 \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y}+\dfrac{\partial F_2}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y}+\dfrac{\partial F_2}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial y}=0 \end{cases} \tag{8}$$

用前面的λ_1与λ_2分别乘（8）式中的第二与第三个方程，再与第一个方程相加，有

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial z}\right.$$

$$\left.+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)+\frac{\partial t}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial t}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial t}\right)=0 \tag{9}$$

由（7）的后两个方程，有

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial y}=0 \tag{10}$$

于是，由$\dfrac{\partial g}{\partial x}=0$与$\dfrac{\partial g}{\partial y}=0$，存在$\lambda_1$与$\lambda_2$使(7)式与(10)式同时成立，即存在$\lambda_1$，$\lambda_2$在点$P(x_0, y_0, z_0, t_0)$满足方程组(*)。

三　例题选讲

例1　设y与x由方程

$$\ln\sqrt{x^2+y^2}=\text{arc tg}\frac{y}{x}$$

联系着，求$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,0)}$

解 先判断隐函数$y=f(x)$是否存在和可微，设

$$F(x, y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\text{arc tg}\frac{y}{x}=0$$

在点(1,0)的邻域内，$F(x,y)$显然是连续的，且

$$F'_x(x,y)=\frac{2x}{2(x^2+y^2)}-\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$=\frac{y+x}{x^2+y^2}$$

$$F'_y(x,y)=\frac{2y}{2(x^2+y^2)}-\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{y-x}{x^2+y^2}$$

也是连续的．又

$$F(1,0)=\ln\sqrt{1}-\text{arc tg}0=0,\quad F'_y(1,0)=-1\neq 0$$

所以所给方程满足隐函数存在和可微的一切条件．于是

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,0)}=-\left.\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}\right|_{(1,0)}=\left.\frac{x+y}{x-y}\right|_{(1,0)}=1$$

例 2 设$z=z(x,y)$是由方程

$$\sin(x+y)+\sin(y+z)=1$$

所确定的隐函数，求$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$．

解 在方程

$$\sin(x+y)+\sin(y+z)-1=0$$

的两边分别对x,y求偏导数，注意到z是x,y的函数，有

$$\cos(x+y)\frac{\partial}{\partial x}(x+y)+\cos(y+z)\frac{\partial}{\partial x}(y+z)=0$$

即
$$\cos(x+y)+\cos(y+z)\frac{\partial z}{\partial x}=0 \qquad (1)$$

$$\cos(x+y)\frac{\partial}{\partial y}(x+y)+\cos(y+z)\frac{\partial}{\partial y}(y+z)=0$$

即
$$\cos(x+y)+\cos(y+z)\cdot\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0 \qquad (2)$$

由（1）、（2）式分别解得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\cos(x+y)}{\cos(y+z)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\cos(x+y)+\cos(y+z)}{\cos(y+z)}$$

例 3 设$z=x^2+y^2$，$x^2-xy+y^2-1=0$，求$\frac{dz}{dx}$。

解法一 设

$$F_1(x,y,z)=z-x^2-y^2=0,$$
$$F_2(x,y,z)=x^2-xy+y^2-1=0$$

则由方程组所确定的隐函数的导数公式，有

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{\partial(F_1,\ F_2)}{\partial(y,\ x)}\bigg/\frac{\partial(F_1,\ F_2)}{\partial(y,\ z)}$$

而
$$\frac{\partial(F_1,\ F_2)}{\partial(y,\ x)}=\begin{vmatrix}-2y & -2x\\ -x+2y & 2x-y\end{vmatrix}=2(y^2-x^2)$$

$$\frac{\partial(F_1,\ F_2)}{\partial(y,\ z)}=\begin{vmatrix}-2y & 1\\ -x+2y & 0\end{vmatrix}=x-2y$$

所以

$$\frac{dz}{dx}=\frac{2(x^2-y^2)}{x-2y}$$

解法二 由题意知，y是x的函数，即 $y=y(x)$，于是由方程$z=x^2+y^2$，有

$$\frac{dz}{dx}=2x+2y\frac{dy}{dx}$$

由方程$x^2-xy+y^2-1=0$可确定

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x-y}{-x+2y}=\frac{2x-y}{x-2y}$$

所以有

$$\frac{dz}{dx}=2x+2y\frac{2x-y}{x-2y}=2\left(x+\frac{2xy-y^2}{x-2y}\right)$$

$$=\frac{2(x^2-2xy+2xy-y^2)}{x-2y}=\frac{2(x^2-y^2)}{x-2y}$$

例 4 设方程 $x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$，$z=z(u,v)$ 可确定隐函数$z=z(x,y)$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$。

解 由前两个方程可确定 u，v 是 x，y 的隐函数，即

$$\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases}$$

把它代入第三个方程，有

$$z=z[u(x,y),v(x,y)]$$

由复合函数的微分法有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (1)$$

对 $x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$，应用隐函数的微分法，对x求偏导数，有

$$\begin{cases}1=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\\ 0=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases} \qquad (2)$$

由方程组（2）解出

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\frac{\partial y}{\partial v}}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}$$

$$\left(\text{设}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0\right)$$

把它们代入（1）式，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v}-\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial u}}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}=-\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\Big/\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

同理

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\Big/\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

例 5 设函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $xy+yz+zx-1=0$ 所确定，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$。

解 对方程分别对x，y求偏导数，有

$$y+y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial x}+z=0,\quad x+z+y\frac{\partial z}{\partial y}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

解得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y+z}{x+y},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x+z}{x+y}$$

于是
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{(x+y)\dfrac{\partial z}{\partial x}-(y+z)}{(x+y)^2}$$

把$\frac{\partial z}{\partial x}$代入上式，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{-(y+z)-(y+z)}{(x+y)^2}=\frac{2(y+z)}{(x+y)^2}$$

根据 x，y 的对称性可知

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2(x+z)}{(x+y)^2}$$

例 6 求由方程 $2x^4-8xy^3+y^4+5=0$ 所确定的隐函数

$y=f(x)$ 的极值。

解 设

$$F(x, y) = 2x^4 - 8xy^3 + y^4 + 5 = 0$$

分别对 x, y 求偏导数

$$F'_x = 8x^3 - 8y^3, \quad F'_y = -24xy^2 + 4y^3$$

解方程组

$$\begin{cases} F(x, y) = 2x^4 - 8xy^3 + y^4 + 5 = 0 & (1) \\ F'_x(x, y) = 8x^3 - 8y^3 = 0 & (2) \end{cases}$$

由(2)式得 $x^3=y^3$，即 $x=y$。把它代入（1）式，得 $x^4=1$。即 $x=\pm 1$。所以 $y=\pm 1$。于是取极值的必要条件是 $(x, y) = (1, 1)$ 和 $(x, y) = (-1, -1)$。

$$F''_{x^2}(x, y) = 24x^2$$

当 $(x, y) = (1, 1)$ 时，有

$$F''_{x^2}(1, 1) = 24 > 0, \quad F'_y(1, 1) = -20 < 0$$

故隐函数 $y=f(x)$ 在点1取极小值 $y=f(1)=1$。

当 $(x, y) = (-1, -1)$ 时，有

$$F''_{x^2}(-1, -1) = 24 > 0, \quad F'_y(-1, -1) = 20 > 0$$

故 $y=f(x)$ 在点 -1 取极大值 $y=f(-1)=-1$。

例 7 求在空间曲线

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2 \\ x^2 + y^2 = 2ax \end{cases}$$

上点 $(a, a, \sqrt{2}a)$ 的切线方程和法平面方程。

解 设

$$F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4a^2$$

$$F_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2ax$$

则在点 $(a, a, \sqrt{2}\,a)$ 有

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 2a, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2a, \frac{\partial F_1}{\partial z} = 2\sqrt{2}a, \frac{\partial F_2}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y}=2a,\quad \frac{\partial F_2}{\partial z}=0$$

于是

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix}=-4\sqrt{2}a^2,\quad \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z} & \frac{\partial F_1}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} & \frac{\partial F_2}{\partial x} \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix}=4a^2$$

所以，切线方程为

$$\frac{x-a}{-4\sqrt{2}a^2}=\frac{y-a}{0}=\frac{z-\sqrt{2}a}{4a^2}$$

即 $\quad x+\sqrt{2}z=3a,\ y=a$

法平面方程为

$$-4\sqrt{2}a^2(x-a)+0\times(y-a)$$
$$+4a^2(z-\sqrt{2}a)=0$$

即 $\quad \sqrt{2}x-z=0$

例 8 求在椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

上任意一点$M(x_0,y_0,z_0)$的切平面方程。

解 设

$$F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

先求曲面在点M的法线的方向数

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_M=\frac{2x_0}{a^2},\quad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_M=\frac{2y_0}{b^2},\quad \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_M=\frac{2z_0}{c^2}$$

于是切平面方程为

$$\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{2z_0}{c^2}(z-z_0)$$

$$=\left(\frac{2x_0x}{a^2}+\frac{2y_0y}{b^2}+\frac{2z_0z}{c^2}\right)-\left(\frac{2x_0^2}{a^2}+\frac{2y_0^2}{b^2}\right.$$

$$\left.+\frac{2z_0^2}{c^2}\right)=0$$

因点M (x_0,y_0,z_0) 在椭球面上，故有

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1$$

所以在点M的切平面方程为

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}=1$$

例 9 证明，在曲面$z=x^2+y^2$上任意点的法线都与z轴相交。

证明 设$F(x,y,z)=x^2+y^2-z=0$。在曲面上任取一点M (x_0,y_0,z_0)，在点M的法线的方向数为

$$F'_x|_M=2x_0,\quad F'_y|_M=2y_0,\quad F'_z|_M=-1$$

于是点M的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{2x_0}=\frac{y-y_0}{2y_0}=\frac{z-z_0}{-1} \qquad (1)$$

z轴的方程为

$$\frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z-z'}{1}$$

由曲面的法线方程（1）可知，除原点外在曲面上任何点的法线不与z轴平行，而原点的法线就是z轴。所以，只须证明法线与z轴共平面，则法线与z轴必相交。由于

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0-z' \\ 2x_0 & 2y_0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2x_0y_0-2x_0y_0=0$$

于是，根据解析几何的理论知，法线（1）与z轴共平面。而原点的法线是z轴。所以曲面上任何点的法线与z轴相交。

例10　设有n个正数x_1，x_2，$\cdots$，x_n，当其和l为一定时，求其乘积的最大值。

解　设$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则根据题意知，本题就是求函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在条件$x_1+x_2+\cdots+x_n=l$下的最大值。

由拉格朗日乘数法，作辅助函数

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda)=x_1\cdot x_2\cdots x_n+\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n-l)$$

解方程组

$$\begin{cases} F'_{x_1}=x_2\cdot x_3\cdots x_n+\lambda=0 \\ F'_{x_2}=x_1\cdot x_3\cdots x_n+\lambda=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F'_{x_n}=x_1\cdot x_2\cdots x_{n-1}+\lambda=0 \\ F'_\lambda=x_1+x_2\cdots+x_n=0 \end{cases} \quad (1)$$

由方程组前n个方程中解得

$$x_1=x_2=\cdots=x_n$$

把它代入方程组的最后一个方程，得

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{l}{n}$$

由问题的具体意义看必有最大值，而方程组（1）只有一个解，所以最大值为

$$f\left(\frac{l}{n},\ \frac{l}{n},\ \cdots,\ \frac{l}{n}\right)=\left(\frac{l}{n}\right)^n$$

由此我们可知，n个正数的几何平均值小于等于算术平均值，即

$$\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

例11　求椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

被通过原点 (0,0,0)的平面 $lx+my+nz=0$ 所截的椭圆的面积。

解　要求椭圆的面积，只须求椭圆的长、短轴之长。设点 $P(x,y,z)$ 为椭圆面的任一点，问题就化为求函数 $r^2=x^2+y^2+z^2$在条件

$$\begin{cases} lx+my+nz=0 \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \end{cases}$$

下的最大值和最小值问题。

根据拉格朗日乘数法，作辅助函数

$$F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=x^2+y^2+z^2+\lambda_1(lx+my+nz)+\lambda_2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right),$$

解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}=2x+\lambda_1 l+\dfrac{2\lambda_2}{a^2}x=0 & (1) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2y+\lambda_1 m+\dfrac{2\lambda_2}{b^2}y=0 & (2) \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=2z+\lambda_1 n+\dfrac{2\lambda_2}{c^2}z=0 & (3) \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1}=lx+my+nz=0 & (4) \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_2}=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 & (5) \end{cases}$$

将（1）、（2）、（3）式分别乘于x，y，z相加，得

$$2(x^2+y^2+z^2)+\lambda_1(lx+my+nz)+2\lambda_2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right.$$

$$+\frac{z^2}{c^2}\Big)=0$$

于是，由条件有

$$2r^2+2\lambda_2=0\text{，即 }\lambda_2=-r^2$$

把它代入（1）、（2）、（3）式中，解得

$$x=-\frac{\lambda_1 a^2 l}{2(a^2-r^2)},\quad y=-\frac{\lambda_1 b^2 m}{2(b^2-r^2)},\quad z=-\frac{\lambda_1 c^2 n}{2(c^2-r^2)}$$

于是，有

$$lx+my+nz=-\frac{\lambda_1 a^2 l^2}{2(a^2-r^2)}-\frac{\lambda_1 b^2 m^2}{2(b^2-r^2)}-\frac{\lambda_1 c^2 n^2}{2(c^2-r^2)}$$

$$=0$$

从而得

$$\frac{a^2l^2}{a^2-r^2}+\frac{b^2m^2}{b^2-r^2}+\frac{c^2n^2}{c^2-r^2}=0$$

通分整理得r^2的二次三项式

$$(a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2)r^4-[a^2l^2(b^2+c^2)+b^2m^2(a^2+c^2)$$
$$+c^2n^2(a^2+b^2)]r^2+a^2b^2c^2(l^2+m^2+n^2)=0$$

根据本题的实际意义看，r^2必存在最大值与最小值，所以二次三项式必有两个不同的实根，一个是最大值，一个是最小值。设这个两个实根为r_1^2和r_2^2，则由二次三项式根与系数的关系，有

$$r_1^2\cdot r_2^2=\frac{a^2b^2c^2(l^2+m^2+n^2)}{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}$$

于是，椭圆的长、短半轴之长的积为

$$r_1\cdot r_2=\frac{abc\sqrt{l^2+m^2+n^2}}{\sqrt{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}}$$

故得椭圆的面积为

$$S=\frac{abc\pi\sqrt{l^2+m^2+n^2}}{\sqrt{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}}$$

习　题

§17.2

1　验证下列方程在指定点的邻域内存在以 x 为自变量的隐函数。

（1）$y^3+y-x^2=0$，在点(0,0)。

（2）$xy+2\ln x+3\ln y-1=0$，在点(1,1)。

2　求由下列方程所确定的隐函数 $y=f(x)$ 的导数。

（1）设 $y=2x\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}$ 求 y'。

（2）设 $\sin x+2\cos y-\dfrac{1}{2}=0$，求 y'，

（3）设 $x^y=y^x$，求 y' $(x\neq y)$。

(4) 设 $x^2+xy+y^2=3$，求 y''。

3　验证下列方程在指定点的邻域内存在以 x，y 为自变量的隐函数。

（1）$e^z-z^2-x^2-y^2=0$，在点(1,0,0)。

（2）$x+y-z-\cos(xyz)=0$，在点(0,0,−1)。

4　求由下列方程所确定的隐函数的偏导数。

(1)　设 $xy+\sin z+y=2z$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

(2)　设 $z=\sqrt{x^2-y^2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

(3)　设 $z^x=y^z$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

5　证明，设 $z=z(x,y)$ 是由方程

$$y-nz=f(x-mz)$$

所确定的隐函数，则它满足方程

$$m\frac{\partial z}{\partial x}+n\frac{\partial z}{\partial y}=1$$

6　证明，设 $F(x,y,z)=0$，且任意一个变量都是另外两个变量的隐函数，即 $z=z(x,y)$，$y=y(x,z)$，$x=x(y,z)$，则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}=-1$$

§17.3

7　设$xu=x^2+y^2$，$yv=x^2+y^2$，求雅可比行列式$J=\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$。

8　计算极坐标变换 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$的雅可比行列式

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}.$$

9　计算柱面坐标变换 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$z=z$ 的雅可比行列式

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}.$$

10　验证下列方程组在指定点的邻域内存隐函数组。

（1）$\begin{cases}x+y+z=0\\x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$　在点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{-1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$。

（2）$\begin{cases}x+y=u+v\\\dfrac{x}{y}=\dfrac{\sin u}{\sin v}\end{cases}$，在点$\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$。

§17·4

11　求由下列方程组所确定的隐函数组的导数或偏导数。

（1）$\begin{cases}y=f(x,y,z)\\z=g(x,y,z),\end{cases}$　求$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{dz}{dx}$。

（2）$\begin{cases}x=F_1(x,y,z)\\y=F_2(x,y,z),\end{cases}$　求$\dfrac{dx}{dy}$，$\dfrac{dy}{dz}$。

（3）$\begin{cases}x=u+v\\y=u^2+v^2,\end{cases}$　求$\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}$。

（4）$\begin{cases}x=e^u+u\sin v\\y=e^u-u\cos v,\end{cases}$　求$\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}$。

12　证明，如果$x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$，$z=z(u,v)$，且$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$，

则存在隐函数组 $z=f(x,y)$，$u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$。

13 证明，设$y=xf(z)+\varphi(z)$，可确定隐函数$z=z(x,y)$，则有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2=0$$

其中$f(z)$和$\varphi(z)$是可微分函数。

14 设$F(x,y)=f[x+g(y)]$，其中$f(u)$与$g(y)$都是可微函数，求$F(x,y)$的二阶偏导数。

§ 17.6

15 求曲线$x^2+z^2=10$，$y^2+z^2=10$在点 $t=\frac{\pi}{2}$ 处的切线方程与法平面方程。

16 在曲线$x=t$，$y=t^2$，$z=t^2$ 上求出一点，使该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$。

17 求曲线$x^2+y^2=10$，$y^2+z^2=10$在点$(1,1,3)$的切线方程与法平面方程。

18 求曲面$x=u\cos v$，$y=u\sin v$，$z=av$在(u_0,v_0)的切平面方程与法线方程。

19 证明，二曲面$3x^2+2y^2-2z-1=0$，$x^2+y^2+z^2-4y-2z+2=0$在点$(1,1,2)$直交。

20 证明，曲面$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ $(a>0)$上，任何点的切平面在三个坐标轴上的截距之和等于a。

21 证明，曲面$F\left(\frac{x-a}{z-c},\ \frac{y-b}{z-c}\right)=0$上任何一点的切平面都通过一定点。

§ 17、7

22 求函数$f(x,y,z)=xyz$在条件

$$x^2+y^2+z^2-1=0$$

下的最大值，其中$x,y,z\geqslant 0$。

23 求在两个曲面$x^2-xy+y^2-z^2-1=0$与$x^2+y^2-1=0$的交线上到原点的最近点。

24 求抛物线$y=x^2$与直线$x-y-z=0$之间的距离。

25　在三角形 ABC 内求一点，使之这点到三边的距离的平方之和最小。

26　证明不等式

$$\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^n$$

其中 $n\geqslant 1$，$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$。

第十八章　重积分

在一元函数中，积分域是数值线上的区间，而在多元函数中，由于自变量的个数和积分域的类型不同，就有各种不同类型的积分．本章讨论二元函数在平面有界区域上的积分，即二重积分，和三元函数在三维空间有界区域上的积分，即三重积分。

§18.1　二重积分的概念和性质

一　曲顶柱体的体积

在三维空间中给定一个立体，它的上面是由非负连续函数 $z=f(x, y)$ $((x, y)\in D)$ 所确定的曲面，底面是 xy 平面上由闭曲线 C 围成的有界闭区域 D，其侧面是由通过闭曲线 C 且平行于 z 轴的母线所构成的柱面．这种立体称为**曲顶柱体**（如图18.1）．

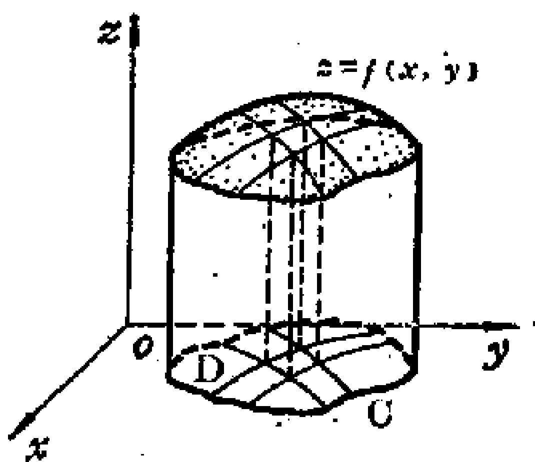


图18.1

为了计算曲顶柱体的体积，用 xy 面上一组平面曲线网将区域 D 分成 n 个小区域．

$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \cdots,\ \sigma_n$$

（如图18.1），记此分法为 T。分法 T 将曲顶柱体分成 n 个以 σ_i $(i=1,\ 2,\ \cdots, n)$ 为底的小曲顶柱体。用 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小

区域 σ_i 的面积，用 σ_i 上任意一点(ξ_i, η_i)的函数值 $f(\xi_i, \eta_i)$为高，近似代替 σ_i 上每一点(x, y)的高 $f(x, y)$。于是，以 σ_i 为底的小曲顶柱体的体积 ΔV_i 近似等于以 $\Delta\sigma_i$ 为底面积，以 $f(\xi_i, \eta_i)$为高的小平顶柱体体积 $f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$，即

$$\Delta V_i \approx f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

从而，曲顶柱体的体积

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

当分割曲线无限加密，即当分法T的 n 个小区域 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_n$中的最大直径 $d(T)$①无限变小时，也就是当 $d(T)\to 0$时，上述和式的极限就定义为曲顶柱体的体积V，即

$$V = \lim_{d(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

二　二重积分的概念与可积性

在计算曲顶柱体的体积——和式极限中，抽掉它的几何意义，就得到二重积分的定义。

设D是 xy 面上的有界闭区域，函数 $f(x, y)$是定义在区域D上的函数。对区域D的任意分法T，将区域D分成 n 个小区域

$$\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$$

在每个小区域 σ_i 上任取一点 (ξ_i, η_i)，作和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i \quad \text{(称为积分和)}$$

其中 $\Delta\sigma_i$ 是第 i 块小区域 σ_i 的面积。

---

① $d(T)=\max\{d_1(T), d_2(T), \cdots, d_n(T)\}$, $d_i(T)$
$=\sup\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ $(x_1, y_1), (x_2, y_2)\in\sigma_i$

定义 如果不论分法T如何，也不论点$(\xi_i, \eta_i)\in\sigma_i$的取法如何，只要$n$个小区域中的最大的直径$d(T)\to 0$，和数$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$存在极限，设极限是$I$，即

$$\lim_{d(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i = I$$

则称函数$f(x, y)$在区域D上可积，并称I是函数$f(x, y)$在区域D上的二重积分，记作

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = \lim_{d(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i \qquad (18.1)$$

其中$f(x, y)$称为二重积分的被积函数，x、y称为积分变量，D称为积分区域，$d\sigma$称为面积微元。

当二重积分存在时，我们可采用特殊的分法T，例如用分别平行x轴和y轴的两组直线去分割D，则$\Delta\sigma_i = \Delta x_i\Delta y_i$（如图18.2）。从而，面积微元$d\sigma$可表为$d\sigma = dxdy$。于是，二重积分可表为$\iint_D f(x, y)dxdy$，即

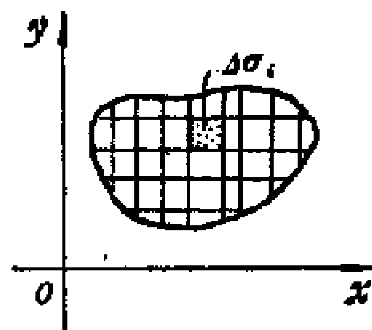


图18.2

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = \iint_D f(x, y)\ dxdy$$

这样，当$f(x, y)\geqslant 0$时，二重积分

$$V = \iint_D f(x, y)dxdy$$

就表示以D为底，以曲面$z = f(x, y)$为顶面的曲顶柱体的体积。当$f(x, y)\equiv 1$时，二重积分

$$\iint_D d\sigma$$

就是区域D的面积。

根据二重积分的定义，不难证明，函数 $f(x, y)$在有界闭区域D上可积的必要条件是 $f(x, y)$在D上有界. 为了得到函数 $f(x, y)$在D上可积的充要条件，先引入大和与小和的概念.

设函数 $f(x, y)$在区域D上有界. 用分法T将区域D分成 n 个小区域:

$$\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$$

设 M_i 与 m_i 分别是 $f(x, y)$在第 i 个小区域 σ_i 上的上、下确界，则和数

$$S(T)=\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\sigma_i \text{ 与 } s(T)=\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\sigma_i$$

分别称为 $f(x, y)$在区域D上关于分法T的大和与小和. 二元函数的大和与小和具有同一元函数的大和与小和完全类似的性质. 这里不再重述.

定义 $\omega_i=M_i-m_i$称为函数 $f(x, y)$在第 i 个小区域上的振幅.

下面给出有关函数可积性的定理.

定理18.1 函数 $f(x, y)$在有界闭区域D上可积的充要条件是

$$\lim_{d(T)\to 0}[S(T)-s(T)]=0 \text{ 或 } \lim_{d(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i \Delta\sigma_i=0$$

证明从略.

定理18.2 如果函数 $f(x, y)$在有界闭区域D上连续，则函数 $f(x, y)$在D上可积.

证明 因为函数 $f(x, y)$在有界闭区域D上连续，所以它必在D上一致连续. 于是，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得在D上任意一直径小于 δ 的部分上函数的振幅小于 ε. 现将D分成 n 个小区域 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$，使得它们的直径都小于 δ，则所有振幅 $\omega_i<\varepsilon$，从而

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta\sigma_i < \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i = \varepsilon \Delta D$$

其中 ΔD 表示有界闭区域D的面积．于是，根据定理 18.1，$f(x, y)$在D上可积． □

证明18.3 如果函数 $f(x, y)$的全体不连续点都落在有界闭区域D上有限条光滑或分段光滑曲线上，则函数 $f(x, y)$在D上可积．

证明从略。

三 二重积分的性质

二重积分具有与定积分类似的性质，现列举如下：

1．如果函数 $f(x, y)$，$g(x, y)$ 在有界闭区域D 上 皆 可积，则它们的代数和也在D上可积，且

$$\iint_D [f(x, y) \pm g(x, y)]\, dxdy = \iint_D f(x, y)dxdy \pm \iint_D g(x, y)dxdy$$

2．如果函数 $f(x, y)$在有界闭区域D上可积，k 为常数，则 $kf(x, y)$在D上也可积，且

$$\iint_D kf(x, y)dxdy = k\iint_D f(x, y)dxdy$$

3．如果函数 $f(x, y)$在有界闭区域 D_1 和 D_2 上可积，且 D_1 和 D_2 无公共内点，则函数$f(x, y)$在 D_1+D_2上也可积，且

$$\iint_{D_1+D_2} f(x, y)dxdy = \iint_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint_{D_2} f(x, y)dxdy$$

4．如果函数 $f(x, y)$ 与 $g(x, y)$ 皆在有界闭区域D上可积，且 $f(x, y) \leqslant g(x, y)$，则

$$\iint_D f(x, y)dxdy \leqslant \iint_D g(x, y)dxdy$$

5.如果函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域D上可积，则函数$|f(x, y)|$在D上也可积，且

$$\left|\iint_D f(x, y)dxdy\right| \leqslant \iint_D |f(x,y)|dxdy$$

6.如果函数 $f(x, y)$在有界闭区域D上可积，且在D上有$m \leqslant f(x, y) \leqslant M$，则

$$m\Delta D \leqslant \iint_D f(x, y)dxdy \leqslant M\Delta D$$

其中 ΔD 表示区域D的面积。

7.如果函数 $f(x, y)$在连通的闭区域D上连续，则在D上至少存在一点 (ξ, η)，使得

$$\iint_D f(x, y)dxdy = f(\xi, \eta)\Delta D$$

证明 已知函数 $f(x, y)$在连通域D上连续，根据连续函数的最大值、最小值定理知，函数 $f(x, y)$在D上必能取到最大值M和最小值 m，即在D中至少存在两点 (x_1, y_1) 与 (x_2, y_2)，使得

$$f(x_1, y_1) = m \leqslant f(x, y) \leqslant M = f(x_2, y_2), \quad (x, y) \in D$$

根据性质6，有

$$m \leqslant \frac{1}{\Delta D} \iint_D f(x, y)\, dxdy \leqslant M$$

再根据连续函数的介值性定理，在D上至少存在一点(ξ, η)，使得

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{\Delta D}\iint_D f(x, y)dxdy$$

即
$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = f(\xi, \eta)\, \Delta D \qquad \square$$

§18.2 二重积分的累次积分法

从二重积分的定义看出，二重积分的定义本身就给出了计

算二重积分的方法，即通过分割、代替、作和、取极限四步就可以计算出二重积分。但是，一般说来，这种积分和是相当复杂的，因此，计算积分和的极限也是很困难的。为了解决各种理论与实际问题，我们必须找出一个既简单而又实用的计算方法。这就是把二重积分化为两次定积分来计算的方法，即所谓的累次积分法。首先讨论定义在矩形区域 $R=[a, b; c, d]$上的二重积分的计算问题，然后再把它推广到较为一般的区域上。

一、矩形域上的计算法

定理18.4 如果函数 $f(x, y)$在矩形域 $R[a, b; c, d]$上可积，且对任意 $x\in[a, b]$（在积分时，X 暂时固定），定积分 $I(x)=\int_c^d f(x, y)dy$ 存在，则累次积分

$$\int_a^b I(x)dx=\int_a^b\left[\int_c^d f(x, y)dy\right]dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x, y)\ dy$$

也存在，且有

$$\iint_R f(x, y)\ dxdy=\int_a^b dx\int_c^d f(x, y)dy \qquad (18.2)$$

证明 分别在$[a, b]$及$[c, d]$上插入分点：

$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_i<x_{i+1}<\cdots<x_n=b$

$c=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_k<y_{k+1}<\cdots<y_m=d$

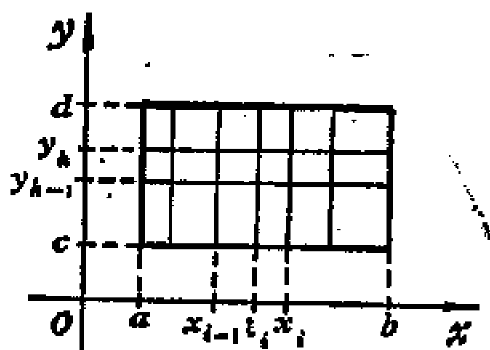


图18.3

并分别过 x_i 与 y_k 作两组直线 $x=x_i$ $(i=0, 1, 2, \cdots, n)$及 $y=y_k$ $(k=0, 1, 2, \cdots, m)$。于是，将矩形分成 mn 个小矩形（如图18.3），记作

$R_{i,k}=[x_i, x_{i+1}; y_k, y_{k+1}]$ $(i=0, 1, 2, \cdots, n-1;$ $k=0, 1, 2, \cdots, m-1)$

设 $m_{i,k}=\inf\limits_{R_{i,k}} f(x,y)$，$M_{i,k}=\sup\limits_{R_{i,k}} f(x,y)$，则对任意一点 $(x,y)\in R_{i,k}$，有

$$m_{i,k}\leqslant f(x,y)\leqslant M_{i,k}$$

特别地，对任意固定的 $\xi_i\in[x_i,x_{i+1}]$ 和任意的 $y\in[y_k,y_{k+1}]$，有

$$m_{i,k}\leqslant f(\xi_i,y)\leqslant M_{i,k}$$

由于 $I(\xi_i)=\int_c^d f(\xi_i,y)dy$ $(a\leqslant\xi_i\leqslant b)$存在，于是，$f(\xi,y)$在$[c,d]$的部分区间$[y_k,y_{k+1}]$上可积．将上式各项在区间$[y_k,y_{k+1}]$上积分，得

$$m_{i,k}\Delta y_k\leqslant\int_{y_k}^{y_{k+1}}f(\xi_i,y)\,dy\leqslant M_{i,k}\Delta y_k$$

其中 $\Delta y_k=y_{k+1}-y_k$．再将上述不等式从 $k=0$到 $k=m-1$ 逐项相加，得

$$\sum_{k=0}^{m-1}m_{i,k}\Delta y_k\leqslant\sum_{k=0}^{m-1}\int_{y_k}^{y_{k+1}}f(\xi_i,y)dy\leqslant\sum_{k=0}^{m-1}M_{i,k}\Delta y_k$$

因为$\sum\limits_{k=0}^{m-1}\int_{y_k}^{y_{k+1}}f(\xi_i,y)dy=\int_c^d f(\xi_i,y)dy=I(\xi_i)$，所以，有

$$\sum_{k=0}^{m-1}m_{i,k}\Delta y_k\leqslant I(\xi_i)\leqslant\sum_{k=0}^{m-1}M_{i,k}\Delta y_k$$

用 Δx_i 乘上式各项，并从 $i=0$到 $i=n-1$逐项相加，得

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1}m_{i,k}\Delta y_k\Delta x_i\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}I(\xi_i)\Delta x_i\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1}M_{i,k}\Delta y_k\Delta x_i$$

已知$f(x,y)$在矩形R上可积，根据定理18.1，当$d(T)$①$\to 0$时，

① $d(T)$ 是 mn 个小矩形 R_{ik} $(i=0,1,\cdots,n-1;\ k=0,1,2,\cdots,m-1)$的对角线的最大值。

$$s(T)=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1} m_{i,k}\Delta y_k\Delta x_i \text{ 与 } S(T)=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1} M_{i,k}\Delta y_k\Delta x_i$$

有共同的极限$\iint\limits_R f(x, y)dxdy$。再根据两边夹法则，有

$$\lim_{d(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} I(\xi_i)\Delta x_i=\iint\limits_R f(x, y)dxdy \qquad (1)$$

根据定积分的定义知，$I(x)=\int_c^d f(x, y)dy \qquad (a\leqslant x\leqslant b)$

在闭区间$[a, b]$上可积，且

$$\lim_{d(T)\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b I(x)dx=\int_a^b\left[\int_c^d f(x, y)dy\right]dx$$

$$(2)$$

比较（1）式与（2）式得

$$\iint\limits_R f(x, y)dxdy=\int_a^b dx\int_c^d f(x, y)dy \qquad \square$$

定理18.5 如果函数$f(x, y)$在矩形域 $R=[a, b; c, d]$上可积，且对任意 $y\in[c, d]$，定积分 $I(y)=\int_a^b f(x, y)dx$ 存在，则积分

$$\int_c^d dy\int_a^b f(x, y)dx$$

也存在，且有

$$\iint\limits_R f(x, y)dxdy=\int_c^d dy\int_a^b f(x, y)dx \qquad (18.3)$$

此定理的证明与定理18.4类似，证明从略。

特别地，当函数$f(x, y)$在矩形域R上连续时，则有

$$\iint\limits_R f(x, y)dxdy=\int_a^b dx\int_c^d f(x, y)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x, y)dx$$

例 1 求函数$f(x, y)=1-x-y$在矩形域 $R=[-1, 1; -2, 2]$上的二重积分。

解 显然 $f(x, y)=1-x-y$ 在矩形 $R[-1, 1; -2, 2]$ 上连续，满足定理18.4（也满足定理18.5）条件，有

$$\iint\limits_R f(x, y)dxdy=\iint\limits_R (1-x-y)dxdy$$

$$=\int_{-1}^{1}\left[\int_{-2}^{2}(1-x-y)\,dy\right]dx=\int_{-1}^{1}\left(y-xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{2}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(4-4x)dx=(4x-2x^2)\Big|_{-1}^{1}=8$$

例 2 计算二重积分 $\iint\limits_R \frac{dxdy}{(x+y)^2}$，其中 $R=[3, 4; 1, 2]$

解 $$\iint\limits_R \frac{dxdy}{(x+y)^2}=\int_1^2 dy\int_3^4 \frac{dx}{(x+y)^2}$$

$$=\int_1^2 -\frac{1}{x+y}\Big|_3^4 dy=\int_1^2\left(\frac{1}{y+3}-\frac{1}{y+4}\right)dy$$

$$=\ln(y+3)\Big|_1^2-\ln(y+4)\Big|_1^2=\ln\frac{25}{24}$$

二 任意域上的计算法

若积分区域D是由两条连续曲线 $y=\varphi_1(x)$，$y=\varphi_2(x)$($a\leqslant x\leqslant b$)及直线 $x=a$，$x=b$ 所围成，其中 $\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x)$，则称此区域$D$为 y-型区域（如图18.4(a)）。

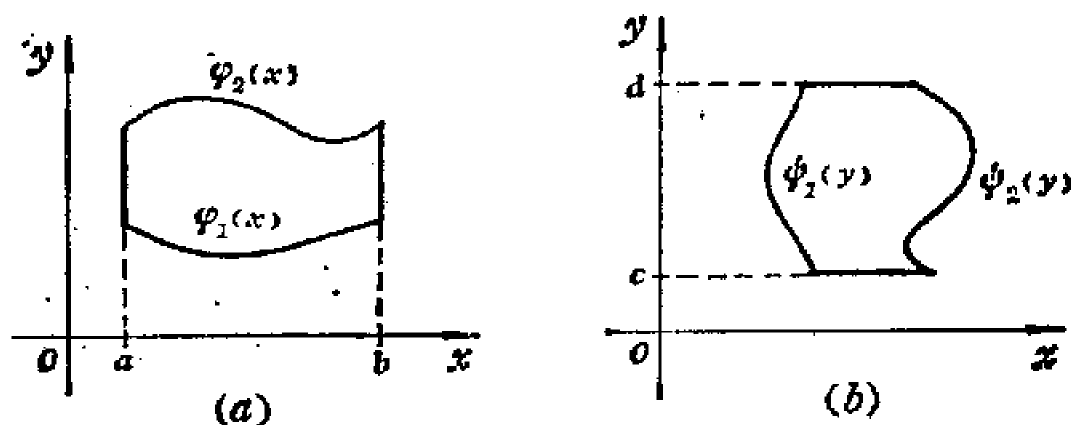


图18.4

若积分区域D是由两条连续曲线 $x=\psi_1(y)$, $x=\psi_2(y)$($c\leqslant y\leqslant d$)及直线 $y=c$, $y=d$ 所围成，其中 $\psi_1(y)\leqslant\psi_2(y)$，则称此区域$D$为 x-型区域（如图18.4(b)）。

从图18.4不难看出，若区域D为y-型区域，则垂直于x轴的任意直线 $x=x_0$ ($a<x_0<b$)至多与区域D的边界交两点。若D为x一型区域，则垂直于 y 轴的任意直线 $y=y_0$ ($c<y_0<d$)至多与区域D的边界交两点。

若积分域不是矩形，而是 y—型区域或 x—型区域，这时二重积分仍可化为累次积分，即两次定积分来计算。我们有如下两个定理：

定理18.6 如果函数 $f(x, y)$在 y—型区域D上连续，且上、下边界曲线 $\varphi_2(x)$与 $\varphi_1(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，则

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy \qquad (18.4)$$

即此时可把二重积分化为先对 y 后对 x 的两次定积分。

证明 因为$\varphi_1(x)$与$\varphi_2(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，所以 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$ 皆在$[a, b]$上有界，从而必存在矩形 $R=[a, b; c, d]$，使得$D\subset R$。现于 R 上定义一个新函数（如图18.5）

$$F(x, y)=\begin{cases} f(x, y), & (x, y)\in D \\ 0, & (x, y)\in R-D \end{cases}$$

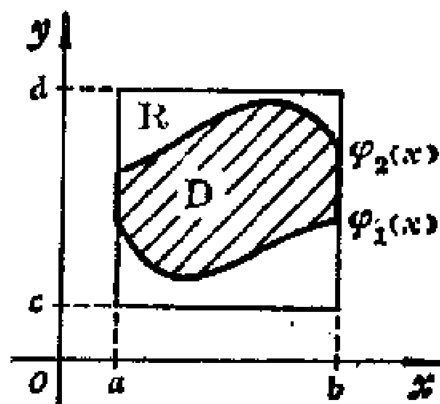


图18.5

由函数 $F(x, y)$ 的定义和函数 $f(x, y)$在D上连续知，$F(x, y)$ 的所有不连续点（可能没有）全部在两条边界曲线 $\varphi_1(x)$ 及 $\varphi_2(x)$ 上，因此，根据定理18.3，函数 $F(x, y)$ 在R上可积。

这样，一方面，由积分关于积分区域的可加性，有

$$\iint\limits_R F(x, y)dxdy=\iint\limits_D F(x, y)dxdy+\iint\limits_{R-D} F(x, y)dxdy$$

$$=\iint_D f(x,\ y)dxdy+\iint_D 0dxdy$$

$$=\iint_D f(x,\ y)dxdy \qquad (3)$$

另一方面，对任意固定的 $x\in[a,\ b]$，积分

$$\int_c^d F(x,\ y)dy=\int_c^{\varphi_1(x)} F(x,\ y)dy+\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} F(x,\ y)dy$$

$$+\int_{\varphi_2(x)}^{d} F(x,\ y)dy=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} F(x,\ y)dy=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

存在，根据定理18.4，有

$$\iint_R F(x,\ y)dxdy=\int_a^b dx\int_c^d F(x,\ y)dy$$

$$=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)dy \qquad (4)$$

比较（3）式与（4）式，得

$$\iint_D f(x,\ y)dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)dy \qquad \square$$

定理18.7 如果函数 $f(x,\ y)$在 x—型区域D上连续（如图 18.4(b)），且左、右边界曲线 $\psi_1(y)$ 与 $\psi_2(y)$ 在闭区间$[c,\ d]$上连续，则

$$\iint_D f(x,\ y)dxdy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,\ y)dx \qquad (18.5)$$

即此时可把二重积分化为先对 x 后对 y 的两次定积分。

证明与定理18.6类似，从略。

若区域D是由一条封闭曲线所围成，且平行于坐标轴的任意一条直线与D的边界曲线至多交两点（如图18.6），则当$f(x,\ y)$ 在区域D上连续时，有

$$\iint_D f(x,\ y)dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)dy$$

$$=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,\ y)dx$$

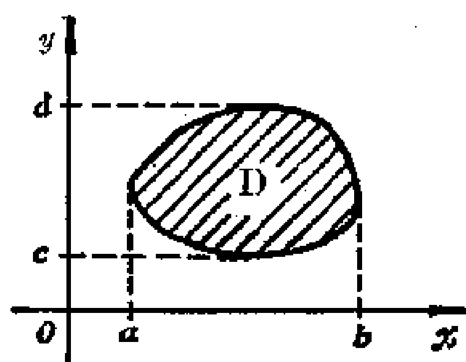


图18.6

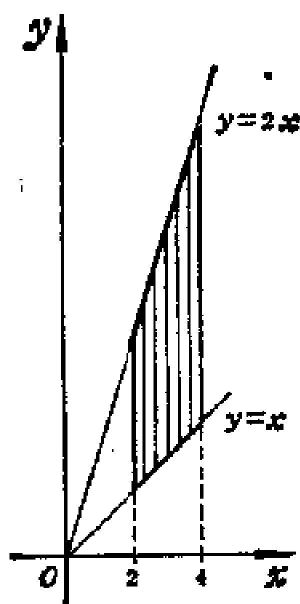


图18.7

例 3 计算二重积分 $I=\iint\limits_{D}\frac{y}{x}\,dxdy$，其中$D$是由$y=x$，$y=2x$，$x=2$，$x=4$ 所围成的区域（如图18.7）.

分析 计算二重积分的问题，首先要观察积分区域D是什么型的区域，然后再按定理18.4或定理18.5把它化为两次定积分. 本题的区域D是由上、下两条直线$y=2x$ 和 $y=x$ 以及左右两条平行 y 轴的直线 $x=2$ 和 $x=4$ 所围成，因此是 y—型区域. 故应化为先对 y 后对 x 的累次积分.

解 此区域D是 y—型区域，根据定理18.6可把此二重积分化为先对 y 后对 x 的两次定积分，即

$$I=\int_2^4 dx\int_x^{2x}\frac{y}{x}dy=\int_2^4\left[\frac{y^2}{2x}\right]_x^{2x}dx=\int_2^4\left(2x-\frac{x}{2}\right)dx$$

$$=\int_2^4\frac{3}{2}\,xdx=9$$

例 4 计算二重积分 $I=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)dxdy$，其中$D$是由 $y=x$，$y=x+1$，$y=1$ $y=3$ 四条直线所围成的平行四边形区域（如图18.8）.

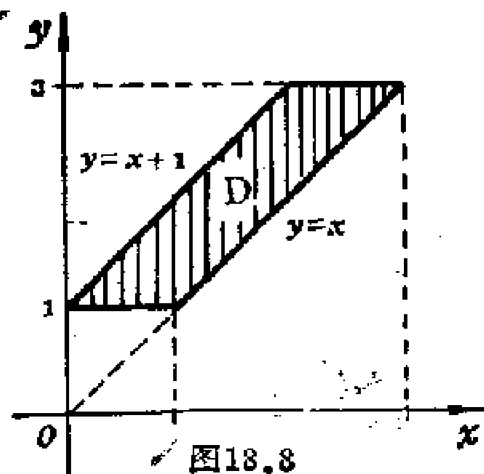


图18.8

解 此区域是 x—型区域，根据定理18.7，可把它化为先对 x 后对 y 的两次定积分去计算．即

$$I=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)dxdy=\int_1^3dy\int_{y-1}^{y}(x^2+y^2)dx$$

$$=\int_1^3\left[\frac{x^3}{3}+y^2x\right]\Bigg|_{y-1}^{y}dy=\int_1^3\left(2y^2-y+\frac{1}{3}\right)dy=14$$

例 5 计算二重积分 $I=\iint\limits_{D}\frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy$，其中$D$是由直线 $x=2$，$y=x$ 及双曲线 $xy=1$所围成的区域（如图18.9）．

解 此区域是 y—型区域，根据定理18.6，有

$$I=\int_1^2dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}\,dy=\int_1^2\left[-\frac{x^2}{y}\right]\Bigg|_{\frac{1}{x}}^{x}dx$$

$$=\int_1^2(x^3-x)dx=\frac{9}{4}$$

若过 $y=x$ 和 $xy=1$ 的交点(1,1)作平行 x 轴的直线 $y=1$，这时将区域D分成两个区域 D_1 和 D_2，其中 D_1 是左侧曲线 $x=y$ 和右侧曲线 $x=2$ 及直线 $y=1$（直线$y=2$在 $x=y$ 与 $x=2$之间的部分退缩为一点）所围成．D_2是由左侧曲线 $x=\frac{1}{y}$和右侧曲线 $x=2$及直线 $y=1$所围成。它们都是 x—型区域．于是，根据定理18.7，有

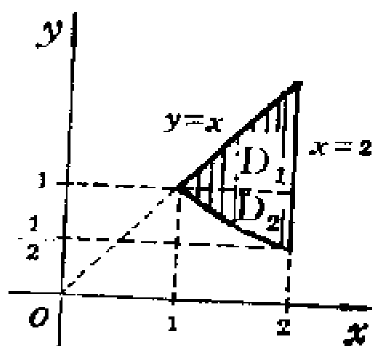


图18.9

$$I=\iint\limits_{D_1}\frac{x^2}{y^2}dxdy+\iint\limits_{D_2}\frac{x^2}{y^2}dxdy$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{\frac{1}{y}}^{2}\frac{x^2}{y^2}dx+\int_1^2dy\int_y^2\frac{x^2}{y^2}\,dx$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[\frac{x^3}{3y^2}\right]_{\frac{1}{y}}^{2}dy+\int_1^2\left[\frac{x^3}{3y^2}\right]_y^2dy$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{8}{3y^2}-\frac{1}{3y^5}\right)dy+\int_1^2\left(\frac{8}{3y^2}-\frac{y}{3}\right)dy=\frac{9}{4}$$

通过上述两种方法的计算不难看出，将区域D看成 y—型区域比看成 x—型区域计算起来简单得多。因此计算二重积分的一般规律是：首先画区域D的图形；其次根据图形的特点确定区域D是 y—型还是 x—型区域；最后根据区域D的类型安置积分限。当然，有时也要考虑被积函数。

例 6　计算二重积分 $I=\iint\limits_D \sqrt{4x^2-y^2}\,dxdy$，其中$D$是由直线 $y=0$，$x=1$，$y=x$ 所围成（如图18.10）。

解　由于此区域D既是 y—型区域，又是 x—型区域，于是，既可以化成先 y 后 x 的两次定积分，也可以化成先 x 后 y 的两次定积分。那么究竟选择什么顺序积分呢？这就要根据被积函数的特点，选择容易积分的顺序进行积分。

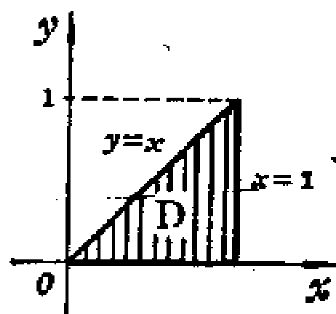


图18.10

若把D看成 y—型区域，根据定理18.6，有

$$I=\int_0^1 dx\int_0^x \sqrt{4x^2-y^2}\,dy$$

$$=\int_0^1\left[\frac{y}{2}\sqrt{4x^2-y^2}+2x^2\arcsin\frac{y}{2x}\right]_0^x dx$$

$$=\int_0^1\left[\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+2x^2\cdot\frac{\pi}{6}\right]dx$$

$$=\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

若把D看成 x—型区域，根据定理18.7，有

$$I=\int_0^1 dy\int_y^1 \sqrt{4x^2-y^2}\,dx$$

$$=\int_0^1\left[x\sqrt{4x^2-y^2}-\frac{y^2}{2}\ln\left(2x+\sqrt{4x^2-y^2}\right)\right]_y^1 dy$$

$$=\int_0^1\left[\sqrt{4-y^2}-\sqrt{3}y^2+\frac{y^2}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{3}y}{2+\sqrt{4-y^2}}\right)\right]dy$$

这个定积分是很难计算的．这说明虽然可把区域 D 看成 x—型区域，因而将二重积分化为先对 x 后对 y 的两次定积分，但按这种顺序却很难计算出结果，由此可以看出，根据积分区域和被积函数选择恰当的积分顺序，对计算二重积分是非常重要的．

例 7 计算二重积分 $I=\iint\limits_D \frac{\sin x}{x}dxdy$，其中 D 是由 $y=x$，$y=x^2$ 所围成的区域（如图18.11）．

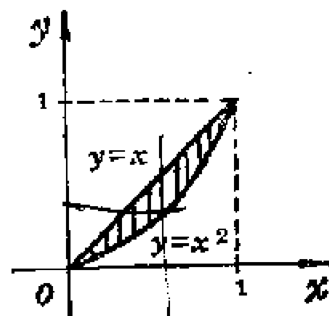


图18.11

解 把区域 D 看成 y—型区域，将 I 化成先对 y 后 x 的两次定积分，得

$$I=\int_0^1 dx\int_0^x \frac{\sin x}{x}dy=\int_0^1\left[\frac{\sin x}{x}y\right]_0^x dx$$

$$=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}(x-x^2)dx=\int_0^1(\sin x-x\sin x)dx$$

$$=[-\cos x+x\cos x-\sin x]\Big|_0^1=1-\sin 1$$

但是，如果把 D 看成 x—型区域，可以化成先对 x 后对 y 的两次定积分，但是，由于 $\frac{\sin x}{x}$ 的原函数是非初等函数，因此计算不出二重积分的值（精确值）．

综上所述，计算二重积分时，首先画出区域 D 的图形，进而确定区域是什么型区域；其次根据区域的类型和被积函数确定累次积分的顺序；最后计算出二重积分的值．

§18.3 二重积分的变量替换

定积分的变量替换是简化定积分计算的强有力的工具，对于二重积分来说，也是如此．因为定积分的积分域是数轴上的闭区间，所以，变量替换的目的仅仅是化简被积函数．而二重

积分的积分域是平面上的区域，由于区域远比区间要复杂得多，因此二重积分的变量替换不仅要化简被积函数，而且更主要的是化简积分区域。

我们知道，只要选择适当的变量替换 $u=u(x, y)$，$v=v(x, y)$，就能将 xy 面上的一个形状较复杂的积分区域变换为 uv 面上的一个形状简单的积分区域，如变换为矩形域，圆域等等. 从而，大大简化二重积分的计算. 为此，只要假设变量替换 $u=u(x, y)$，$v=v(x, y)$建立了 xy 面上的区域D与 uv 面上的区域 D' 之间的一一对应，且由雅可比行列式的几何性质知，当变换 $u=u(x, y)$，$v=v(x, y)$ 将区域D内的小区域 ΔD 映射为区域 D' 内的小区域 $\Delta D'$ 时，它们的面积之间有如下的关系：

$$|\Delta D'|\approx\left|\frac{D(u, v)}{D(x, y)}\right||\Delta D|$$

有了上述准备，我们就可以建立二重积分的变量替换公式.

定理18.8 设函数 $f(x, y)$在有界闭区域D上连续，若定义在 uv 平面上的有界闭区域 D' 上的函数组

$$x=x(u, v),\ y=y(u, v)$$

满足下列条件：

(1) $x(u,v)$，$y(u, v)$在 D' 上存在连续偏导数；

(2) 对任意的 $(u, v)\in D'$，$J(u, v)=\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}\neq 0$；

(3) 变量替换 $x=x(u, v)$，$y=y(u, v)$将 uv 平面上的区域 D'一一对应地变换到 xy 面上的区域D。

则有二重积分的变量替换公式

$$\iint\limits_{D} f(x, y)dxdy=\iint\limits_{D'} f[x(u, v), y(u, v)]\,|J(u, v)|\,dudv \tag{18.6}$$

证明 用任意分法T将D分成 n 个小区域 D_k，其面积为

$\Delta D_k(k=1, 2, \cdots, n)$。因为对任意的$(u, v)\in D'$，$J(u,v)\neq 0$，所以存在逆变换 $u=u(x, y)$，$v=v(x, y)$。从而，相应于分法T，在 uv 平面上有区域 D' 的分法 T'，它将 D' 分成n个小区域 D'_k，其面积为 $\Delta D_k'$ $(k=1, 2, \cdots, n)$。由雅可比行列式的几何意义可知，

$$\Delta D_k=|J(u, v)|\Delta D'_k+\alpha[d(T')]\Delta D'_k$$

其中 $\alpha[d(T)]\to 0$，当 $d(T')\to 0$时。

任取一点 $(\xi_k, \eta_k)\in D_k$，在 D'_k 上存在一点(α_k, β_k)使得$\xi_k=x(\alpha_k, \beta_k)$，$\eta_k=y(\alpha_k, \beta_k)$，从而

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta D_k=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)|J(\alpha_k, \beta_k)|\Delta D'_k$$

$$+\alpha[d(T')]\sum_{k=1}^{n} f[x(\alpha_k, \beta_k), y(\alpha_k, \beta_k)]\Delta D'_k$$

因为逆变换 $u(x, y)$，$v(x, y)$在 D 上一致连续，所以，$d(T)\to 0$时，$d(T')\to 0$，于是

$$\lim_{d(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta D_k=\lim_{d(T')\to 0}\sum_{k=1}^{n} f[x(\alpha_k, \beta_k), y(\alpha_k,$$

$$\beta_k)]|J(\alpha_k, \beta_k)|\Delta D'_k+\lim_{d(T')\to 0}\alpha[d(T')]\sum_{k=1}^{n} f[x(\alpha_k, \beta_k),$$

$$y(\alpha_k, \beta_k)]\Delta D'_k=\iint_{D'} f[x(u, v), y(u, v)]|J(u, v)|dudv$$

即 $$\iint_D f(x, y)dxdy=\iint_{D'} f[x(u, v), y(u,v)]|J(u,v)|dudv$$

例 1 求由抛物线 $y^2=x$，$y^2=2x$ 和直线 $y=x$，$y=2x$所围成的区域D（如图 18.12(a)）的面积。

解 根据区域D的特点，我们作如下的变量替换，设

$$u=\frac{y^2}{x}, \quad v=\frac{y}{x}$$

它将 xy 面上的曲边四边形区域D变换为 uv 平面上的正方形

区域 D'（如图 18.12(b)），即 D' 是由直线$u=1$，$u=2$，$v=1$，$v=2$所围成的正方形区域。

由变换 $u=\dfrac{y^2}{x}$，$v=\dfrac{y}{x}$ 解得逆变换为

$$x=\frac{u}{v^2},\quad y=\frac{u}{v}$$

于是，有

$$\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{v^2} & \dfrac{-2u}{v^3}\\[2mm] \dfrac{1}{v} & \dfrac{-u}{v^2}\end{vmatrix}=\frac{u}{v^4}$$

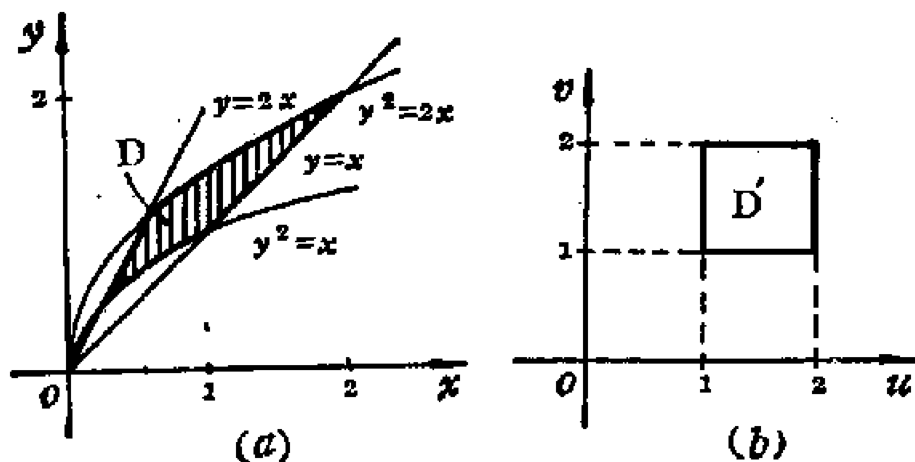


图18.12

若将区域 D' 看成 v—型区域，即先对 v 积分，后对u积分，由公式(18.2)，有

$$S=\iint\limits_{D}dxdy=\iint\limits_{D'}\frac{u}{v^4}\,dudv=\int_1^2du\int_1^2\frac{u}{v^4}dv$$

$$=\int_1^2 u\left.\frac{v^{-3}}{-3}\right|_1^2du=\frac{7}{24}\int_1^2 udu=\frac{7}{16}$$

二重积分的变量替换中，最常用的也是最重要的变量替换是极坐标变量替换。替换公式是

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta \tag{18.7}$$

在极坐标变量替换(18.7)下，有

$$J=\frac{D(x,y)}{D(r,\ \theta)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r$$

将 $|J|=r$ 代入到公式(18.6)中，得

$$\iint_D f(x,\ y)dxdy=\iint_{D'} f[r\cos\theta,\ r\sin\theta]rdrd\theta \qquad (18.8)$$

极坐标变量替换(18.7)将 $r\theta$ 面上的区域 D' 变换为 xy 面上的区域 D，反之(18.7)的逆变换将 xy 面上的区域 D 变换为 $r\theta$ 面上的区域 D'。例如，它将 xy 面的圆域 $D:x^2+y^2\leqslant a^2$ 变换为 $r\theta$ 面上更为简单的矩形区域 $D'=[0,\ a;\ 0,\ 2\pi]$（如图18.13）。由此看来，极坐标变量替换能把圆域，圆域的一部分（如扇形、半圆）化成较简单的矩形区域，也能将边界曲线含有 x^2+y^2 化为较为简单的区域；另一方面也能将 x^2+y^2 为中间变量的函数 $f(x^2+y^2)$ 化简。从而在计算二重积分时，当积分区域是圆域、圆域的一部分、边界曲线含有 x^2+y^2 时，以及被积函数中含有 x^2+y^2 时均可考虑使用极坐标变量替换。

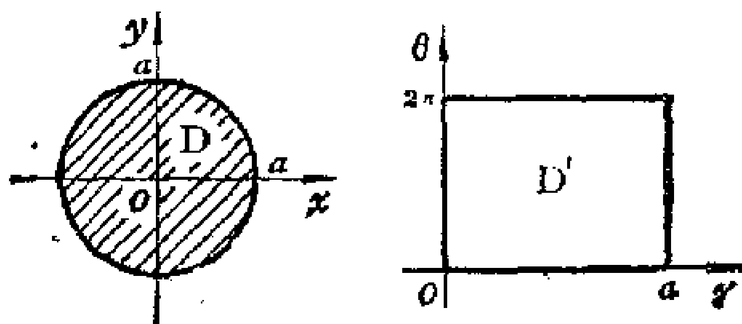


图18.13

例2 计算二重积分

$$I=\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

其中 D 为圆域 $x^2+y^2\leqslant 4$。

解 作极坐标变量替换

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$$

变换后的区域为矩形域 $D'=[0,\ 2;\ 0,\ 2\pi]$，被积函数变为

$$\frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}=\frac{1}{\sqrt{4-(r\cos\theta)^2-(r\sin\theta)^2}}=\frac{1}{\sqrt{4-r^2}}$$

由极坐标变量替换公式(18.8)，有

$$I=\iint_{D'}\frac{r}{\sqrt{4-r^2}}drd\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\frac{r}{\sqrt{4-r^2}}dr$$

$$=\int_0^{2\pi}-\sqrt{4-r^2}\Big|_0^2 d\theta=\int_0^{2\pi}2d\theta=4\pi$$

例 3 计算双纽线 $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ 所围成的区域的面积。

解 根据二重积分的几何意义知，双纽线所围成的区域D的面积 $S=\iint_D dxdy$. 因为此二重积分的边界曲线含有"x^2+y^2"，所以可考虑使用极坐标变量替换。

令 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$，双纽线的方程为

$$r^2=2a^2\cos2\theta$$

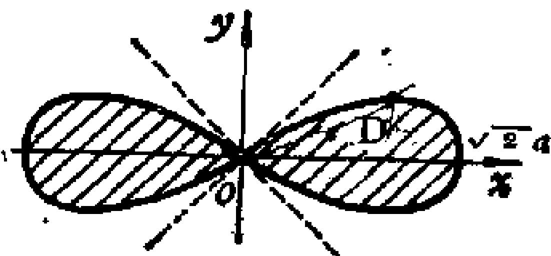


图18.14

由于双纽线关于 x 轴与 y 轴皆对称，因此双纽线所围成的区域D的面积S应为位于第一象限内的部分的四倍（如图18.14），而第一象限内的部分区域是：$0\leqslant r\leqslant a\sqrt{2\cos2\theta}$, $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$.

由公式（18.8），有

$$S=\iint_D dxdy=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{a\sqrt{2\cos2\theta}}rdr=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos2\theta d\theta=2a^2$$

例 4 求球 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=Rx$ 所割下那部分的体积（通常称此立体为维维安尼立体，如图18.15）。

解 由于此立体关于 xy 面和 xz 面皆对称，因此，所求立体的体积应是第一挂限部分的四倍，而第一挂限部分的立体是以球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 为顶面，以圆周 $x^2+y^2=Rx$ 与 x

轴围成的上半圆域 $D(y\geqslant0)$ 为底的曲顶柱体（如图18.15）。于是，由二重积分的几何意义，所求立体的体积

$$V=4\iint_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy$$

由于此二重积分被积函数含有 x^2+y^2，积分域是半圆，因此我们用极坐标变量替换。区域 D 的边界曲线 $x^2+y^2=Rx$ 的极坐标方程是 $r=R\cos\theta$，$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$。由公式（18.8），有

$$V=4\iint_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{R\cos\theta}\sqrt{R^2-r^2}\cdot rdr$$

$$=\frac{4}{3}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)d\theta=\frac{4}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$

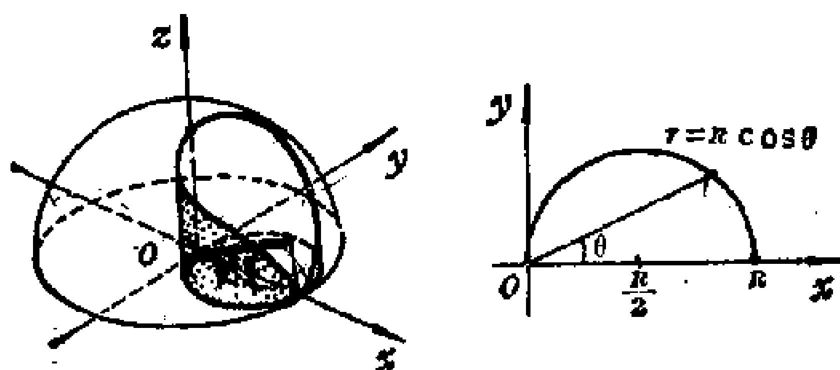


图18.15

例5 将二重积分

$$I=\iint_D f(x,y)dxdy$$

用极坐标替换，并按两种不同顺序安置积分限，其中 D 为二直线 $y=1$，$x=1$ 和二坐标轴所围成的正方形（如图18.16）。

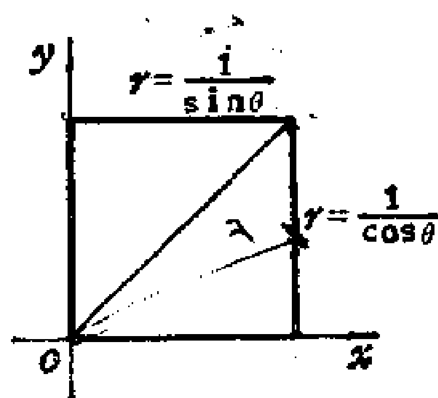


图18.16

解 首先讨论先对 r 积分，后对 θ 积分。

对 r 积分是在射线上从里线 $r=0$ 积到外线 $r=f(\theta)$。对此区域，外线有两条：当 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$ 时，外线 $r=\frac{1}{\cos\theta}$，当$\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$时，外线 $r=\frac{1}{\sin\theta}$。于是，

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}}f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)rdr+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}}f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)rdr$$

其次讨论先对 θ 积分，后对 r 积分。

对 θ 积分是在圆弧上从小角积到大角。当 $0\leqslant r\leqslant1$ 时，$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$；当 $1\leqslant r\leqslant\sqrt{2}$ 时，$\arccos\frac{1}{r}\leqslant\theta\leqslant\arcsin\frac{1}{r}$。

于是，

$$I=\int_0^1dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)rd\theta+\int_1^{\sqrt{2}}dr\int_{\arccos\frac{1}{r}}^{\arcsin\frac{1}{r}}f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)rd\theta$$

例 6　求下列曲面 $z=x^2+y^2$，$x^2+y^2=x$，$x^2+y^2=2x$，$z=0$ 所围成的立体的体积。

解　由二重积分的几何意义，有

$$V=\iint_D(x^2+y^2)dxdy$$

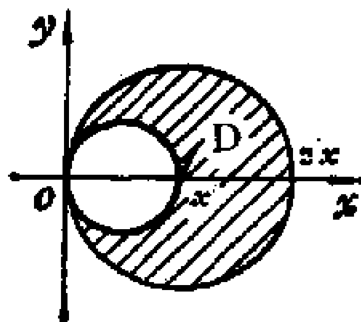


图18.17

其中 D 为小圆 $x^2+y^2=x$ 的外面，大圆 $x^2+y^2=2x$ 的内部(如图18.17)。

令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，在极坐标下圆的方程为 $r=\cos\theta$，$r=2\cos\theta$，由公式（18.8），有

$$V=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\cdot\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta}r^2\cdot rdr=\frac{15}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta=\frac{15}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos2\theta}{2}\right)^2d\theta$$

$$=\frac{15}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos2\theta+\frac{1}{4}\cdot\frac{1+\cos4\theta}{2}\right]d\theta$$

$$=\frac{15}{4}\cdot\frac{3}{8}\pi=\frac{45\pi}{32}$$

§18.4 三重积分

一 三重积分概念

1 物体V的质量

设V是三维空间的立体（有界闭区域）．若物体V在V内任意一点$P(x,y,z)$的密度为$f(x,y,z)$，求物体V的质量m。

若对任意一点$P(x,y,z)\in V$，密度$f(x,y,z)=\rho$（常数），则物体V的质量$m=\rho V$，其中V也表示V的体积。若各点的密度$f(x,y,z)$不是常数，我们用若干个曲面网将物体V分成n个小物体

$$V_1,\ V_2,\ \cdots,\ V_i,\ V_{i+1},\ \cdots,\ V_n$$

将此分法记作T．用ΔV_i表示第i个小体V_i的体积，用V_i上任意一点$P_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$的密度$f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$近似代替$V_i$上每一点$P(x,y,z)$的密度$f(x,y,z)$．于是，第$i$个小体$V_i$的质量近似等于以$f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$为均匀密度，以$\Delta V_i$为体积的均匀小体$V_i$的质量$f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$，即

$$\Delta m_i\approx f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$$

当分割曲面无限加密，即当分法T的n个小体$V_1,V_2,\cdots,V_i,\cdots,V_n$中的最大直径$d(T)$①无限变小时，亦即当$d(T)\to0$

---

① $d(T)=\max\{d_1(T),\ d_2(T),\ \cdots,\ d_n(T)\}$,

$$d_i(T)=\sup_{\substack{(x_1,y_1,z_1)\in V_i\\(x_2,y_2,z_2)\in V_i}}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

时，上述和式的极限就是物体V的质量，即

$$m=\lim_{d(T)\to 0}\sum_{i=0}^{n} f(\xi_i,\ \eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$$

2　三重积分定义

对上述和式的极限进行抽象，就得到三重积分的定义。

设V是三维空间中一有界闭区域，函数$f(x,\ y,\ z)$是定义在区域V上的有界函数。对区域V的任意分法T，将区域V分成n个小区域

$$V_1,\ V_2,\ \cdots,\ V_n$$

在每个小区域V_i上任取一点$(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)$，作和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)\Delta V_i\ \text{（称为积分和）}$$

其中ΔV_i是第i个小区域V_i的体积。

定义　如果不论分法T如何，也不论点$(\xi_i,\ \eta_i,\zeta_i)\in V_i$的取法如何，只要$n$个小区域中的最大的直径$d(T)\to 0$，和数$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)\Delta V_i$存在极限，设极限是$I$，即

$$\lim_{d(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\ \eta_i\ \zeta_i)\ \Delta V_i=I$$

则称函数$f(x,\ y,\ z)$在三维空间中的有界闭区域V上可积，并称I是函数$f(x,\ y,\ z)$在区域V上的三重积分，记作

$$\iiint_V f(x,\ y,\ z)dV=\lim_{d(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)\Delta V_i \qquad (18.9)$$

其中$f(x,\ y,\ z)$称为三重积分的被积函数，$x,\ y,\ z$，为积分变量，V称为积分区域，dV为体积微元。

当三重积分存在时，用分别平行xy面，xz面和yz面的三组平行平面去分割V，则有$\Delta V_i=\Delta x_i\ \Delta y_i\ \Delta z_i$，从而，体积微元$dV=dxdydz$。于是，三重积分也表为

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dV=\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz$$

这样，根据三重积分的定义，不难看出，若三维空间中物体V上每一点 $P(x, y, z)$的密度为$f(x, y, z)$，则物体V的质量m是三重积分$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz$，即

$$m=\lim_{d(T)=0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i=\iiint\limits_V f(x, y, z)\ dxdydz$$

关于三重积分的可积性及性质皆与二重积分类似，故从略。

由三重积分的定义知，如果被积函数在区域V上恒等于1，即$f(x, y, z)\equiv 1$，则三重积分

$$\iiint\limits_V dxdydz$$

是空间区域V的体积。

二　化三重积分为累次积分

三重积分可化为一次定积分和一次二重积分，也可以化为三次定积分。

定理18.9　设函数$f(x, y, z)$在有界闭区域V上连续，区域V的上、下曲面的方程分别为$z=z_2(x, y)$，$z=z_1(x,y)$，侧面是母线平行z轴的柱面(有时柱面可能退缩为一条曲线)，它在xy面上的投影是xy面上的平面区域D_{xy}，设D_{xy}的边界曲线为$y=y_1(x)$，$y=y_2(x)$，且$y_1(x)\leqslant y_2(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$，则

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\ dxdydz=\iint\limits_D dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x, y, z)dz$$

$$=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y, z)dz \qquad (18.10)$$

称此区域V为z—型区域，投影区域D_{xy}为y—型区域(如图18.18)。

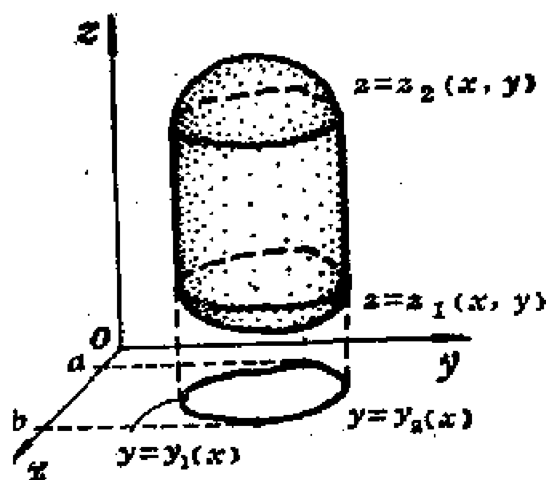


图18.18

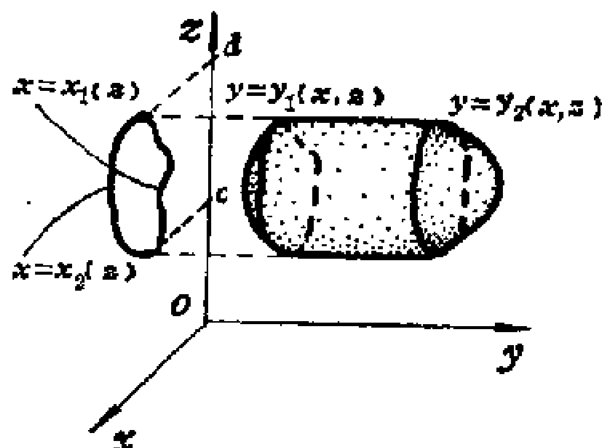


图18.19

若区域V的左右曲面方程分别为 $y=y_1(x, z)$, $y=y_2(x, z)$, V 在 xz 面上的投影为 D_{xz}, 设 D_{xz} 的边界曲线为 $x=x_1(z)$及 $x=x_2(z)$, 其中 $x_1(z)\leqslant x_2(z)$ $(c\leqslant z\leqslant d)$, 则

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz=\iint_{D_{xz}} dxdz\int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x, y, z)dy$$

$$=\int_c^d dz\int_{x_1(z)}^{x_2(z)} dx\int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x, y, z)dy \qquad (18.11)$$

称此区域为 y—型区域，投影区域 D_{xz} 为 x—型区域(如图18.19).

若区域V的前后曲面方程分别为 $x=x_2(y,z)$及 $x=x_1(y, z)$, V在 yz 面上的投影区域为 D_{yz}, 设 D_{yz} 的边界曲线为 $z=z_1(y)$及 $z=z_2(y)$, 其中 $z_1(y)\leqslant z_2(y)$ $(e\leqslant y\leqslant f)$, 则

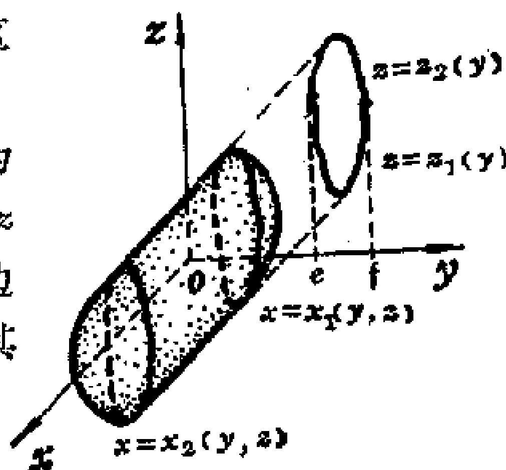


图18.20

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz$$

$$=\iint_{D_{yz}} dydz\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x, y, z)dx$$

$$=\int_e^f dy\int_{z_1(y)}^{z_2(y)} dz\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x, y, z)dx \qquad (18.12)$$

称此区域V为 x—型区域，投影区域 D_{yz}为 z—型区域（如图18.20）。

定理18.9的证明与二重积分化为累次积分的证法类似，故从略。

例 1 计算三重积分

$$I=\iiint\limits_V x\,dx\,dy\,dz$$

其中V是由三个坐标平面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的区域（如图18.21）。

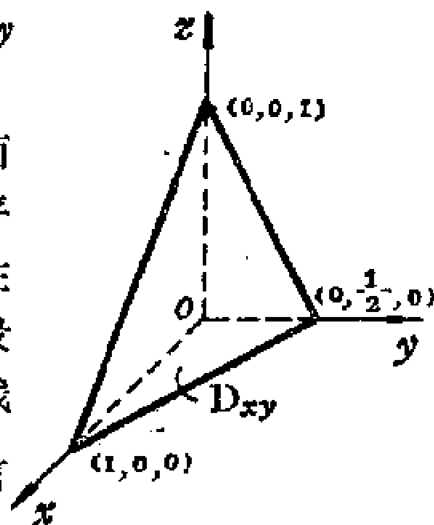


图18.21

解 不难看出，此区域V是由底面 $z=0$（平面）和顶面 $z=1-x-2y$（平面）以及 xz 面，yz 面作为侧面（柱面）的 z—型区域，它在 xy 面上的投影 D_{xy} 是由左边界线 $y=0$和右边界线 $y=\frac{1}{2}(1-x)$的 y—型区域（当然也可以看作x—型区域）。由公式(18.10)有

$$I=\iint\limits_{D_{xy}}dx\,dy\int_0^{1-x-2y}x\,dz=\int_0^1 x\,dx\int_0^{\frac{1-x}{2}}dy\int_0^{1-x-2y}dz$$

$$=\int_0^1 x\,dx\int_0^{\frac{1-x}{2}}(1-x-2y)\,dy=\int_0^1 x[y-xy-y^2]\Big|_0^{\frac{1-x}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1(x-2x^2+x^3)\,dx=\frac{1}{48}$$

此区域V还可以看成 y—型区域或 x—型区域，并用相应的公式（18.11)或（18.12）计算出它的结果。从略。

例 2 计算由抛物面 $y^2+z^2=6-x$，坐标面 xy，xz 及平面 $z=4x$，$y=1$，$z=2$所围成的立体的体积。

解 此区域V是由后边界曲面 $x=\frac{1}{4}z$（平面）和前边界曲面 $x=6-y^2-z^2$，及坐标面 xz 和 xy，平面 $y=1$，$z=2$ 为侧

面的 x—型区域. 投影区域 D_{yz} 是由直线 $z=0$, $z=2$, $y=0$, $y=1$ 围成的矩形，故可看作 x—型区域（如图18.22）. 由公式（18.12），有

$$V=\iiint\limits_V dx\,dy\,dz$$

$$=\int_0^1 dy\int_0^2 dz\int_{\frac{z}{4}}^{6-y^2-z^2} dx$$

$$=\int_0^1 dy\int_0^2\left(6-y^2-z^2-\frac{z}{4}\right)dz$$

$$=\int_0^1\left[(6-y^2)z-\frac{z^3}{3}-\frac{z^2}{8}\right]_0^2 dy$$

$$=\int_0^1\left(12-\frac{2}{3}y^3-\frac{8}{3}y-\frac{1}{2}y\right)dy$$

$$=\frac{49}{6}$$

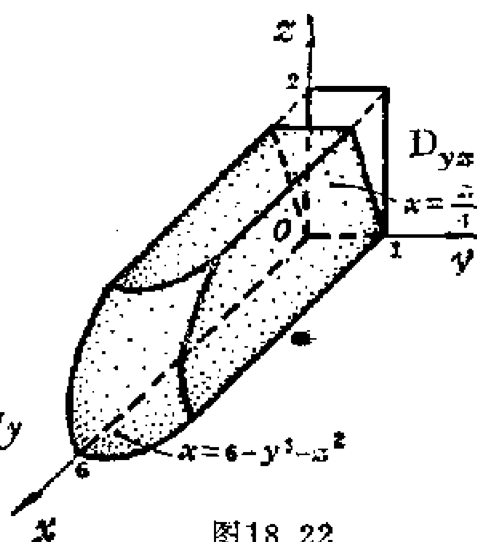


图18.22

§18.5 三重积分的变量替换

同二重积分一样，三重积分的变量替换公式是简化三重积分计算的强有力工具.

一 三重积分的一般变量替换

定理18.10 设函数 $f(x,\ y,\ z)$在有界闭区域（立体）V 上连续，若定义在 uvw 空间上的有界闭区域 V' 上的函数组

$$x=x(u,\ v,\ w),\ y=y(u,\ v,\ w),\ z=z(u,v,w)$$

满足下列条件：

（1）$x(u,\ v,\ w)$, $y(u,\ v,\ w)$, $z(u,\ v,\ w)$在 V' 上存在连续偏导数；

（2）对任意的$(u,\ v,\ w)\in V'$, $J(u,\ v,\ w)\neq 0$;

（3）函数组 $x=x(u,\ v,w)$, $y=y(u,\ v,\ w)$, $z=z(u,\ v,\ w)$ 将 uvw 空间上的区域 V'一一对应地映射到 xyz 空间

上的区域V。

则有三重积分的变量替换公式

$$\iiint\limits_{V} f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f[x(u, v, w), y(u, v, w),$$

$$z(u, v, w)] \mid J(u, v, w) \mid dudvdw \qquad (18.13)$$

证明与二重积分类似，从略。

例 1 计算六个平面

$$a_1x + b_1y + c_1z = \pm h_1, \quad a_2x + b_2y + c_2z = \pm h_2, \quad a_3x + b_3y + c_3z = \pm h_3$$

所围成的平行六面体V的体积，其中 a_i, b_i, c_i, h_i $(i = 1, 2, 3)$ 皆为常数，$h_i > 0$，且系数行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

解 设 $u = a_1x + b_1y + c_1z$ 　　则 $u = \pm h_1$

$v = a_2x + b_2y + c_2z$ 　　$v = \pm h_2$

$w = a_3x + b_3y + c_3z$ 　　$w = \pm h_3$

于是，xyz 空间中的平行六面体变成 u, v, w 空间中的长方体：

$$-h_1 \leqslant u \leqslant h_1, \quad -h_2 \leqslant v \leqslant h_2, \quad -h_3 \leqslant w \leqslant h_3$$

由函数行列式的性质，有

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \frac{1}{\dfrac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\Delta}$$

由三重积分的变量替换公式（18.13）知，平行六面体V的体积

$$I = \iiint\limits_{V} dxdydz = \iiint\limits_{V'} \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| dudvdw$$

$$=\frac{1}{|\Delta|}\iiint\limits_{V'}dudvdw=\frac{1}{|\Delta|}\int_{-h_1}^{h_1}du\int_{-h_2}^{h_2}dv\int_{-h_3}^{h_3}dw$$

$$=\frac{8}{|\Delta|}h_1h_2h_3$$

下面给出两种最常用的变换。

二 柱面坐标变换

设空间一点 $P(x, y, z)$在 xy 面上的投影为 $M(x, y)$ (如图18.23)．如果点M的极坐标为(r, θ)，则 (r, θ, z) 称为点P的柱面坐标，其中 r 是点P到 z 轴的距离 $(0\leqslant r<+\infty)$；θ是坐标面 xz 和通过 z 轴的半平面 ozP 之间的夹角 $(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$；$z$ 是点P的竖坐标 $(-\infty<z<+\infty)$。

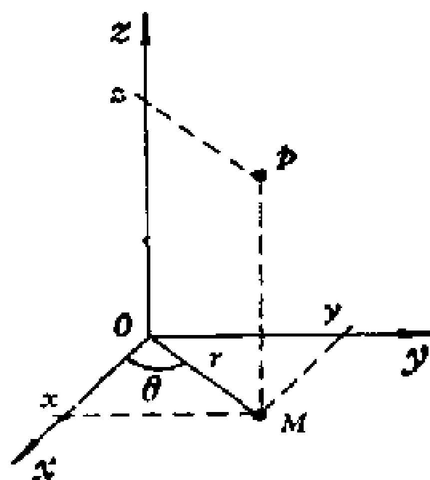


图18.23

在柱面坐标系中，三个坐标面是：$r=$常数，表示以 z轴为轴，半径为 r 的圆柱面；$\theta=$常数，表示过 z 轴的半平面；$z=$常数，表示平行于xy面的平面．因为这三族曲（平）面，两两正交，所以柱面坐标系是正交坐标系．

由图18.23不难看出，空间中任意一点P的直角坐标(x, y, z)与柱面坐标(r, θ, z)之间有如下关系：

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{cases}\qquad(18.14)$$

(18.14)式称为柱面坐标变换．柱面坐标变换的雅可比行列式为

$$J(r, \theta, z)=\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, z)}=\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=r$$

根据三重积分的变量替换公式（18.13），得三重积分的柱面坐标变量替换公式为

$$\iiint\limits_{V} f(x,\ y,\ z)dxdydz=\iiint\limits_{V'} f[r\cos\theta,\ r\sin\theta, z]\, rdrd\theta dz \tag{18.15}$$

在柱面坐标变换下，体积微元 $dV=rdrd\theta dz$. 它有明显的几何意义：dV 是由两个半径分别是 r 和 $r+dr$ 的圆柱面，两个到 xy 面的距离分别为 z 和 $z+dz$ 的平行平面，以及两个过 z 轴，且与 xz 面夹角分别为 θ 和 $\theta+d\theta$的半平面所围成的小块（如图18.24）．当 dr, $d\theta$, dz 很小时，这个小块立体可近似地看作边长分别 dr, $rd\theta$, dz 的长方体，从而这小块的体积为 $dV=rdrd\theta dz$.

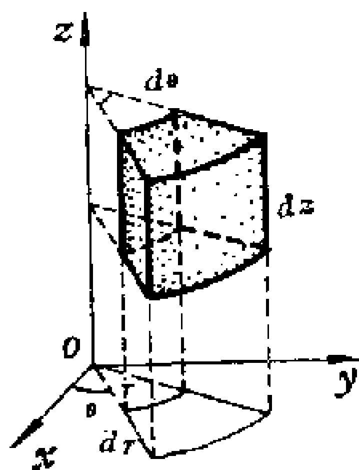


图18.24

对柱面坐标变换下的三重积分

$$\iiint\limits_{V'} f[r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ z]\, rdrd\theta dz$$

的计算，通常是将 V' 看成 z—型区域，即先对 z 积分从底面 $z=z_1(r,\ \theta)$, 到顶面 $z=z_2(r,\ \theta)$；其次在投影区域 D_{xy} 上，沿射线从里面 $r=r_1(\theta)$ 积到外线 $r=r_2(\theta)$ $(r_1(\theta)\leqslant r_2(\theta))$；最后对 θ 积分，从小角积到大角.

一般说来，当包围体V的边界曲面或被积函数中含有x^2+y^2，可考虑使用柱面坐标替换.

例 2　计算三重积分

$$\iiint\limits_{V} zdxdydz$$

其中体V由上半球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 和旋转抛物面 $x^2+y^2=3z$ 所围成(如图18.25)．

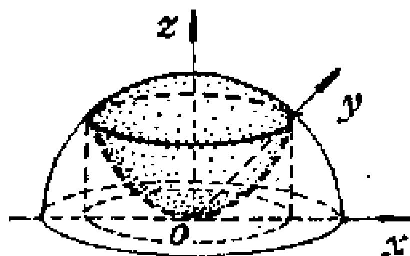


图18.25

解　由于积分区域的边界曲面含

有 “$x^2+y^2+z^2$” 和 “x^2+y^2”，因此用柱面坐标替换。令

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \quad (|J|=r) \\ z=z \end{cases}$$

积分区域V的底面方程为 $z=\frac{r^2}{3}$，上面为 $z=\sqrt{4-r^2}$，上、下曲面的交线$\begin{cases} z=\frac{r^2}{3}, \\ z=\sqrt{4-r^2}, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} r=\sqrt{3} \\ z=1 \end{cases}$ 在 xy 面的投影是圆 $r=\sqrt{3}$。于是，由三重积分的柱面坐标变量替换公式 (18.15)，有

$$\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{V'} zr\,dr\,d\theta\,dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}dr\int_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}}z\,dz$$

$$=\frac{13}{4}\pi$$

例3 计算抛物面 $x^2+y^2=az$ $(a>0)$，圆柱面 $x^2+y^2=2ax$ 与平面 $z=0$所围成体V的体积（如图18.26）。

解 用柱面坐标替换。令

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \quad (|J|=r) \\ z=z \end{cases}$$

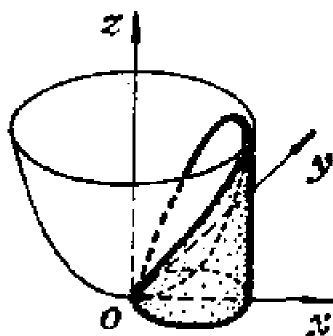


图18.26

积分区域的底面是 $z=0$ 的平面，顶面是 $z=\frac{1}{a}(x^2+y^2)=\frac{1}{a}r^2$。投影区域 D_{xy} 是圆心位于 $(a,\ 0)$ 的圆周 $r\leqslant 2a\cos\theta\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$。于是，根据公式 (18.15) 知，体$V$的体积$I$是

$$I=\iiint\limits_V dx\,dy\,dz=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}dr\int_0^{\frac{r^2}{a}}r\,dz$$

$$= \frac{1}{a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} r^3 dr = 4a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta$$

$$= 4a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{8}\cos 4\theta\right] d\theta$$

$$= \frac{3}{2}\pi a^3$$

例 4 求由椭圆锥面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ 及平面 $z = c$ 所围成的立体在第一卦限部分的体积（$a>0$，$b>0$，$c>0$，如图18.27）。

解 由椭圆锥面的特点，选用广义柱面坐标变换，令

$$\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$J(r, \theta, z) = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta & 0 \\ b\sin\theta & br\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = abr$$

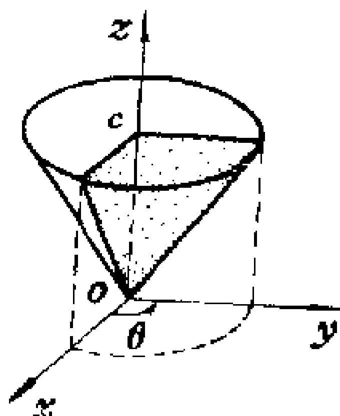


图18.27

体V的底面为 $z = cr$，顶面为 $z = c$，投影区域是圆 $r\leqslant 1$ 的四分之一，$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$。由变量替换公式（18.13），该立体的体积 I 是，

$$I = \iiint_V dxdydz = \iiint_{V'} abr\,drd\theta dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 dr \int_{rc}^{c} abr\,dz$$

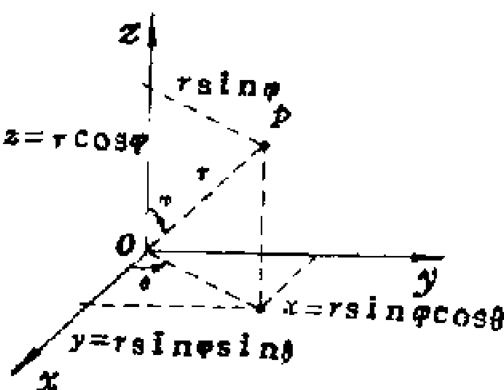
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (abcr - abcr^2) dr = \frac{\pi abc}{2}\int_0^1 (r - r^2) dr = \frac{\pi abc}{12}$$

三　球面坐标变换

设 $r = |\overrightarrow{OP}|$ $(0\leqslant r < +\infty)$，φ是向量$\overrightarrow{OP}$与 z 轴正向的

夹角（$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$），$\theta$ 是过 z 轴及点 P 的半平面与 xz 面的夹角，即 $\overrightarrow{OP}$ 在 xy 面的射影 $\overline{OM}$ 与 x 轴正向的夹角（$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$）（如图18.28）。

由图18.28不难看出，空间中任意一点 P 的直角坐标（x, y, z）与球面坐标（r, θ, φ）之间有如下的关系：



$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \qquad (18.16)$$

图18.28

(18.16)式称为球面坐标变换。球面坐标变换的雅可比行列式为

$$J(r,\ \varphi,\ \theta) = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= r^2\sin\varphi$$

因为 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$，所以 $\sin\varphi\geqslant 0$，从而 $|J(r,\ \varphi,\ \theta)| = r^2\sin\varphi$。根据三重积分的变量替换公式（18.13），得三重积分的球面坐标变量替换公式为

$$\iiint\limits_{V} f(x,\ y,\ z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(r\sin\varphi\cos\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta,$$

$$r\cos\varphi)r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta \qquad (18.17)$$

在球面坐标变换下，体积微元 $dV = r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$。它的几何意义是：由两个半径为 r 及 $r+dr$ 的球面，两个与 z 轴正向夹角为 φ 及 $\varphi+d\varphi$ 的圆锥面，两个过 z 轴且与 xz 面夹角为 θ 及$\theta+d\theta$的半平面所围成的小块(如图18.29)。

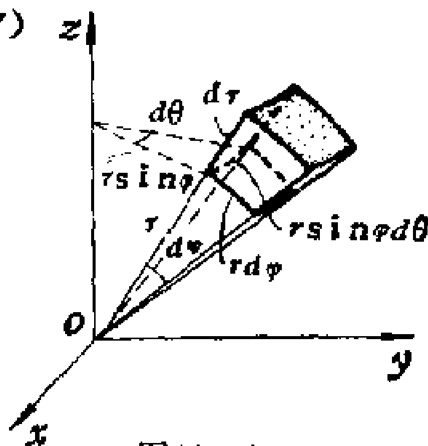


图18.29

当 dr，$d\varphi$，$d\theta$ 皆很小时，这个小块可近似地看作长方体，其三边各为 dr，$rd\varphi$， $r\sin\varphi d\theta$。所以小块的体积为 $r^2\sin\varphi dr d\varphi d\theta$。

对球面坐标变换下的三重积分

$$\iiint\limits_{V'} f(r\sin\varphi\cos\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta,\ r\cos\varphi)r^2\sin\varphi dr d\varphi d\theta$$

的计算，通常是先对 r 积分，即在射线上，从里面 $r=r_1(\varphi,\theta)$积到外面 $r=r_2(\varphi,\theta)$；次对 φ 积分，即在圆弧上从"里"面[1]交线积到"外"面交线，最后对 θ 积分，从小角积到大角.

一般说来，当包围体V的边界曲面或被积函数中含有"$x^2+y^2+z^2$"时，即体V是由球面，锥面所围成的区域以及被积函数中含有 $x^2+y^2+z^2$ 时，可考虑使用球面坐标变换。

例5 求半径为R的球的体积.

解 让球心位于原点（0，0，0），则球面方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$。因为V是球体，所以用球面坐标变量替换。令

$$\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta \\ y=r\sin\varphi\sin\theta \quad (|J|=r^2\sin\varphi) \\ z=r\cos\varphi \end{cases}$$

在球面坐标下的球面方程为 $r=R$，先对 r 积分，在从原点(0，0，0)出发的射线上，从"里面" $z=0$（即原点）积到"外"面 $r=R$（球面）；对 φ 积分，在圆弧上从 z 轴的正向 $\varphi=0$积到 z 轴的负向 $\varphi=\pi$；对 θ 积分是从0到 2π。因此所求的球体积为

$$V=\iiint\limits_{V} dxdydz=\iiint\limits_{V'} r^2\sin\varphi dr d\varphi d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{R} r^2\sin\varphi dr=2\pi\int_0^{\pi}\frac{R^3}{3}\sin\varphi d\varphi=\frac{4}{3}\pi R^3$$

---

[1] 把 z 轴视为中心轴，靠近z轴的曲面称为"里"面，远离z轴的曲面称为外面。

例6 计算三重积分

$$I=\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

其中V是由球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ ($z\geqslant 0$)及锥面 $x^2+y^2=z^2$ 所围成的区域。

解 用球面坐标变换，令

$$\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta \\ y=r\sin\varphi\sin\theta \quad (|J|=r^2\sin\varphi) \\ z=r\cos\varphi \end{cases}$$

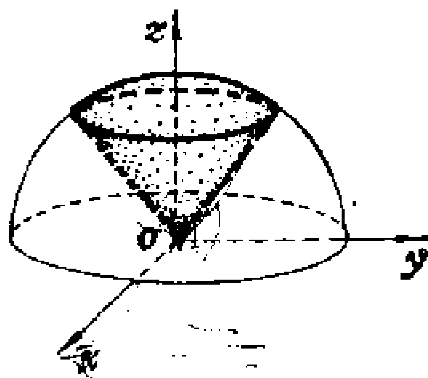


图18.30

先对 r 积分，在从原点出发的射线上，从原点$r=0$积到外面（球面）$r=R$。其次对 φ 积分，从 z 轴正向 $\varphi=0$ 沿圆弧积到锥面与球面的交线 $\varphi=\frac{\pi}{4}$。事实上，交线为

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x^2+y^2=z^2 \end{cases} \quad 或 \quad 2z^2=R^2$$

化为球面坐标有 $2r^2\cos^2\varphi=R^2$，又因 $r=R$，所以

$$\cos^2\varphi=\frac{1}{2}，即 \cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

从而得交线的球面坐标方程为$\begin{cases} \varphi=\frac{\pi}{4}, \\ r=R. \end{cases}$ 最后对 θ 积分是从 0 到 2π。因此根据球面坐标的变量替换公式（18.17），有

$$I=\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz=\iiint\limits_{V'} r^2\cdot r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^R r^4\sin\varphi dr=\frac{2\pi}{5}R^5\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi$$

$$=\frac{(2-\sqrt{2})\pi R^5}{5}$$

例7 将三重积分

$$I=\iiint\limits_V f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)dxdydz$$

变换为球面坐标，并化成累次积分，其中V是旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 及平面 $x=y, x=1, y=0, z=0$所围成（如图18.31）．

解 令 $\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta \\ y=r\sin\varphi\sin\theta \\ z=r\cos\varphi \end{cases}$

$(|J|=r^2\sin\varphi)$

在球面坐标下，抛物面的方程 $r=\dfrac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$，平面$x=1$的方程为 $r=\dfrac{1}{\sin\varphi\cos\theta}$.

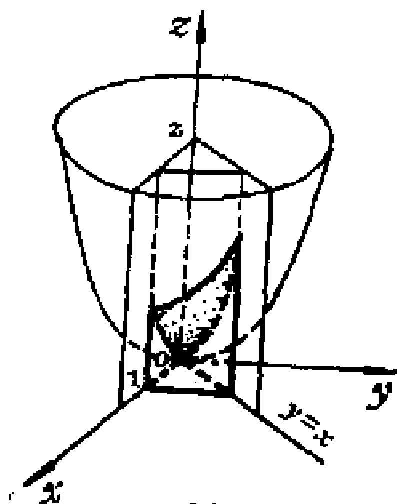


图18.31

旋转抛物面与 $x=1$ 面的交线为

$$\begin{cases} r=\dfrac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} \\ r=\dfrac{1}{\sin\varphi\cos\theta} \end{cases}$$

解之得 $\operatorname{ctg}\varphi=\dfrac{1}{\cos\theta}$，即 $\varphi=\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{\cos\theta}$.

先对 r 积分，在从原点出发的射线上，从里面（抛物面）$r=\dfrac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$积到外面（平面） $r=\dfrac{1}{\sin\varphi\cos\theta}$.

后对 φ 积分，在圆弧上从第一条交线$\varphi=\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{\cos\theta}$积到第二条交线$\begin{cases} x=1 \\ z=0 \end{cases}$，因为交线在平面 $z=0$上，所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$.

最后对 θ 积分，显然是从0积到$\dfrac{\pi}{4}$，于是，由球面坐标的变量替换公式(18.17)，有

$$I=\iiint_V f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)dxdy\,dz=\iiint_{V'} f(r)r^2\sin\varphi dr d\varphi d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{\operatorname{arcctg}\frac{1}{\cos\theta}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_{\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}}^{\frac{1}{\sin\varphi\cos\theta}}f(r)r^2\sin\varphi dr$$

§18.6 重积分的应用

一 曲面面积

用定积分可以计算平面图形和一些特殊的曲面，如旋转曲面的面积．现在我们应用二重积分计算一般曲面面积．

设有一块曲面S，其方程为 $z=f(x, y)$，它在 xy面上的投影为有界闭区域D．函数 $f(x, y)$在D上连续，且关于 x 和 的两个偏导数在D上也连续．由全微分的几何意义知，曲面上任意一点邻近的充分小的一块的面积，可以用过该点的切平面相应的一小块面积来近似代替．这样，我们用任意分法T，将区域D分成 n 个小区域 $D_i(i=1, 2, \cdots, n)$，过每个小区域 D_i 的边界曲线作母线平行 z 轴的柱面，记每个小柱面所截曲面S的部分为 q_i $(i=1, 2, \cdots, n)$，在 q_i 上任取一点 p_i，过 p_i 作曲面S的切平面 T_i，记 T_i 被过 D_i 边界的小柱面所截下的一小块为 τ_i，其面积为 $\Delta\tau_i$，于是，$\Delta\tau_i\approx\Delta q_i$ （如图18.32 (a)），而

$$\Delta D_i{}^{①}=\Delta\tau_i\,|\cos\nu_i|$$

（如图 18.32(b)），其中 ν_i 是切平面 T_i 的法线向量$\overrightarrow{n_i}$与 z 轴正向之间的夹角（如图18.32）．

由§17.6有

---

① ΔD_i 表示 D_i 的面积．

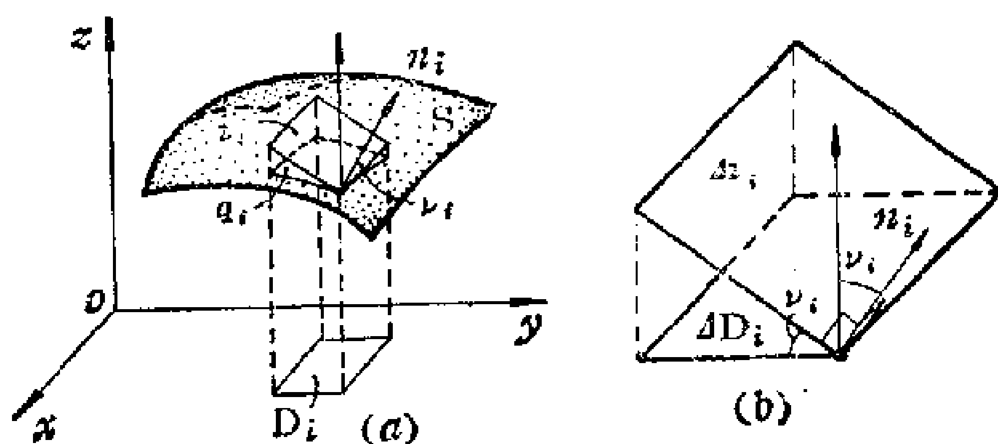


图18.32

$$|\cos\nu_i| = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2_x(x_i, y_i)+f'^2_y(x_i, y_i)}}$$

从而

$$\Delta\tau_i = \frac{\Delta D_i}{|\cos\nu_i|} = \sqrt{1+f'^2_x(x_i, y_i)+f'^2_y(x_i, y_i)}\Delta D_i$$

于是，$S = \lim\limits_{d(T)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta\tau_i = \lim\limits_{d(T)=0}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+f'^2_x(x_i, y_i)+f'^2_y(x_i,y_i)}$

$$\Delta D_i = \iint\limits_D \sqrt{1+f'^2_x(x, y)+f'^2_y(x,y)}dxdy$$

即 $$S = \iint\limits_D \sqrt{1+f'^2_x(x, y)+f'^2_y(x, y)}\,dxdy$$

总之，若曲面 S 由方程 $z=z(x, y)$ 形式给出，其中函数 $z=z(x, y)$在其定义域 D_{xy} 上连续，且关于 x 和 y 的偏导数连续，则曲面 S 的面积 S 是

$$S = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1+z'^2_x(x, y)+z'^2_y(x, y)}\,dxdy \qquad (18.18)$$

若曲面 S 由方程 $x=x(y, z)$ 形式给出，其中函数 $x=x(y, z)$在其定义域 D_{yz} 上连续，且关于 x 和 y 的偏导数连续，则曲面 S 的面积 S 是

$$S=\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{1+x'^2_y(y,\ z)+x'^2_z(y,\ z)}\,dydz \qquad (18.19)$$

若曲面 S 由方程 $y=y(z,\ x)$ 形式给出，其中函数 $y=y(z,\ x)$ 在其定义域 D_{zx} 上连续，且关于 z 和 x 的偏导数连续，则曲面 S 的面积 S 是

$$S=\iint\limits_{D_{zx}}\sqrt{1+y'^2_z(z,\ x)+y'^2_x(z,\ x)}\,dzdx \qquad (18.20)$$

例 1 求以 R 为半径的球的表面积 S。

解 设坐标原点为球心，则球面方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$。显然它关于三个坐标面皆对称，于是整个球的表面面积是第一卦限部分的八倍。第一卦限部分的球面方程为 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，$(x,y)\in D_{xy}$，D_{xy}：$x^2+y^2\leqslant 1$，且 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$

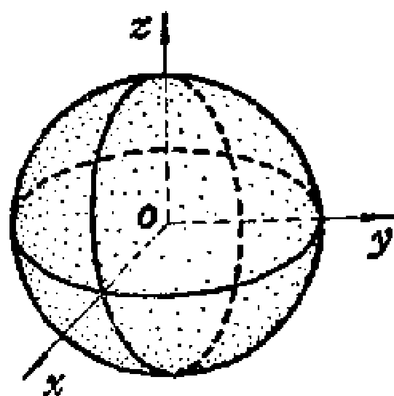


图18.33

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

从而

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

$$=\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2}$$

$$=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

代入到公式（18.18）中得

$$S=8\iint\limits_{D_{xy}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,dxdy$$

令

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad (|J| = r)$$

由公式（18.8），有

$$S = 8\iint\limits_{D'} \frac{Rr}{\sqrt{R^2 - r^2}}\, dr d\theta = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R \frac{Rr}{\sqrt{R^2 - r^2}}\, dr$$

$$= 8 \cdot \frac{\pi}{2} R(-\sqrt{R^2 - r^2})\Big|_0^R = 4\pi R^2$$

例 2　求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 含在圆柱面 $x^2 + y^2 = Rx$ 内部的面积（见图18.15）．

解　显然所求球面块关于 xy 面与 xz 面皆对称，从而所求的曲面块的面积是第一卦限的部分的四倍．在第一卦限的球面方程为 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$，从而

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的定义域 $D_{xy}: x^2 + y^2 \leqslant Rx$ 且 $x \geqslant 0, y \geqslant 0$．由公式，(18.18)并引入极坐标变换，有

$$S = 4\iint\limits_{D_{xy}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dxdy = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{R\cos\theta} \frac{Rr}{\sqrt{R^2 - r^2}}\, dr$$

$$= 4R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin\theta)d\theta = 4\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)R^2$$

二　物体的重心

设空间物体V在任意一点（x，y，z）的密度由连续函数$\rho(x, y, z)$来确定，求物体V的重心 $G(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$．

为了简单起见，采用微元法导出重心坐标公式．

先确定重心G的 x 坐标 $\bar{x}$．根据力学中的重心概念知，

物体各部分质量对平面的力矩总和等于物体的总质量集中于重心处对平面的力矩。

在V上任意一点 $P(x, y, z)$处取体积微元 dV，它的质量为 $\rho(x, y, z)dV$，而质量 $\rho(x, y, z)dV$ 对 yz 面的力矩为

$$dM_{yz} = x\rho(x, y, z)dV$$

从而
$$M_{yz} = \iiint_V x\rho(x, y, z)dV$$

已知物体V的总质量为

$$m = \iiint_V \rho(x, y, z)dV$$

根据重心的定义，有

$$\bar{x}\iiint_V \rho(x, y, z)\, dV = \iiint_V x\rho(x, y, z)dV$$

从而，有

$$\bar{x} = \frac{\iiint_V x\rho(x, y, z)dV}{\iiint_V \rho(x, y, z)dV} \tag{18.21}$$

同理，有

$$\bar{y} = \frac{\iiint_V y\rho(x, y, z)dV}{\iiint_V \rho(x, y, z)dV} \tag{18.22}$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint_V z\rho(x, y, z)dV}{\iiint_V \rho(x, y, z)dV} \tag{18.23}$$

如果物体是均匀的，即 ρ 为常数，则上述重心坐标公式变为

$$\bar{x}=\frac{\iiint\limits_{V} x dV}{V}, \quad \bar{y}=\frac{\iiint\limits_{V} y dV}{V}, \quad \bar{z}=\frac{\iiint\limits_{V} z dV}{V} \tag{18.24}$$

其中V是物体V的体积。

上述重心坐标公式，也适用于非均匀薄片的重心。此时，应将上述公式中的三重积分换为二重积分，空间区域V换为平面区域D，即

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_{D} x\rho(x, y)\, d\sigma}{\iint\limits_{D} \rho(x, y) d\sigma}, \quad \bar{y}=\frac{\iint\limits_{D} y\rho(x, y) d\sigma}{\iint\limits_{D} \rho(x, y) d\sigma} \tag{18.25}$$

例 3 求球心与锥体的顶点皆在原点，半径为 a，锥体中心轴为 z 轴，锥面与 z 轴正向交角为 α 的均匀球顶锥体的重心（如图18.34）。

解 由于球顶锥体关于 z 轴对称，因此

$$\bar{x}=\bar{y}=0$$

又密度 $\rho=$ 常数，故

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{V} z dx dy dz}{\iiint\limits_{V} dx dy dz}$$

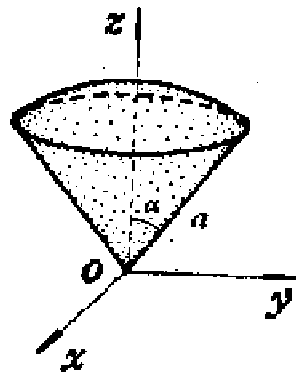


图18.34

用球面坐标替换，不难计算三重积分

$$\iiint\limits_{V} z dx dy dz=\iiint\limits_{V'} r\cos\varphi \cdot r^{2}\sin\varphi dr d\varphi d\theta$$

$$=\int_{0}^{2\pi} d\theta \int_{0}^{\alpha} d\varphi \int_{0}^{a} r^{3}\sin\varphi\cos\varphi dr=\frac{a^{4}\pi}{4}\sin^{2}\alpha$$

$$\iiint\limits_{V} dx dy dz=\int_{0}^{2\pi} d\theta \int_{0}^{\alpha} d\varphi \int_{0}^{a} r^{2}\sin\varphi dr$$

$$= 2\pi \cdot \frac{a^3}{3}(-\cos\varphi)\Big|_0^{\alpha} = \frac{2}{3}\pi a^3 \ (1-\cos\alpha)$$

于是 $$\bar{z} = \frac{\frac{a^4\pi}{4}\sin^2\alpha}{\frac{2}{3}\pi a^3(1-\cos\alpha)} = \frac{3}{8}\ (1+\cos\alpha)a$$

三 转动惯量

设质量为 m 的质点，到已知轴 l 的距离为 r，绕轴 l 旋转的角速度为 ω。因为质点的线速度为 $v=r\omega$，所以质点转动的动能为

$$E_{转} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(mr^2)\omega^2$$

上式中的 mr^2 称为质点对轴 l 的转动惯量，记作 I_l，即

$$I_l = mr^2$$

将质点 m 的转动动能 $E_{转}=\frac{1}{2}I_l\omega^2$ 与平动动能相比较，不难发现 I_l 与平动时的质量 m 相当，是质点在转动中惯性大小的量度。

下面我们利用三重积分的方法来讨论计算一般非均匀物体绕轴、点、面的转动惯量. 用微元法来讨论这个问题。

设物体V各点 (x, y, z) 的密度为 $\rho(x, y, z)$。在V中任取一点 $P(x, y, z)$ 及包含点P的体微元 dV，显然体微元的质量 $dm=\rho(x, y, z)dV$，体微元 dV 到 z 轴的距离为 $\sqrt{x^2+y^2}$，从而体微元对 z 轴的转动惯量是

$$dI_z = (x^2+y^2)\ \rho(x, y, z)dV$$

于是

$$I_z = \iiint\limits_V dI_z = \iiint\limits_V (x^2+y^2)\rho(x, y, z)dV \qquad (18.26)$$

同理有

$$I_x=\iiint\limits_V (y^2+z^2)\rho(x, y, z)dV \tag{18.27}$$

$$I_y=\iiint\limits_V (z^2+x^2)\ \rho(x, y, z)\ dV \tag{18.28}$$

若将 z 轴改为 xy 面，则体微元 dV 到 xy 面的距离为 $|z|$，从而体微元 dV 对 xy 面的转动惯量是

$$dI_{xy}=z^2\rho(x, y, z)dV$$

于是
$$I_{xy}=\iiint\limits_V dI_{xy}=\iiint\limits_V z^2\rho(x, y, z)dV \tag{18.29}$$

同理有

$$I_{yz}=\iiint\limits_V x^2\ \rho(x, y, z)\ dV \tag{18.30}$$

$$I_{zx}=\iiint\limits_V y^2\rho(x, y, z)dV \tag{18.31}$$

若换为原点O，则体微元 dV 到原点O的距离为 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，从而体微元 dV 对原点O的转动惯量是

$$dI_0=(x^2+y^2+z^2)\rho(x, y, z)dV$$

于是
$$I_0=\iiint\limits_V dI_0=\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\rho(x, y, z)dV \tag{18.32}$$

上述转动惯量公式，也适用非均匀薄片对 x 轴、y轴及原点O的转动惯量。它们是

$$\left.\begin{aligned} I_x&=\iint\limits_D y^2\rho(x, y)dxdy \\ I_y&=\iint\limits_D x^2\rho(x, y)dxdy \\ I_0&=\iint\limits_D (x^2+y^2)\rho(x,y)dxdy \end{aligned}\right\} \tag{18.33}$$

例 4 计算密度为ρ（常数）的均匀球体V：$x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$ 关于三个坐标轴及原点的转动惯量。

解 由公式(18.27)、(18.28)、(18.26)知，球体V关于x轴，y轴，z轴三个坐标轴的转动惯量分别是

$$I_x=\iiint\limits_V (y^2+z^2)\rho dV,\quad I_y=\iiint\limits_V (z^2+x^2)\rho dV,$$

$$I_z=\iiint\limits_V (x^2+y^2)\rho dV$$

因为球体关于三个坐标面对称，被积函数也是对 称 的，所 以 $I_z=I_y=I_y$，令 $I_x=I_y=I_z=I$，则

$$3I=\iiint\limits_V (y^2+z^2)\rho dV+\iiint\limits_V (z^2+x^2)\rho dV+\iiint\limits_V (x^2+y^2)\rho dV=\iiint\limits_V 2(x^2+y^2+z^2)\rho dV$$

从而，$I=\dfrac{2}{3}\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\rho dV$

用球面坐标替换，有

$$\begin{aligned}I&=\frac{2\rho}{3}\iiint\limits_{V'} r^2\cdot r^2\sin\varphi dr d\varphi d\theta\\&=\frac{2\rho}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^a r^4\sin\varphi dr\\&=\frac{2\rho a^5}{15}\cdot 2\pi\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\\&=\frac{8\pi a^5\rho}{15}\end{aligned}$$

即 $I_x=I_y=I_z=\dfrac{8\pi a^5\rho}{15}$.

$$I_0=\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dV=\frac{3}{2}I=\frac{3}{2}\cdot\frac{8\pi a^5\rho}{15}=\frac{4}{5}\pi a^5\rho$$

学习指导

一　内容概要

1.　重点及要求

本章的重点是二重积分和三重积分的概念及其计算——将二重积分、三重积分化为累次积分，由于二重积分与三重积分的性质皆与定积分是平行的，因此本章只列出结果，而未加证明。

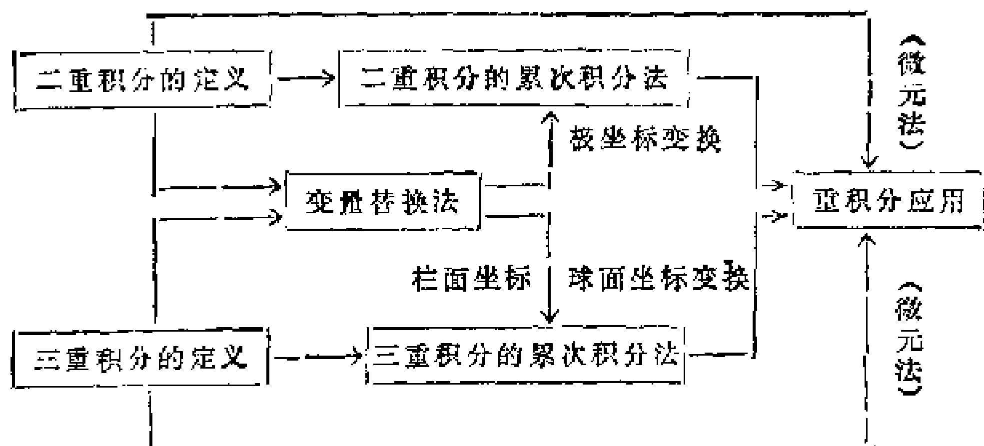
要掌握重积分化为累次积分的条件。通常画出重积分的区域，对安置积分限是很方便的。因此读者必须掌握平面与立体解析几何中的典型曲线与曲面方程。

在§18.3 中所提到的二重积分的变量替换，是计算许多较复杂的二重积分的非常有效的方法，尤其是极坐标变量替换公式，是计算积分区域是圆域或圆域的一部分以及被积函数中含有 x^2+y^2 的二重积分经常使用的好方法。在§18.5中讲到的三重积分的变量替换，特别是柱面坐标和球面坐标替换是计算三重积分主要方法。

重积分的应用与定积分的应用也是平行的。这里仅给出曲面面积、物体重心坐标以及转动惯量的计算方法。

本章的重点是计算，要求读者多做一些计算题，以达到熟练掌握计算重积分的方法。

2．本章的总体结构关系



二 几点说明

1 二重积分的定义

在二重积分的定义中，特别强调了分法T和点(ξ_i, η_i)的取法的任意性，这是必要的。一元函数定积分的定义中，分法T的任意性只是在区间内任意地加分点，而重积分对区域的分法可以是多种多样的（如两组互相垂直的直线，即直角坐标网，用一组同心圆和一组从原点出发的射线，即极坐标网等）当我们已知重积分存在时，就可选取特殊的分法T与特殊的点(ξ_i, η_i)，可使我们较容易地计算出二重积分。

在对积分和取极限时，用$d(T)\to 0$来刻划分法T的精细程度，这是必要的。在一元函数的定积分的定义中，我们用小区间的长度$\lambda(T)$来刻划分法T的精细程度。这里，由于积分域是平面上的区域，因此分法T的精细程度用分割后每个小区域内任意两点的距离都很小来描述，即用分法T所对应的n个小区域的n个直径的最大值（最大直径）无限变小来描述。

2 对极坐标变量替换公式(18.8)的说明

若在区域D'上含有直线$r=0$ $(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$和直线$\theta=2\pi$ $(0<r\leqslant a)$时，极坐标变换(18.7)当$r=0$时，$J=r=0$且不能使D'与D一一对应，从而不满足定理18.8的条件。为此，我们考虑闭区域$D'_{\rho\varepsilon}$：$0<\rho\leqslant r\leqslant R$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi-\varepsilon$，其中$\rho$和$\varepsilon$皆为很小的正数。这时极坐标变换可把$D'_{\rho\varepsilon}$映射成为$xy$面上的闭区域$D_{\rho\varepsilon}$（如图18.35）。在$D'_{\rho\varepsilon}$上，$J\neq 0$，且使$D'_{\rho\varepsilon}$与$D_{\rho\varepsilon}$之间是一一对应的。于是，变量替换(18.8)在闭区域$D'_{\rho\varepsilon}$上成立，即

$$\iint\limits_{D_{\rho\varepsilon}} f(x, y)dxdy=\iint\limits_{D'_{\rho\varepsilon}} f[r\cos\theta, r\sin\theta]rdrd\theta$$

令$\rho\to 0$，$\varepsilon\to 0$，对上式取极限得

$$\iint\limits_{D} f(x, y)dxdy=\iint\limits_{D'} f[r\cos\theta, r\sin\theta]rdrd\theta$$

这说明极坐标变量替换公式(18.8)对含有直线段 $r=0$ ($0\leqslant\theta\leqslant2\pi$)和直线段 $\theta=2\pi$ ($0<r\leqslant a$)的区域 D' 仍然适用。

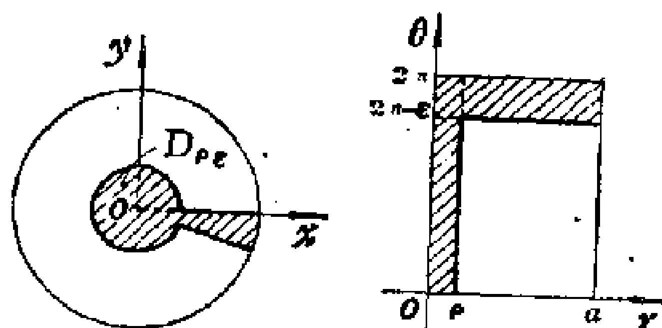


图18.35

三 例题选讲

例 1 用二重积分的定义，计算二重积分

$$\iint_D xy\,dxdy,\quad D=\{(x,\ y)\mid 0\leqslant x\leqslant1,\ 0\leqslant y\leqslant1\}$$

解 将正方形区域 $R[0,\ 1;\ 0,\ 1]$ 用直线组 $x=\dfrac{i}{n}$ $y=\dfrac{j}{n}$ $(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$分成 n^2 个相等的小正方形

$$\begin{array}{llll} R_{11}, & R_{12}, & \cdots, & R_{1n} \\ R_{21}, & R_{22}, & \cdots, & R_{2n} \\ \cdots\cdots & & & \\ R_{n1}, & R_{n2}, & \cdots, & R_{nn} \end{array}$$

每个小正方形的面积为 $\Delta R_{ij}=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{n^2}(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，在每个小正方形区域上皆取右上顶点$(\xi_i,\ \eta_j)$。于是，$f(\xi_i,\ \eta_j)=\dfrac{i}{n}\cdot\dfrac{j}{n}$，从而

$$S_{nn}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\ \eta_j)\ \Delta R_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\cdot\frac{j}{n}\cdot\frac{1}{n^2}$$

$$=\frac{1}{n^4}\sum_{j=1}^{n} j\cdot\sum_{i=1}^{n} i=\frac{1}{n^4}\sum_{j=1}^{n} j\,\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{1}{n^4}\cdot\sum_{j=1}^{n} j=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{n^4}=\frac{(n+1)^2}{4n^2}$$

对上述积分和取极限，有

$$\iint_D xydxdy=\lim_{n\to\infty} S_{nn}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{4n^2}=\frac{1}{4}$$

例 2 假设 $f(x)$在$[a, b]$和$[\alpha,\beta]$上连续，试用定义证明

$$\iint_R f_1(x)f_2(y)dxdy=\int_a^b f_1(x)dx\int_\alpha^\beta f_2(y)dy$$

其中R为矩形 $[a, b; \alpha, \beta]$。

证明 在(a, b)内插入 $m-1$个分点：

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{m-1}<x_m=b$$

将$[a, b]$分成 m 个小区间. 又在(α, β)内插入 $n-1$个分点：

$$\alpha=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_{n-1}<y_n=\beta$$

将$[\alpha, \beta]$分成 n 个小区间. 过 x_i 及 y_j 分别作平行 y 轴和 x 轴的直线 $x=x_i$ $(i=1, 2, \cdots, m-1,)$ $y=y_j$ $(j=1, 2, \cdots, n-1)$. 从而将矩形R分为 mn 个小矩形 R_{ij} $(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$。

设 $f(x, y)=f_1(x)f_2(y)$在 R_{ij} 的上确界和下确界分别为 M_{ij} 和 m_{ij}，又设 ξ_i 为 $[x_{i-1}, x_i]$上任意一点，则

$$m_{ij}\,\Delta y_j\leqslant\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)dy\leqslant M_{ij}\Delta y_j$$

令 $j=1, 2, \cdots, n$ 然后相加得

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\,\Delta y_j\leqslant\sum_{j=1}^{n}\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)dy\leqslant\sum_{j=1}^{n} M_{ij}\,\Delta y_j$$

将上式各项乘以 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，再令 $i=1, 2, \cdots, m$ 然后相加得

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\Delta x_i\Delta y_j \leqslant \sum_{i=1}^{m}\Delta x_i \int_{\alpha}^{\beta} f(\xi_i, y)dy$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}\ \Delta x_i\Delta y_j \tag{1}$$

设$d(T)$为 mn 个小矩形 R_{ij} 中的最大直径，则当$d(T)\to 0$时，由（1）式有

$$\lim_{d(T)\to 0}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\Delta x_i\Delta y_j \leqslant \lim_{d(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\int_{\alpha}^{\beta} f(\xi_i, y)\ dy$$

$$\leqslant \lim_{d(T)\to 0}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}\ \Delta x_i\Delta y_j$$

即 $$\iint_R f(x, y)dxdy \leqslant \int_a^b dx\int_{\alpha}^{\beta} f(x, y)dy \leqslant \iint_R f(x, y)dxdy$$

从而

$$\iint_R f(x, y)dxdy = \int_a^b dx\int_{\alpha}^{\beta} f_1(x)f_2(y)dy$$

$$= \int_a^b f_1(x)\ dx\int_{\alpha}^{\beta} f_2(y)dy$$

例 3　利用中值定理，估计积分

$$I = \iint_{|x|+|y|\leqslant 10} \frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\ dxdy$$

之值。

基本思路　求出被积函数在积分域上的最大值和最小值，再利用积分不等式。

解　设 $D=\{(x, y)\mid |x|+|y|\leqslant 10\}$（如图18.36），对任意$(x, y)\in D$，有

$$\frac{1}{102}\leqslant\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\leqslant\frac{1}{100}$$

根据积分不等式，有

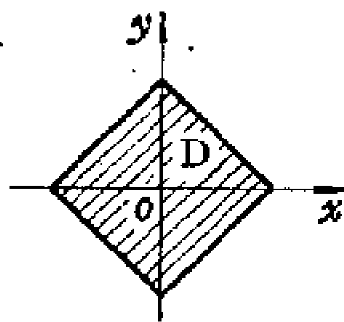


图18.36

$$\iint_D \frac{1}{102}\,dxdy \leqslant \iint_D \frac{dxdy}{100+\cos^2x+\cos^2y} \leqslant \iint_D \frac{1}{100}\,dxdy$$

而 $$\iint_D \frac{1}{102}dxdy = \frac{1}{102}(10\sqrt{2})^2 = \frac{200}{102} \approx 1.96$$

$$\iint_D \frac{1}{100}dxdy = \frac{1}{100}(10\sqrt{2})^2 = \frac{200}{100} = 2$$

于是，有 $1.96 < I < 2$

例 4　求由直线 $\theta=0$，圆 $r=3$，$r=4$ 和曲线 $r=5\sin 2\theta$ 在第一象限内所围成的面积（如图18.37）。

解　由二重积分的几何意义知，

$$S = \iint_D dxdy$$

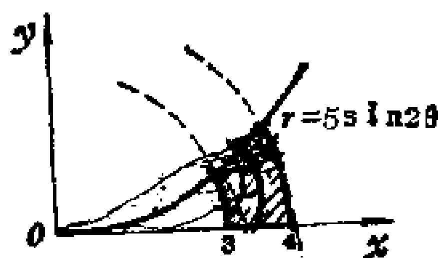


图18.37

考虑区域 D 的特点，引入极坐标变换，并先对 θ 积分简单. 对 θ 积分是沿圆弧从小角 $\theta=0$ 到大角 $\theta=\frac{1}{2}\arcsin\frac{r}{5}$（由曲线 $r=5\sin 2\theta$ 解出）；后对 r 积分，从里端 $r=3$ 积到外端 $r=4$，于是，有

$$S = \iint_{D'} r\,dr\,d\theta = \int_3^4 dr \int_0^{\frac{1}{2}\arcsin\frac{r}{5}} r\,d\theta = \int_3^4 r\frac{1}{2}\arcsin\frac{r}{5}dr$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{r^2}{2}-\frac{25}{4}\right)\arcsin\frac{r}{5} + \frac{r}{4}\sqrt{25-r^2}\right]_3^4 dr$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{7}{4}\arcsin\frac{4}{5} + \frac{7}{4}\arcsin\frac{3}{5}\right]$$

$$= \frac{7}{8}\left(\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{3}{5}\right) = \frac{7\pi}{16}$$

例 5　设区域 D_1 为双纽线 $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$ 所围成，区域 D_2 为圆 $x^2+y^2=a^2$ 所围成（$a>0$），求区域 $D=D_1\cap D_2$ 的面积。

基本思路　利用二重积分求面积，并用极坐标变量替换，

所求区域D的面积等于区域D_1的面积减去不在圆内部分的面积（如图18.38）．

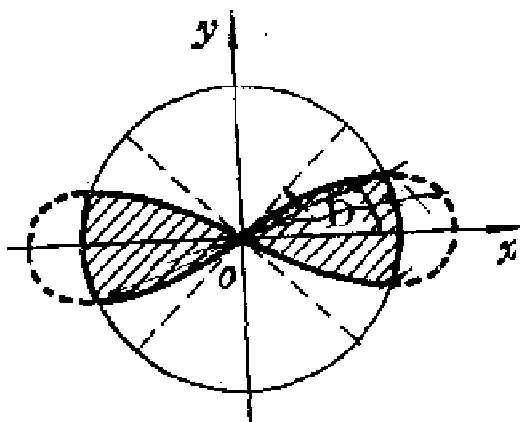


图18.38

解 首先将双纽线 $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$和圆$x^2+y^2=a^2$ 变换为极坐标方程：

$$r=\sqrt{2}\,a(\cos 2\theta)^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

$$r=a \quad (3)$$

将（3）代入（2）中，得圆和双纽线的交点的极角

$$\theta=\pm\frac{\pi}{6}$$

从图18.38不难看出，区域D的面积S是双纽线围成的区域的面积，减去双纽线围成的区域在圆外部分的面积．又因为区域D关于x轴和y轴皆对称，所以

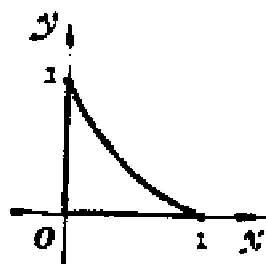
$$S=4\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sqrt{2}\,a(\cos 2\theta)^{\frac{1}{2}}}rdr-\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta\int_a^{\sqrt{2}\,a(\cos 2\theta)^{\frac{1}{2}}}rdr\right]$$

$$=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta d\theta-4a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\cos 2\theta-\frac{1}{2}\right)d\theta$$

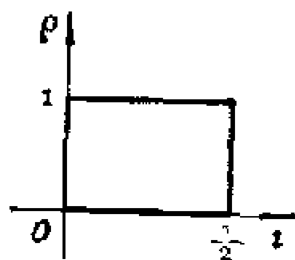
$$=2a^2-\sqrt{3}\,a^2+\frac{a^2\pi}{3}=\left(2+\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\right)a^2$$

例 6 用适当的变换计算积分

$$\iint_D(\sqrt{x}+\sqrt{y})\,dxdy$$



(a)



(b)

图18.39

其中D是由坐标轴和抛物线$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$所围成(如图18.39)。

解　令 $\begin{cases} x=\rho\cos^4 t \\ y=\rho\sin^4 t\left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

$$J=\frac{D(x,\ y)}{D(\rho,\ t)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos^4 t & -4\rho\cos^3 t\sin t \\ \sin^4 t & 4\rho\sin^3 t\cos t \end{vmatrix}$$

$$=4\rho\cos^3 t\sin^3 t$$

$$|J|=4\rho\cos^3 t\sin^3 t$$

于是，

$$\iint_D(\sqrt{x}+\sqrt{y})dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt\int_0^1(\sqrt{\rho\cos^4 t}+\sqrt{\rho\sin^4 t})\ 4\rho\cos^3 t\sin^3 t d\rho$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt\int_0^1 4\rho^{\frac{3}{2}}\cos^3 t\sin^3 t dt=4\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{5}\sin^3 t\cos^3 t dt=\frac{2}{15}$$

例 7　进行适当的变量替换，将二重积分$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}f(x+y)dxdy$化为定积分。

基本思路　根据被积函数来确定变换中的一个函数$u=x+y$，另一个函数由区域（如图18.40）来确定，即令$v=x-y$。

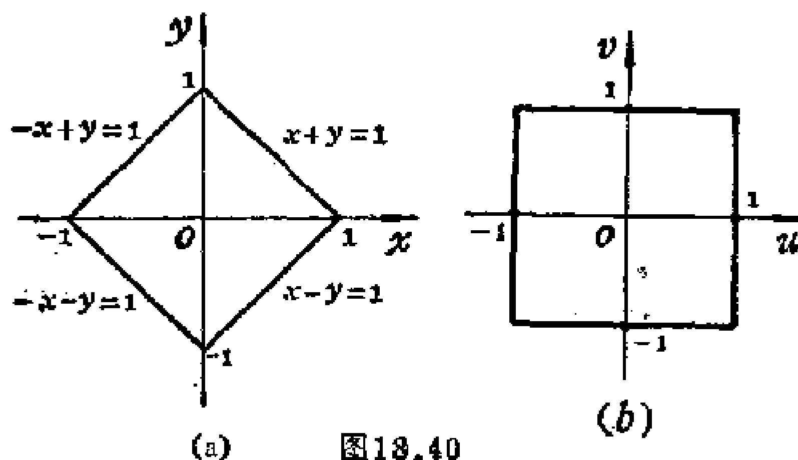


图18.40

解 令 $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$ （4）

其逆变换为 $\begin{cases} x = \frac{1}{2}(u + v) \\ y = \frac{1}{2}(u - v). \end{cases}$

变换（4）将区域D的边界线 $x+y=\pm 1$，$x-y=\pm 1$，变换为区域 D' 的边界 $u=\pm 1$，$v=\pm 1$。因为

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2},\ |J| = \frac{1}{2}$$

所以，根据变量替换公式（18.6），有

$$\iint\limits_D f(x+y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(u)|J|dudv$$

$$= \int_{-1}^{1} dv \int_{-1}^{1} f(u) \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(u) du \int_{-1}^{1} dv$$

$$= \int_{-1}^{1} f(u) du$$

例 8 计算被积函数 $f(x, y)$为不连续函数$[x+y]$的二重积分

$$I = \iint\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 \leqslant y \leqslant 2}} [x+y] dxdy$$

基本思路 将区域D分为四个小区域，使其函数在每个小区域内恒为常值（边界线除外），然后再根据积分关于区域的可加性，即可求出此二重积分的值。

解 将区域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$分为四个小区域 D_1, D_2, D_3, D_4（如图18.41），由二重积分关于积分区域的可加性，有

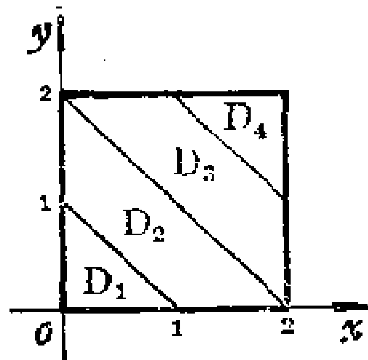


图18.41

$$I=\iint_D [x+y] dxdy=\iint_{D_1} 0dxdy+\iint_{D_2} dxdy$$

$$+\iint_{D_3} 2dxdy+\iint_{D_4} 3dxdy$$

$=D_2$ 的面积 + 2 倍 D_3 的面积 + 3 倍 D_4 的面积

$=3[D_3$ 的面积 $+D_4$ 的面积$]=6$

例 9 计算曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，和 $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ 所围成的立体的体积。

基本思路 用广义极坐标变量替换，积分域是由双纽线 $r=(\cos 2\theta)^{\frac{1}{2}}$ 所围成的（如图18.42）。根据二重积分的几何意义和所求立体关于三个坐标面的对称性，即可求出它的体积。

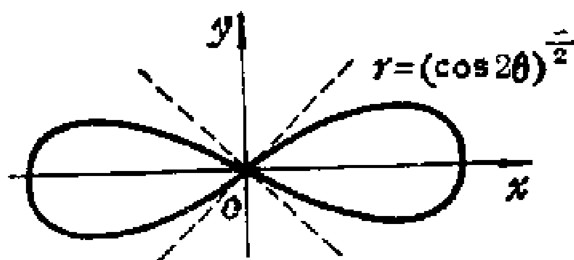


图18.42

解 由二重积分的几何意义及对称性，有

$$V=8\iint_D c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\, dxdy$$

令 $x=ar\cos\theta$，$y=br\sin\theta$，$|J|=abr$。在广义极坐标下曲线 $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ 变为双纽线 $r^2=\cos 2\theta$。积分区域 D 在第一象限部分为由双纽线和极轴所围成。于是，有

$$V=8abc\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}}\sqrt{1-r^2}\cdot rdr$$

$$=\frac{8abc}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} [1-(1-\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}}]\, d\theta$$

$$=\frac{8abc}{3}\left[\frac{\pi}{4}-2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\theta d\theta\right]$$

$$=\frac{8abc}{3}\left[\frac{\pi}{4}+2\sqrt{2}\left(\cos\theta-\frac{\cos^3\theta}{3}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{2abc}{9}\left[3\pi+20-16\sqrt{2}\right]$$

例10 将累次积分

$$I=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_0^x f(x,\ y\ z)dz$$

按先对 x，后对 y，最后对 z 积分的顺序来配置积分限。

基本思路 按先 x 后 y，最后对 z 积分，就是要把积分区域看成 x—型区域，并把投影区域 D_{yz} 看成 y— 型区域。为此，根据积分限，确定积分域，并根据积分域重新按要求配置积分限。

解 由图18.43看出，区域D是由后面$x=z$(平面)，前面$x=\sqrt{1-y^2}$，及坐标面 $y=0$及 $z=0$围成，其投影区域 D_{yz} 是圆 $y=\sqrt{1-z^2}$及y 轴、z 轴所围成的 x—型区域。投影域为y—型。于是，有

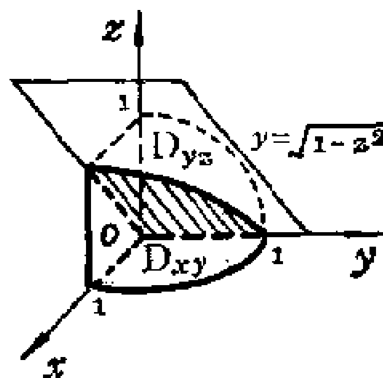


图18.43

$$I=\int_0^1 dz\int_0^{\sqrt{1-z^2}}dy\int_z^{\sqrt{1-y^2}}f(x,\ y,\ z)dx$$

例11 将三重积分

$$I=\int_0^a dx\int_0^x dy\int_0^y f(z)dz$$

化为定积分（一重积分）．

解 从图18.44看到，积分域V是由 $z=0$, $z=y$, $y=x$和$x=a$ 四个平面围成的四面体．将V视为 x—型区域，其投影区域

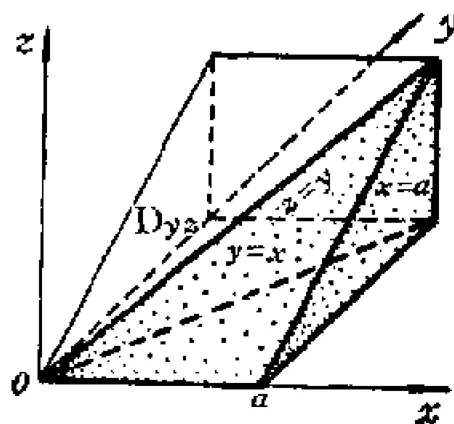


图18.44

D_{yz} 可看成 y—型区域．于是，有

$$I=\int_0^a dz\int_z^a dy\int_y^a f(z)dx=\int_0^a dz\int_z^a (a-y)f(z)dy$$

$$=\int_0^a\left[a^2f(z)-azf(z)+\frac{z^2-a^2}{2}f(z)\right]dz$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^a (a-z)^2f(z)dz$$

例12　计算三重积分

$$I=\iiint\limits_V xy^2z^3dxdydz$$

其中V是由曲面　$z=xy$（称为马鞍面），平面 $y=x$，$x=1$，$z=0$ 所围成的区域。

解　由图18.45看出，积分区域V是由底面 $z=0$，顶面 $z=xy$（马鞍面）侧面 $x=1$ 及 $y=x$所围成的z—型区域。投影区域D_{xy} 是由 $y=x$，$x=1$ 及 $y=0$ 所围成的三角形区域．于是，有

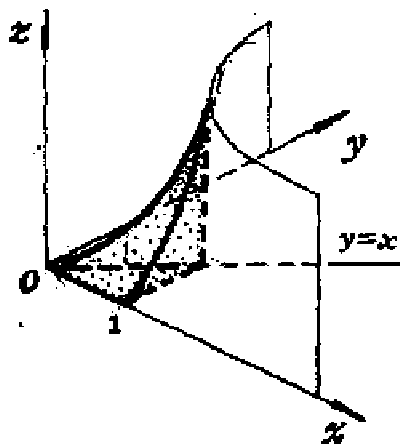


图18.45

$$I=\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^{xy} xy^2z^3dz$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x \frac{1}{4}x^5y^6dy=\int_0^1\frac{1}{28}x^{12}dx=\frac{1}{364}$$

例13　计算三重积分

$$I=\iiint\limits_V x^2dxdydz$$

其中V是由曲面 $z=ay^2$，$z=by^2$，$y>0$（$0<a<b$），$z=\alpha x$，$z=\beta x$（$0<\alpha<\beta$），$z=h$（$h>0$）所围成的区域。

基本思路　为了使积分区域变得简单，须作变量替换．要使二曲面 $z=ay^2$，$z=by^2$（$0<a<b$）映射成平面 $v=\frac{1}{a}$，$v=\frac{1}{b}$，把平面 $z=\alpha x$，$z=\beta x$（$0<\alpha<\beta$）映射为平面

$u=\dfrac{1}{\alpha}$，$u=\dfrac{1}{\beta}$。为此，作变换

$$\begin{cases} u=\dfrac{x}{z} \\ v=\dfrac{y^2}{z} \\ w=z \end{cases} \quad \text{其逆变换为} \quad \begin{cases} x=uw \\ y=\sqrt{vw} \\ z=w \end{cases}$$

然后用变量替换公式。

解 令 $x=uw$，$y=\sqrt{vw}$，$z=w$

$$J=\frac{D(x,\ y,\ z)}{D(u,\ v,\ w)}=\begin{vmatrix} w & 0 & u \\ 0 & \dfrac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}}w^{\frac{1}{2}} & \dfrac{1}{2}v^{\frac{1}{2}}w^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}}w^{\frac{3}{2}}$$

其逆变换为 $u=\dfrac{x}{z}$，$v=\dfrac{y^2}{z}$，$w=z$，它将 xyz 空间中的曲面 $z=ay^2$，$z=by^2$，$z=\alpha x$，$z=\beta x$，$z=h$依次变换为 u，v，w空间中的平面 $v=\dfrac{1}{a}$，$v=\dfrac{1}{b}$，$u=\dfrac{1}{\alpha}$，$u=\dfrac{1}{\beta}$，$w=h$。于是，根据变量替换公式(18.13)，有

$$\iiint\limits_V x^2dxdydz$$

$$=\int_0^h dw\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}}dv\int_{\frac{1}{\beta}}^{\frac{1}{\alpha}}u^2w^2\frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}}w^{\frac{3}{2}}du$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^h dw\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}}dv\int_{\frac{1}{\beta}}^{\frac{1}{\alpha}}u^2v^{-\frac{1}{2}}w^{\frac{7}{2}}du$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9}\cdot w^{\frac{9}{2}}\Big|_0^h\cdot 2v^{\frac{1}{2}}\Big|_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}}\cdot\frac{1}{3}u^3\Big|_{\frac{1}{\beta}}^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$=\frac{2}{27}h^{\frac{9}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)\left(\frac{1}{\alpha^3}-\frac{1}{\beta^3}\right)$$

例14　计算封闭曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^4}{c^4}=1$（$a>0$，$b>0$，$c>0$）所围成的立体的体积。

解　显然此封闭曲面所围成的立体关于三个坐标面皆对称，因此它的体积V是第一挂限部分以$z=c\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{4}}$为曲顶的曲顶柱体体积的8倍。根据二重积分的几何意义，有

$$V=8c\iint_D\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{4}}dxdy$$

令 $x=ar\cos\theta$，$y=br\sin\theta$，则$|J|=abr$。于是，有

$$V=8abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1(1-r^2)^{\frac{1}{4}}rdr$$

$$=8abc\cdot\frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}(1-r^2)^{\frac{5}{4}}\right]\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{8\pi abc}{5}$$

例15　计算二球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$，$x^2+y^2+z^2=b^2$和锥面$x^2+y^2=z^2$（$z\geqslant0$）所围成的立体的体积（$0<a<b$）。

解　用球面坐标变换，球面与锥面分别化为 $r=a,r=b$和$\varphi=\frac{\pi}{4}$。于是，有

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_a^b r^2\sin\varphi dr=\frac{4}{3}(b^3-a^3)\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi$$

$$=\frac{4}{3}(b^3-a^3)\frac{\pi}{2}[-\cos\varphi]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{(2-\sqrt{2})(b^3-a^3)\pi}{3}$$

例16　计算封闭曲面$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x}{h}$所围成的立体的体积。

解　由于此封闭曲面仅含有 y 的平方项和 z 的平方项，

因此关于 xz 面与 xy 面对称。从而所求立体的体积为第一挂限的4倍，即

$$V=4\iiint\limits_{V_1}dxdydz$$

其中 V_1 是立体在第一挂限的部分。

令 $\begin{cases} x=ar\cos\theta\sin\varphi \\ y=br\sin\theta\sin\varphi \\ z=cr\cos\theta \end{cases}$ $\quad |J|=abcr^2\sin\varphi$

在广义球坐标下的曲面方程为 $r^3=\frac{a}{h}\cos\theta\sin\varphi$，即

$$r=\left(\frac{a}{h}\right)^{\frac{1}{3}}(\cos\theta\sin\varphi)^{\frac{1}{3}}$$

由变量替换公式(18.13)，有

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\left(\frac{a}{h}\right)^{\frac{1}{3}}(\cos\theta\sin\varphi)^{\frac{1}{3}}}abcr^2\sin\varphi dr$$

$$=\frac{4abc}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a}{h}\cos\theta\sin^2\varphi d\varphi$$

$$=\frac{4a^2bc}{3h}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos2\varphi}{2}d\varphi=\frac{\pi a^2bc}{3h}$$

例17 求曲面 $z^2=2xy$ 被平面 $x+y=1$，$x=0$，$y=0$所截下部分的面积。

解 由于曲面 $z^2=2xy$ 被割下的那部分关于 xy面对称，于是，所求面积应是第一卦限部分的面积的二倍。

由 $z^2=2xy$ 得 $z=\sqrt{2xy}$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\sqrt{\frac{y}{2x}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\sqrt{\frac{x}{2y}}$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{y}{2x}+\frac{x}{2y}}$$

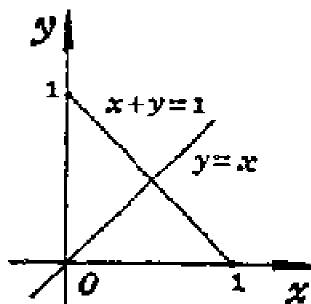


图18.46

$$=\sqrt{\frac{(x+y)^2}{2xy}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)$$

由公式(18.18)，有

$$S=2\iint_D \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)\,dxdy$$

又因为被积函数与积分区域的边界曲线中的 x 与 y 是对称的（如图18.46），所以

$$S=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot 2\cdot\iint_D\sqrt{\frac{x}{y}}\,dxdy=2\sqrt{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\,dy$$

$$=4\sqrt{2}\int_0^1\sqrt{x(1-x)}\,dx=4\sqrt{2}\int_0^1\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,dx$$

$$=4\sqrt{2}\left[\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{x(1-x)}}{2}+\frac{1}{8}\arcsin\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right]\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{2}$$

例18　求曲线 $r=a(1+\cos\theta),\theta=0$ 所围成的均匀薄板的重心（如图18.47）.

解　为了简单起见，不妨设薄板的面密度 $\rho(x,\ y)=1$。于是，有

$$S=\iint_D\rho dxdy=\iint_D dxdy$$

$$=\int_0^\pi d\theta\int_0^{a(1+\cos\theta)}rdr$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^\pi(1+\cos\theta)^2d\theta=\frac{3\pi a^2}{4}$$

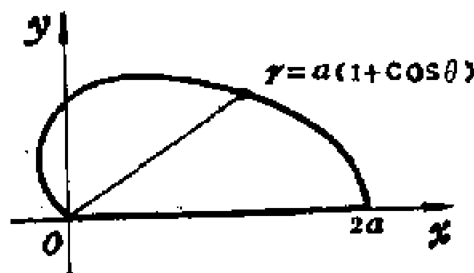


图18.47

$$\iint_D y\rho(x,\ y)dxdy=\int_0^\pi d\theta\int_0^{a(1+\cos\theta)}r\sin\theta\cdot rdr$$

$$=\frac{a^3}{3}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^3\sin\theta d\theta=\frac{a^3}{3}\left[-\frac{(1+\cos\theta)^4}{4}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{4a^3}{3}$$

$$\iint_D x\rho(x,\ y)dxdy=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{a(1+\cos\theta)}r\cos\theta\cdot rdr$$

$$=\frac{a^3}{3}\int_0^{\pi}[\cos\theta+3\cos^2\theta+3\cos^3\theta+\cos^4\theta]d\theta$$

$$=\frac{a^3}{3}[\sin\theta+3\sin\theta-\sin^3\theta]\Big|_0^{\pi}$$

$$+\frac{a^3}{3}\int_0^{\pi}\left\{3\ \frac{1+\cos2\theta}{2}+\left[\frac{1+\cos2\theta}{2}\right]^2\right\}d\theta$$

$$=\frac{a^3}{2}\pi+\frac{a^3}{3}\cdot\frac{3}{8}\pi=\frac{5\pi a^3}{8}$$

由公式(18.25)，有

$$\bar{x}=\frac{\frac{5\pi a^3}{8}}{\frac{3\pi a^2}{4}}=\frac{5a}{6},\quad \bar{y}=\frac{\frac{4a^3}{3}}{\frac{3\pi a^2}{4}}=\frac{16a}{9\pi}$$

习　题

§18.1

1　估计下列二重积分的值：

（1）$\iint\limits_D(x^2+4y^2+9)d\sigma$，其中$D$是圆 $x^2+y^2\leqslant4$；

（2）$\iint\limits_D(x+y+1)d\sigma$，其中$D$是矩形 $0\leqslant x\leqslant1$，$0\leqslant y\leqslant2$。

§18.2

2　计算下列二重积分：

（2）$\iint\limits_D x^2ydxdy$，其中D是矩形 $0\leqslant x\leqslant1$，$-1\leqslant y\leqslant1$；

（2） $\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}\,dxdy$，其中$D$是矩形 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$；

（3） $\iint\limits_D \frac{1}{2}(2-x-y)\,dxdy$，其中$D$是由曲线 $y=x$，$y=x^2$所围成的区域；

（4） $\iint\limits_D e^{-y^2}\,dxdy$，其中$D$是以点$(0,0)$，$(1,1)$，$(0,1)$为顶点的三角形；

（5） $\iint\limits_D 6x^2y^2\,dxdy$，其中$D$是由 $y=x$，$y=-x$ 及 $y=2-x^2$所围成的在 x 轴上方的区域；

（6） $\iint\limits_D \frac{x}{y+1}\,dxdy$，其中$D$是由 $y=x^2+1$，$y=2x$，$x=0$ 所围成的区域。

3　将下列各积分改变积分次序：

（1） $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,\ y)\,dx$；

（2） $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,\ y)\,dy$；

（3） $\int_{-6}^2 dx\int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)\,dy$；

（4） $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,\ y)\,dy+\int_1^3 dx\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,\ y)\,dy$。

§18.3

4　利用极坐标替换公式计算下列二重积分：

（1） $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$，其中 D：$x^2+y^2\leqslant a^2$；

（2） $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$，其中 D：$\pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2$；

（3） $\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$，其中$D$：$x^2+y^2\leqslant 1$；

（4） $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy$，其中 D：$x^2+y^2\leqslant ax$；

(5) $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$，其中 D：$x^2+y^2\leqslant by$；

(6) $\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)\ dxdy$，其中 D：$x^2+y^2\leqslant 1$在第一象限的部分。

5 用适当的变量替换计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\ dxdy$，其中$D$是由椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$所围成的区域；

(2) $\iint\limits_D \left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^3\ dxdy$，其中$D$是由抛物线 $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$及坐标轴所围成的区域。

6 计算下列曲线所包围的面积：

(1) $xy=a^2$，$x+y=\frac{5}{2}a\ (a>0)$；

(2) $(x-y)^2+x^2=a^2\ (a>0)$；

(3) $(x^2+y^2)^2=a(x^3-3xy^2)\ (a>0)$。

7 进行适当的变量替换，求下列曲线所包围的面积：

(1) $x+y=a$，$x+y=b$，$y=\alpha x$，$y=\beta x\ (0<a<b；0<\alpha<\beta)$；

(2) $xy=a^2$，$xy=2a^2$，$y=x$，$y=2x\ (x>0；y>0)$。

8 进行适当的变换，将下列二重积分化为定积分（一重积分）：

(1) $\iint\limits_D f(x,\ y)dxdy$，其中$D$为由曲线 $xy=1$，$xy=2$及直线$y=x$，$y=4x\ (x>0,\ y>0)$所围成的区域；

(2) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(ax+by+c)dxdy\ (a^2+b^2\neq 0)$。

9 计算下列二重积分所表示的曲顶柱体的体积：

(1) $\iint\limits_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leqslant 1} \sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}\ dxdy$；(2) $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} (x^2+y^2)dxdy$；

（3）$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant x} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$。

10　计算下列曲面所包围立体的体积：

（1）　$z=e^{-(x^2+y^2)}$，$z=0$，$x^2+y^2=R^2$；

（2）　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}$ $(z>0)$；

（3）　$z=x^2+y^2$，$xy=a^2$，$xy=2a^2$，$y=\dfrac{x}{2}$，$y=2x$，$z=0$；

（4）　$z=xy$，$x^2=y$，$x^2=2y$，$y^2=x$，$y^2=2x$，$z=0$。

§18.4

11　计算下列三重积分：

（1）　$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$，其中 V 是由曲面 $x^2+y^2=z^2$，$z=1$ 所围成的区域；

（2）　$\iiint\limits_V z^2 dxdydz$，其中 V 是两个球 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$，$x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz$ 的公共部分；

（3）　$\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$，其中 V 是椭球体 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1$。

12　将下列三重积分重新配置积分限：

（1）　$\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z)\,dz$；

（2）　$\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{x+y} f(x,y,z)\,dz$。

§18.5

13　利用柱面坐标或球面坐标计算下列三重积分：

（1）　$\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dxdydz$，其中 V 是由曲面 $x^2+y^2=2z$ 及平面 $z=2$ 所围成的区域；

（2）　$\iiint\limits_V xy\,dxdydz$，其中 V 是由圆柱面 $x^2+y^2=1$ 及 $z=1$，

$z=0$，$x=0$，$y=0$所围成的位于第一卦限部分的区域；

（3）$\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$，其中 V 是由柱面 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 及平面 $z=0$，$z=a$ $(a>0)$，$y=0$所围成的区域；

（4）$\iiint\limits_V xyzdxdydz$，其中 V 是由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 及平面 $x=0$，$y=0$，$z=0$所围成的在第一卦限内的区域；

（5）$\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$，其中 V 是由两个半球面

$z=\sqrt{A^2-x^2-y^2}$，$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ $(A>a>0)$及平面 $z=0$所围成的区域；

（6）$\iiint\limits_V \frac{1}{x^2+y^2+1}\,dxdydz$，其中 V 是锥面 $x^2+y^2=z^2$及平面 $z=1$ 所围成的区域；

（7）$\iiint\limits_V \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dxdydz$，其中 V 是由球面 $x^2+y^2+z^2=2az$所围成的区域；

（8）$\iiint\limits_V \frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\,dxdydz$，其中 V 是由球面 $x^2+y^2+z^2=1$所围成的区域。

14　计算下列曲面所包围立体的体积：

（1）$z=6-x^2-y^2$，$z=\sqrt{x^2+y^2}$；

（2）$x^2+y^2+z^2=2az$，$x^2+y^2\leqslant z^2$；

（3）$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2)$；

（4）$(x^2+y^2+z^2)^3=3xyz$；

（5）$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$。

§18.6

15　求下列曲面的面积：

（1）曲面 S 是平面$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 被三个坐标面所割下

的部分（$a>0$，$b>0$，$c>0$）；

（2） 曲面S是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$被平面 $z=\frac{a}{4}$， $z=\frac{a}{2}(a>0)$所夹的部分；

（3） 曲面S是曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$所含在圆柱 $x^2+y^2=2x$ 内的部分；

（4） 曲面S是圆柱面 $x^2+y^2=a^2$，$x^2+z^2=a^2$相交部分的立体表面。

16 求下列物体的重心：

（1） 物体是由 $y^2=2px$，$x=x_0$，$y\geqslant 0$所围成的均匀薄板；

（2） 物体是由抛物线$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$及坐标轴 $x=0$，$y=0$所围成的均匀薄板；

（3） 物体是均匀半球体：$x^2+y^2+z^2=a^2$ （$z\geqslant 0$）；

（4） 物体是由曲面 $z=x^2+y^2$，平面 $x+y=a$ （$a>0$），及坐标面 $x=0$，$y=0$，$z=0$所界的均匀物体。

17 求下列物体关于轴的转动惯量：

（1） 求半径为 a 的均匀半圆薄片（面密度为常数 ρ）对其直径边的转动惯量；

（2） 均匀密度的椭球体$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$ 关于 z 轴的转动惯量。

第十九章　曲线积分和曲面积分

在工程技术与物理学中，常常要遇到计算非均匀地分布在曲线上或曲面上的质量，变力沿曲线作功以及流体通过曲面的流量等问题，这些问题都可归结为曲线积分和曲面积分问题．本章将要讨论第一型和第二型曲线积分及第一型和第二型曲面积分的概念、性质和计算．此外，还要讨论格林①公式，奥——高②公式以及斯托克斯③公式．

§19.1　第一型曲线积分

一　曲线质量问题

设有平面物质曲线$\overset{\frown}{AB}$，其线密度 ρ是曲线$\overset{\frown}{AB}$上点(x,y)的函数$\rho=f(x,y)$，求物质曲线$\overset{\frown}{AB}$的质量．

如果线密度 ρ是常数，则该物质曲线$\overset{\frown}{AB}$的质量 m可用下面公式计算：

质量$m=$线密度$\rho\times\overset{\frown}{AB}$的弧长

如果线密度 $\rho=f(x,y)$是非均匀的，则该物质曲线 $\overset{\frown}{AB}$的质量m 可用下面方法计算：

将曲线$\overset{\frown}{AB}$用一组分点：

---

①格林：Green．G．英国数学家．1793～1841．

②奥-高公式是奥斯特洛格拉特斯基-高斯公式的简称．奥斯特洛格 拉特斯基：остроградский．M．B．俄国数学家1801～1861．高斯： Gauss．K．F．德国数学家1777～1855．

③斯托克斯： stokes．G．G．英国数学家，1819～1903．

$$A=A_0,\ A_1,A_2,\cdots,\ A_{n-1},A_n=B$$

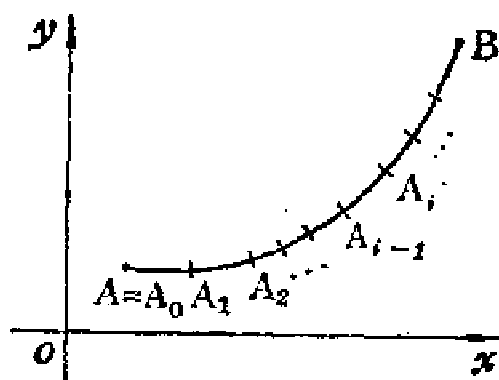


图19.1

分成 n 个小弧 $\widehat{A_0A_1}$，$\widehat{A_1A_2}$，……，$\widehat{A_{n-1}A_n}$（如图19.1）我们用Δl_i 代表$\widehat{A_{i-1}A_i}$的弧长（$i=1,2,\cdots,n$），在$\widehat{A_{i-1}A_i}$上任取一点$P_i(\xi_i,\eta_i)$，用点$P_i(\xi_i,\eta_i)$的线密度 $f(\xi_i,\eta_i)$近似代替小弧$\widehat{A_{i-1}A_i}$上每一点的线密度，那么，弧$\widehat{A_{i-1}A_i}$的质量

$$\Delta m_i\approx f(\xi_i,\eta_i)\Delta l_i\quad(i=1,2,\ \cdots,n)$$

从而，物质曲线$\widehat{AB}$的质量

$$m\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta l_i$$

当分点无限加密，且所有小弧的最大弧长Δl 趋于零时，上述和式的极限就是该物质曲线 $\widehat{AB}$ 的质量，即

$$m=\lim_{\Delta l\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta l_i$$

抛开这个问题的物理意义，对此和式的极限进行抽象，就得到第一型曲线积分的定义。

二 第一型曲线积分的定义

设平面曲线$\widehat{AB}$是一光滑或分段光滑曲线，函数 $f(x,y)$是定义在曲线$\widehat{AB}$的有界函数，对曲线$\widehat{AB}$ 的任意分法 T：

$$A=A_0,A_1,A_2,\cdots,A_n=B$$

将曲线$\widehat{AB}$分成n个小弧$\widehat{A_{i-1}A_i}$（$i=1,2,\cdots,n$）。在第i个小弧上任取一点 $P_i(\xi_i,\eta_i)$，作和

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta l_i$$

其中Δl_i是小弧$\widehat{A_{i-1}A_i}$的弧长。

定义 如果不论分法T如何，也不论点$P_i(\xi_i,\eta_i)\in\widehat{A_{i-1}A_i}$的取法如何，只要$n$个小弧中最大的弧长$\Delta l\to 0$，和数$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta l_i$存在极限，设极限是$I$，即

$$\lim_{\Delta l\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta l_i=I$$

则称I是函数$f(x,y)$沿曲线$\widehat{AB}$的第一型曲线积分，记作

$$\int_{\widehat{AB}}f(x,y)dl=\lim_{\Delta l\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta l_i \qquad (19.1)$$

三 第一型曲线积分的性质

第一型曲线积分的性质与定积分的性质基本是平行的，其证法相同. 这里只给出第一型曲线积分的性质，证明从略。

（1）如果第一型曲线积分$\int_{\widehat{AB}}f(x,y)dl$与$\int_{\widehat{AB}}g(x,y)dl$皆存在，则第一型曲线积分$\int_{\widehat{AB}}[af(x,y)\pm bg(x,y)]dl$也存在且

$$\int_{\widehat{AB}}[af(x,y)\pm bg(x,y)]dl=a\int_{\widehat{AB}}f(x,y)dl\pm b\int_{\widehat{AB}}g(x,y)dl$$

其中a与b均为常数.

（2）如果光滑或分段光滑曲线$\widehat{AC}$是由光滑或分段光滑曲线$\widehat{AB}$与$\widehat{BC}$联接而成，且第一型曲线积分$\int_{\widehat{AB}}f(x,y)dl$与$\int_{\widehat{BC}}f(x,y)dl$皆存在，则第一型曲线积分$\int_{\widehat{AC}}f(x,y)dl$也存在，且

$$\int_{\widehat{AC}} f(x,y)dl = \int_{\widehat{AB}} f(x,y)\,dl + \int_{\widehat{BC}} f(x,y)dl$$

（3）如果第一型曲线积分$\int_{\widehat{AB}} f(x,y)\,dl$与$\int_{\widehat{AB}} g(x,y)\,dl$皆存在，且对任意点$(x,y)\in\widehat{AB}$，有$f(x,y)\leqslant g(x,y)$，则

$$\int_{\widehat{AB}} f(x,y)\,dl \leqslant \int_{\widehat{AB}} g(x,y)dl$$

（4）如果第一型曲线积分$\int_{\widehat{AB}} f(x,y)dl$存在，则第一型曲线积分$\int_{\widehat{AB}} |f(x,y)|dl$也存在，且

$$\left|\int_{\widehat{AB}} f(x,y)\,dl\right| \leqslant \int_{\widehat{AB}} |f(x,y)|\,dl$$

（5）如果第一型曲线积分$\int_{\widehat{AB}} f(x,y)\,dl$存在，曲线$\widehat{AB}$的弧长为$L$，则存在常数$C$，使得

$$\int_{\widehat{AB}} f(x,y)dl = CL$$

其中$\inf\limits_{\widehat{AB}} f(x,y)\leqslant C\leqslant \sup\limits_{\widehat{AB}} f(x,y)$。

（6）如果函数$f(x,y)$沿曲线$\widehat{AB}$的第一型曲线积分存在，则函数$f(x,y)$沿曲线$\widehat{AB}$从A到B的积分$\int_{\widehat{AB}} f(x,y)dl$与从$B$到$A$的积分$\int_{\widehat{BA}} f(x,y)\,dl$相等，即第一型曲线积分与方向无关①。表为

①第一型曲线积分的被积表达式是函数$f(x,y)$与弧长微分dl之积，而弧长与曲线方向无关，故第一型曲线积分与方向无关。

$$\int_{\widehat{AB}} f(x,y)\,dl = \int_{\widehat{BA}} f(x,y)\,dl$$

四　第一型曲线积分的计算

在第一型曲线积分$\int_{\widehat{AB}} f(x,y)dl$中，被积函数$f(x,y)$是定义在曲线$\widehat{AB}$上，因而 x,y不是独立的，实质上只依赖于一个变量．如果利用曲线方程消去一个变量，第一型曲线积分就可以化为定积分来计算．

定理19.1　设曲线$\widehat{AB}$由参数方程

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

给出，且函数 $\varphi(t),\psi(t)$ 及其导函数 $\varphi'(t)$，$\psi'(t)$ 在闭区间$[\alpha,\beta]$ 上皆连续，如果函数$f(x,y)$在曲线$\widehat{AB}$上连续，则

$$\int_{\widehat{AB}} f(x,y)dl=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt \quad (19.2)$$

证明　给曲线$\widehat{AB}$任意一个分法T：

$$A=A_0,A_1,A_2,\cdots,A_i,\ \ A_{i+1},\cdots,A_n=B$$

设曲线$\widehat{AB}$上的分点A_i所对应的参数为 $t_i(i=0,1,2,\cdots,n-1)$，即 $A_i(x_i,y_i)=A_i[\varphi(t_i),\psi(t_i)]$．在小曲线弧$\widehat{A_iA_{i+1}}$ $(i=0,1,\cdots n-1)$上任取一点$M_i(\xi_i,\eta_i)$，对应的参数为 $\tau_i(t_i\leqslant\tau_i\leqslant t_{i+1})$，作和

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i,\eta_i)\Delta l_i=\sum_{i=0}^{n-1}f[\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i)]\Delta l_i \quad (1)$$

由弧长公式知，小曲线弧$\widehat{A_iA_{i+1}}$的弧长

$$\Delta l_i=\int_{t_i}^{t_{i+1}}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$$

因为函数$\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}$ 连续，所以，根据定积分中值定理，存在一点 $\tau'_i\in[t_i,t_{i+1}]$，使得

$$\Delta l_i=\int_{t_i}^{t_{i+1}}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt=\sqrt{\varphi'^2(\tau'_i)+\psi'^2(\tau'_i)}\quad\Delta t_i \tag{2}$$

将(2)式代入到(1)式中，得

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1}f[\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i)]\Delta l_i=\sum_{i=0}^{n-1}f[\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i)]$$

$$\sqrt{\varphi'^2(\tau'_i)+\psi'^2(\tau'_i)}\Delta t_i=\sum_{i=0}^{n-1}f[\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i)]$$

$$\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i)}\ \Delta t_i\ +\sum_{i=0}^{n-1}f[\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i)]$$

$$[\sqrt{\varphi'^2(\tau'_i)+\psi'^2(\tau'_i)}-\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i)}\ ]\Delta t_i \tag{3}$$

令

$$\overline{\sigma}=\sum_{i=0}^{n-1}f[\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i)][\sqrt{\varphi'^2(\tau'_i)+\psi'^2(\tau'_i)}-$$

$$-\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i)}\ ]\Delta t_i$$

当$\Delta l=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1}\ \{\Delta l_i\}\to 0$，对$\overline{\sigma}$取极限。

因为复合函数$f[\varphi(t),\psi(t)]$关于t连续，所以在闭区间$[\alpha,\beta]$上有界，即存在 $M>0$，对任意 $t\in[\alpha,\beta]$，有

$$|f[\varphi(t),\psi(t)]|\leqslant M$$

又由于函数$\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}$在闭区间 $[\alpha,\beta]$上连续，于是，根据定理7.8，必在闭区间$[\alpha,\beta]$上一致连续，即

对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当$\Delta t<\delta$时，有

$$|\sqrt{\varphi'^2(\tau'_i)+\psi'^2(\tau'_i)}-\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i)}|<\varepsilon$$

其中 $|\tau'_i-\tau_i|\leqslant\Delta t<\delta$。于是，有

$$|\overline{\sigma}|\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}|f[\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i)]||\sqrt{\varphi'^2(\tau'_i)+\psi'^2(\tau'_i)}-$$

$$-\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i)}\Big|\ |\Delta t_i|\ \leqslant\sum_{i=0}^{n-1} M\cdot\varepsilon\cdot\Delta t_i$$

$$=M\cdot\varepsilon\sum_{i=0}^{n-1}\Delta t_i=M(\beta-\alpha)\varepsilon$$

即
$$\lim_{\Delta t\to 0}\bar{\sigma}=0 \tag{4}$$

令 $\Delta l=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1}\{\Delta l_i\}\to 0$，必有$\Delta t=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1}\{\Delta t_i\}\to 0$，对（3）式取极限，由（3）式、（4）式和定积分定义，得

$$\lim_{\Delta l\to 0}\sigma=\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}f[\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i)]\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i)}\,\Delta t_i$$

$$+\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}f[\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i)][\sqrt{\varphi'^2(\tau'_i)+\psi'^2(\tau'_i)}-$$

$$-\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i)}\,]\Delta t_i$$

$$=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$$

最后，再根据第一型曲线积分的定义，立即得到

$$\int_{\widehat{AB}}f(x,y)dl=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt \quad \square$$

如果曲线$\widehat{AB}$由显函数

$$y=y(x),\quad a\leqslant x\leqslant b$$

给出，这时可以把它看作以x为参数的参数方程：$x=x$，$y=y(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$。于是，由(19.2)有

$$\int_{\widehat{AB}}f(x,y)dl=\int_a^b f[x,y(x)]\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx \tag{19.3}$$

如果曲线$\widehat{AB}$由显函数

$$x=x(y),\quad c\leqslant y\leqslant d$$

给出，同理，由(19.2)有

$$\int_{\widehat{AB}} f(x,y)dl = \int_c^d f[x(y),y]\sqrt{1+x'^2(y)}\,dy \quad (19.4)$$

例1 计算第一型曲线积分

$$I=\int_{\widehat{AB}} xydl$$

其中曲线$\widehat{AB}$是椭圆的四分之一$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \end{cases} \quad 0\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{2}$.

解 $x'=(a\cos t)'=-a\sin t$, $y'=(b\sin t)'=b\cos t$, 将 x,y及 x',y'之值代入到公式(19.2)中，有：

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\cdot b\sin t\sqrt{(-a\sin t)^2+(b\cos t)^2}dt$$

$$=ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\ \cos t\sqrt{b^2+(a^2-b^2)\sin^2 t}\ dt$$

令 $u=b^2+(a^2-b^2)\sin^2 t$, $du=2\ (a^2-b^2)\sin t\ \cos t\ dt$, 当 $t=0$时，$u=b^2$, 当 $t=\frac{\pi}{2}$时，$u=a^2$, 于是

$$I=\frac{ab}{2(a^2-b^2)}\int_{b^2}^{a^2} u^{\frac{1}{2}}du=\frac{ab}{2(a^2-b^2)}\ u^{\frac{3}{2}}\Big|_{b^2}^{a^2}$$

$$=\frac{ab}{3(a^2-b^2)}(a^3-b^3)=\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$$

例2 计算 $I=\int_c ydl$, 其中 c 是抛物线 $y^2=2x$ 自原点(0,0)到点(2,2)一段。

解 $x=\frac{1}{2}y^2$, $x'=\left(\frac{1}{2}y^2\right)'=y$, 由公式(19.4)有

$$I=\int_0^2 y\sqrt{1+x'^2}dy=\int_0^2 y\sqrt{1+y^2}dy=\frac{1}{2}\int_0^2\sqrt{1+y^2}$$

$$d(1+y^2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot(1+y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2=\frac{1}{3}(5\sqrt{5}-1)$$

例3 计算 $I=\int_c(x+y)dl$, 其中 c为以$O(0,0)$, $A(1,0)$,

$B(0,1)$为顶点的三角形围线（如图19.2）。

解 根据曲线积分的性质有，

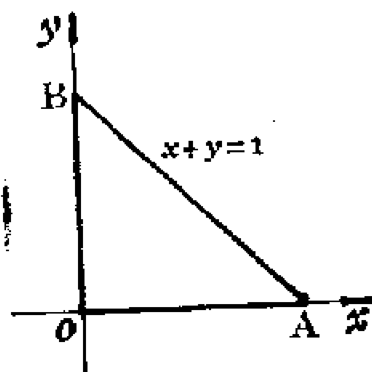


图19.2

$$\int_l (x+y)dl=\int_{\overline{OA}}(x+y)dl+\int_{\overline{OB}}(x+y)dl+\int_{\overline{BA}}(x+y)dl \quad (2)$$

在线段$\overline{OA}$上：$y=0, y'=0, dl=\sqrt{1+y'^2}\,dx=dx$，由公式(19.3)有

$$\int_{\overline{OA}}(x+y)dl=\int_0^1(x+0)\,dx=\frac{1}{2} \quad (3)$$

在线段$\overline{OB}$上：$x=0$，$x'=0$，$dl=\sqrt{1+x'^2}dy=dy$，由公式(19,4)，有

$$\int_{\overline{OB}}(x+y)dl=\int_0^1(0+y)dy=\frac{1}{2} \quad (4)$$

在线段$\overline{BA}$上：$y=1-x$，$y'=-1, dl=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{2}\,dx$，由公式（19.3），有

$$\int_{\overline{BA}}(x+y)dl=\int_0^1 1\cdot\sqrt{2}\,dx=\sqrt{2} \quad (5)$$

将（3）、（4）和（5）式之值代入（2）式中得

$$I=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\sqrt{2}=1+\sqrt{2}$$

§19.2 第二型曲线积分

一 变力沿曲线所作的功

我们知道，用定积分可以计算变力沿直线所作的功。

现在我们来讨论平面上的变力

$$\vec{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$$

沿平面曲线$\overset{\frown}{AB}$，由点A到点B所作的功。

由物理学知道，如果质点在常力$\vec{F}$作用下，沿有向线段$\overrightarrow{AB}$，从点A移动到点B，则常力$\vec{F}$所作的功

$$W=|\vec{F}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cos\theta=\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB} \qquad (1)$$

现在，力$\vec{F}(x,y)$在曲线$\overset{\frown}{AB}$上是变力，曲线$\overset{\frown}{AB}$上各点处的方向向量（即切向量）也是变的，因此不能直接使用公式（1）来计算变力$\vec{F}(x,y)$所作的功。为此，我们用曲线$\overset{\frown}{AB}$上的一组分点：$A=A_0, A_1, A_2, \cdots, A_n=B$，将曲线$\overset{\frown}{AB}$分成$n$个小弧$\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ $(i=1,2,\cdots,n)$如图19.3。

当每个小弧$\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}(i=1,2,\cdots,n)$的长很小时，小弧$\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$与向量$\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$几乎重合。这时，力$\vec{F}(x,y)$在每段小弧$\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$上变化很小，因此可以看成是不变的，从而可用点$A_{i-1}$处的力$\vec{F}(A_{i-1})$代替$\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$上每一点的力。于是，变力$\vec{F}(x,y)$沿小弧$\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$从点$A_{i-1}$到点$A_i$所作的功$\Delta W_i$就近似等于

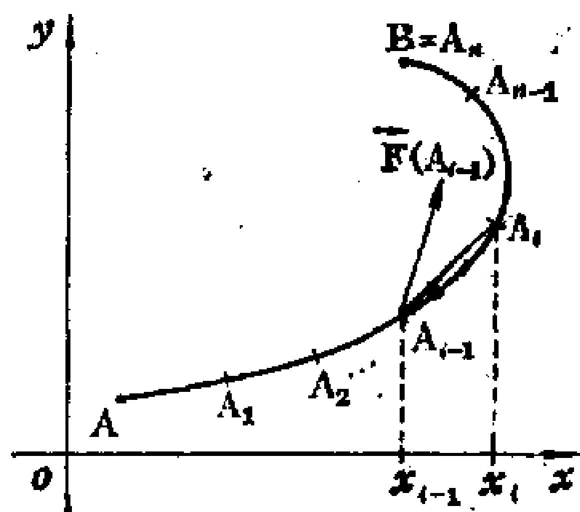


图19.3

$$\Delta W_i \approx \vec{F}(A_{i-1})\cdot\overrightarrow{A_{i-1}A_i}=P(A_{i-1})\Delta x_i+Q(A_{i-1})\Delta y_i \qquad (2)$$

其中$\vec{F}(A_{i-1})=P(A_{i-1})\vec{i}+Q(A_{i-1})\vec{j}$，$\overrightarrow{A_{i-1}A_i}=\Delta x_i\vec{i}+\Delta y_i\vec{j}$。从而变力$\vec{F}(x,y)$沿曲线$\overset{\frown}{AB}$从点$A$至点$B$所作的功$W$就近似等于

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} [P(A_{i-1})\Delta x_i + Q(A_{i-1})\Delta y_i]$$

即 $$W \approx \sum_{i=1}^{n} [P(x_{i-1}, y_{i-1})\Delta x_i + Q(x_{i-1}, y_{i-1})\Delta y_i] \quad (3)$$

其中 x_{i-1}, y_{i-1}是点 A_{i-1}的两个坐标. 令最大的小弧长 $\Delta l \to 0$,就得到总功W

$$W = \lim_{\Delta l \to 0} \sum_{i=1}^{n} [P(x_{i-1}, y_{i-1})\Delta x_i + Q(x_{i-1}, y_{i-1})\Delta y_i]$$

$$= \lim_{\Delta l \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(x_{i-1}, y_{i-1})\Delta x_i + \lim_{\Delta l \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(x_{i-1}, y_{i-1})\Delta y_i \quad (4)$$

这就表明，求变力$\vec{F}(x,y)$作功的问题，最后归结为（4）式右端两个和的极限. 在实际问题中，有许多问题最终都可以归结为这样两个极限的和. 从而，有必要专门讨论这种和式的极限。

二 第二型曲线积分的定义

设平面曲线$\overset{\frown}{AB}$是一光滑或分段光滑曲线，函数 $f(x,y)$是定义在曲线$\overset{\frown}{AB}$上的有界函数，对曲线$\overset{\frown}{AB}$的任一分割 T：

$$A = A_0, A_1, A_2, \cdots, A_n = B$$

将曲线$\overset{\frown}{AB}$分成 n 段小弧$\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ $(i=1,2,\cdots,n)$,在每段小弧$\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$上任取一点 $M_i(\xi_i, \eta_i)$,作和

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i$$

其中 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$为小弧$\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$在$x$轴上的投影。

定义 如果不论分法T如何，也不论点 $M_i(\xi_i, \eta_i)$ 的取法

如何，只要最大的小弧长 $\Delta l\to 0$，和数$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$ 存在极限，设极限I，即

$$\lim_{\Delta l\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\ \Delta x_i=\lim_{\Delta l\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i=I$$

则称 I为函数 $f(x,y)$ 沿曲线$\overset{\frown}{AB}$ 从A到B关于 x 的第二型曲线积分，记作

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)\ dx=\lim_{\Delta l\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i \qquad (19.5)$$

或
$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(M)dx=\lim_{\Delta l\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x_i$$

同样，当最大的小弧长 $\Delta l\to 0$时，和数

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta y_i=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$$

存在极限 J，即

$$\lim_{\Delta l\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta y_i=\lim_{\Delta l\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i=J$$

则称 J为函数 $f(x,y)$沿曲线$\overset{\frown}{AB}$从A到 B关于 y 的第二型曲线积分，记作

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)\ dy=\lim_{\Delta l\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i \qquad (19.6)$$

或
$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(M)\ dy=\lim_{\Delta l\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta y_i$$

如果第二型曲线积分$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\ dx$与$\int_{\overset{\frown}{AB}} Q(x,y)dy$ 皆存在，

则称它们的和为一般形状的第二型曲线积分，并记作

$$\int_{\widehat{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)\ dy = \int_{\widehat{AB}} P(x,y)dx + \int_{\widehat{AB}} Q(x,y)\ dy \tag{19.7}$$

如果 $\overrightarrow{F}(x,y) = P(x,y)\overrightarrow{i} + Q(x,y)\overrightarrow{j}$，$\overrightarrow{dl} = dx\overrightarrow{i} + dy\overrightarrow{j}$，则(19.7)式可记作

$$\int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dl} = \int_{\widehat{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \tag{19.8}$$

根据第二型曲线积分的定义和 (19.8)式，变力 $\overrightarrow{F}(x,y) = P(x,y)\overrightarrow{i} + Q(x,y)\overrightarrow{j}$ 沿曲线 $\widehat{AB}$ 从 A 移动到 B 所作的功

$$W = \int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dl} = \int_{\widehat{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

三　第二型曲线积分的性质

（1）如果第二型曲线积分 $\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy$ 存在，则第二型曲线积分 $\int_{\widehat{AB}} aPdx + aQdy$ 也存在，且

$$\int_{\widehat{AB}} aPdx + aQdy = a\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy \tag{19.9}$$

（2）如果第二型曲线积分 $\int_{\widehat{AB}} P_1dx + Q_1dy$ 与 $\int_{\widehat{AB}} P_2dx + Q_2dy$ 皆存在，则第二型曲线积分

$$\int_{\widehat{AB}} (P_1 + P_2)dx + (Q_1 + Q_2)dy$$

也存在，且

$$\int_{\widehat{AB}} (P_1+P_2)dx+(Q_1+Q_2)dy=\int_{\widehat{AB}} P_1dx+Q_1dy+\int_{\widehat{AB}} P_2dx+Q_2dy$$

(19.10)

（3）如果光滑或分段光滑曲线$\widehat{AC}$是由光滑或分段光滑曲线$\widehat{AB}$和$\widehat{BC}$联接而成，且第二型曲线积分$\int_{\widehat{AB}} Pdx+Qdy$与$\int_{\widehat{BC}} Pdx+Qdy$皆存在，则第二型曲线积分$\int_{\widehat{AC}} Pdx+Qdy$也存在，且

$$\int_{\widehat{AC}} Pdx+Qdy=\int_{\widehat{AB}} Pdx+Qdy+\int_{\widehat{BC}} Pdx+Qdy \quad (19.11)$$

（4）第二型曲线积分与曲线$\widehat{AB}$的方向有关。对于同一条曲线$\widehat{AB}$，方向由A到B（表为$\widehat{AB}$）改为由B到A（表为$\widehat{BA}$）时，积分和中每一小段弧的方向都要改变，于是它们在x轴和y轴上的投影Δx和Δy也要随之改变符号，从而积分和也要随之改变符号，故有

$$\int_{\widehat{AB}} Pdx+Qdy=-\int_{\widehat{BA}} Pdx+Qdy \quad (19.12)$$

四　第二型曲线积分的计算

定理19.2　设曲线$\widehat{AB}$由参数方程

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)\quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

给出，它的方向与参数增加的方向一致，且函数$\varphi(t)$，$\psi(t)$及其导函数$\varphi'(t)$，$\psi'(t)$皆在$[\alpha,\beta]$上连续，如果函数$f(x,y)$在曲线$\widehat{AB}$上连续，则第二型曲线积分$\int_{\widehat{AB}} f(x,y)dx$与$\int_{\widehat{AB}} f(x,y)dy$皆存在，且

$$\left.\begin{aligned}\int_{\widehat{AB}} f(x,y)dx=\int_{\alpha}^{\beta}f[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)dt\\ \int_{\widehat{AB}} f(x,y)dy=\int_{\alpha}^{\beta}f[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)dt\end{aligned}\right\}\qquad(19.13)$$

证明 设曲线$\widehat{AB}$上的分点$A_i(x_i,y_i)$所对应的参数为$t_i(i=1,2,\cdots,n)$，在小弧$\widehat{A_{i-1}A_i}$上任取一点$M_i(\xi_i,\eta_i)$对应的参数为$\tau_i(t_{i-1}\leqslant\tau_i\leqslant t_i)$，于是，和

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\ \Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}f[\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i)]\Delta x_i$$

因为

$$\Delta x_i=\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})=\int_{t_{i-1}}^{t_i}\varphi'(t)dt$$

所以，有

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}f[\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i)]\int_{t_{i-1}}^{t_i}\varphi'(t)dt$$

另一方面，公式(19.12)的右端的积分可以写成

$$I=\int_{\alpha}^{\beta}f[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)dt=\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}f[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)dt$$

从而

$$\sigma-I=\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}[f(\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i))-f(\varphi(t),\psi(t))]\varphi'(t)dt$$

因为函数$f[\varphi(t),\psi(t)]$在闭区间$[\alpha,\beta]$上连续，所以必是一致连续。从而，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\Delta t_i|<\delta$时，对任意的$t\in[t_{i-1},t_i]$，有

$$|f(\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i))-f(\varphi(t),\psi(t))|<\varepsilon$$

又因函数$\varphi'(t)$在闭区间$[\alpha,\beta]$上连续，所以必有界。即存在正数C，对任意$t\in[\alpha,\beta]$，有

$$|\varphi'(t)|\leqslant C$$

从而，有

$$|\sigma - I| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) - f(\varphi(t), \psi(t))|\,|\varphi'(t)|\,dt$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varepsilon \cdot C\,dt = \varepsilon C(\beta - \alpha)$$

这就证明了 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma = I$，即

$$\int_{\widehat{AB}} f(x,y)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t)\,dt$$

同理可证

$$\int_{\widehat{AB}} f(x,y)\,dy = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)\psi(t)]\psi'(t)\,dt$$

特别地，如果连续曲线用显函数

$$y = y(x)$$

给出，且当 x 从 a 变到 b 时，曲线上的点，从 A 移动到 B，则有

$$\left.\begin{aligned} &\int_{\widehat{AB}} f(x,y)\,dx = \int_a^b f[x, y(x)]\,dx \\ &\int_{\widehat{AB}} f(x,y)\,dy = \int_a^b f[x, y(x)]y'(x)\,dx \end{aligned}\right\} \quad (19.14)$$

如果连续曲线用显函数

$$x = x(y)$$

给出，且当 y 从 c 变到 d 时，曲线上的点，从 A 移动到 B，则有

$$\left.\begin{aligned} &\int_{\widehat{AB}} f(x,y)\,dy = \int_c^d f[x(y), y]\,dy \\ &\int_{\widehat{AB}} f(x,y)\,dx = \int_c^d f[x(y), y]x'(y)\,dy \end{aligned}\right\} \quad (19.15)$$

如果曲线 $\widehat{AB}$ 是平行 y 轴的直线段，其方程为

$$x \equiv a$$

这时由于 $dx\equiv 0$，因此

$$\int_{\widehat{AB}} f(x,y)dx=0 \tag{19.16}$$

如果曲线$\widehat{AB}$是平行x轴的直线段，其方程为

$$y\equiv C$$

这时由于$dy\equiv 0$，因此

$$\int_{\widehat{AB}} f(x,y)dy=0 \tag{19.17}$$

最后，对于一般形状的第二型曲线积分

$$\int_{\widehat{AB}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

其中 $P(x,y)$与$Q(x,y)$皆是曲线$\widehat{AB}$上的连续函数．如果$\varphi(t)$，$\psi(t)$，$\varphi'(t)$，$\psi'(t)$在 $[\alpha,\beta]$上连续，或 $\varphi'(t)$，$\psi'(t)$在$[\alpha,\beta]$ 上分段连续，则有

$$\int_{\widehat{AB}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{\alpha}^{\beta}\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt \tag{19.18}$$

已知 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，则 $dx=\varphi'(t)dt$，$dy=\psi'(t)dt$，于是，在第二型曲线积分的计算中，不必机械地套用公式，只须把 x,y,dx，dy分别用 $\varphi(t),\psi(t)$，$\varphi'(t)\ dt$，$\psi'(t)dt$ 代替，并把从A到B的线积分换为从 α（始点A对应的参数）到β（终点B 对应的参数）的定积分，即

$$\int_{\widehat{AB}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{\alpha}^{\beta} P[\varphi(t),\psi(t)]d\varphi(t)+$$

$$+Q[\varphi(t),\psi(t)]d\psi(t)=\int_{\alpha}^{\beta}\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+$$

$$+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$$

当曲线由 $y=y(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$或 $x=x(y)(c\leqslant y\leqslant d)$ 形式给出时，上述作法也适用，即

$$\int_{\widehat{AB}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_a^b P[x,y(x)]dx+$$

$$Q[x,y(x)]dy(x)=\int_a^b\{P[x,y(x)]+Q[x,y(x)]y'(x)\}dx$$

例1　计算曲线积分

$$\int_L(2a-y)dx+xdy$$

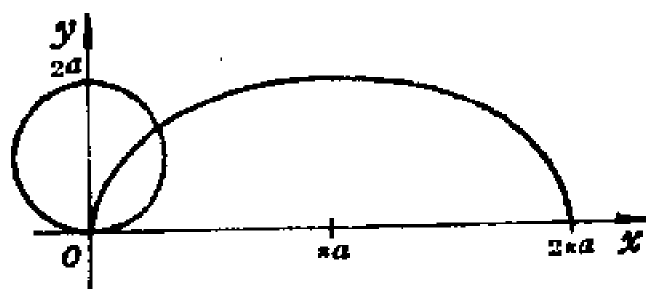


图19.4

其中 L为摆线：$x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$的一拱，如图19.4

解　$x'=[a(t-\sin t)]'=a(1-\cos t)$

$y'=[a(1-\cos t)]'=a\sin t$

由公式(19.18)有

$$\int_L(2a-y)dx+xdy=\int_0^{2\pi}\{[2a-a(1-\cos t)]a(1-\cos t)+$$

$$a(t-\sin t)a\sin t\}dt=\int_0^{2\pi}a^2t\sin tdt$$

$$=-a^2(t\cos t-\sin t)\Big|_0^{2\pi}=-2\pi a^2$$

例2　计算第二型曲线积分

$$\int_{\widehat{AB}}xydx+y^2dy$$

(i) $\widehat{AB}$，从点 $A(1,0)$沿直线到点 $B(0,1)$；

(ii) $\overset{\frown}{AB}$：从点 $A(1,0)$沿圆周 $x=\cos t$, $y=\sin t$, $\left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$到点$B(0,1)$；

(iii) $\overset{\frown}{AB}$：从点 $A(1,0)$沿 x轴到原点 $O(0,0)$，再从原点$O(0,0)$沿 y轴到点$B(0,1)$（如图19.5）.

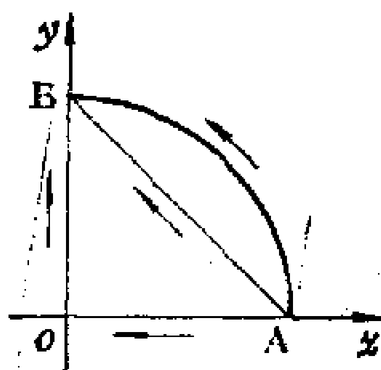


图19.5

解 (i) 由直线方程 $x+y=1$，得 $y=1-x$，$0\leqslant x\leqslant 1$，$dy=-dx$. 于是，根据公式（19.14），有

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} xy\,dx+y^2dy=\int_1^0 [x(1-x)+(1-x)^2(-1)]\,dx=\int_1^0 (3x-2x^2-1)\,dx=\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3-x\right)\Bigg|_1^0=\frac{1}{6}$$

(ii) $x'=-\sin t$, $y'=\cos t$, 由公式（19.18），有

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} xy\,dx+y^2dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos t\cdot\sin t\cdot(-\sin t)+\sin^2 t\cos t]dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}0\,dt=0$$

(iii)由第二型曲线积分的性质2)，有

$$\int_{\overset{\frown}{AB}}=\int_{\overline{AO}}+\int_{\overline{OB}}$$

在直线段$\overline{AO}$上，$y=0$，$(0\leqslant x\leqslant 1)$，$dy=0$. 于是

$$\int_{\overline{AO}} xy\,dx+y^2dy=\int_1^0 x\cdot 0\,dx=0$$

在直线段 $\overline{OB}$ 上，$x=0$，$(0\leqslant y\leqslant 1)$，$dx=0$，于是

$$\int_{\overline{OB}} xy\,dx+y^2dy=\int_0^1 y^2dy=\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}$$

例3　计算第二型曲线积分

$$\int_{\widehat{AB}} 2xydx + x^2dy$$

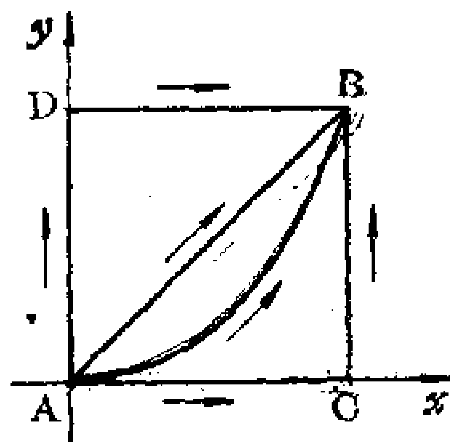


图19.6

其中$\widehat{AB}$：(i) 由点 $A(0,0)$沿直线至点 $B(1,1)$；

(ii) 由点 $A(0,0)$沿立方抛物线 $y=x^3$ 至点 $B(1,1)$；

(iii)由点$A(0,0)$沿x轴至点$(1,0)$，再由点$(1,0)$沿直线至点$B(1,1)$；

(iV)由点 $A(0,0)$沿 y轴至点$(0,1)$，再由点$(0,1)$ 沿直线至点$B(1,1)$.

解　(i)此直线为 $y=x$，$0\leqslant x\leqslant 1$，$dy=dx$. 于是，

$$\int_{\widehat{AB}} 2xydx + x^2dy = \int_0^1 (2x\cdot x + x^2)\ dx = \int_0^1 3x^2dx$$

$$= x^3\Big|_0^1 = 1$$

(ii) 此时曲线$\widehat{AB}$ 的方程为$y=x^3\ (0\leqslant x\leqslant 1)$, $dy=3x^2dx$. 将 y与dy之值代入曲线积分中，得

$$\int_{\widehat{AB}} 2xydx + x^2dy = \int_0^1 (2x\cdot x^3 + x^2\cdot 3x^2)\ dx = \int_0^1 5x^4dx$$

$$= x^5\Big|_0^1 = 1$$

(iii)由第二型曲线积分的性质 (2)，有

$$\int_{\widehat{AB}} = \int_{\overline{AC}} + \int_{\overline{CB}}$$

在线段$\overline{AC}$ 上，$y=0$，$0\leqslant x\leqslant 1$，$dy=0$. 于是，

$$\int_{\overline{AC}} 2xydx + x^2dy = \int_0^1 (2x\cdot 0 + x^2\cdot 0)dx = 0$$

在线段$\overline{CB}$上，$x=1$，$0\leqslant y\leqslant 1$，$dx=0$。于是，

$$\int_{\overline{CB}} 2xydx+x^2dy=\int_0^1(2y\cdot 0+1)dy=y\Big|_0^1=1$$

从而
$$\int_{\widehat{AB}} 2xydx+x^2dy=\int_{\widehat{AC}}+\int_{\widehat{CB}}=0+1=1$$

(iV)由第二型曲线积分的性质(2)，有

$$\int_{\widehat{AB}}=\int_{\overline{AD}}+\int_{\overline{DB}}$$

在线段$\overline{AD}$上：$x=0$，$0\leqslant y\leqslant 1$，$dx=0$。于是，

$$\int_{\overline{AD}} 2xydx+x^2dy=\int_0^1(2\cdot 0y\cdot 0+0^2)dy=0$$

在线段$\overline{DB}$上：$y=1$，$0\leqslant x\leqslant 1$，$dy=0$。于是，

$$\int_{\overline{DB}} 2xydx+x^2dy=\int_0^1(2x\cdot 1+x^2 0)dx=x^2\Big|_0^1=1$$

从而
$$\int_{\widehat{AB}} 2xydx+x^2dy=\int_{\overline{AD}}+\int_{\overline{DB}}=0+1=1$$

五 两种曲线积分的联系

设$\widehat{AB}$是一光滑曲线，取弧长$l=\widehat{AM}$为参数，则曲线$\widehat{AB}$的参数方程为

$$x=\varphi(l),\ y=\psi(l)\quad(0\leqslant l\leqslant L)$$

函数$\varphi(l)$，$\psi(l)$及其导数$\varphi'(l)$，$\psi'(l)$皆在闭区间$[0,L]$上连续，其中L为曲线$\widehat{AB}$的总长。

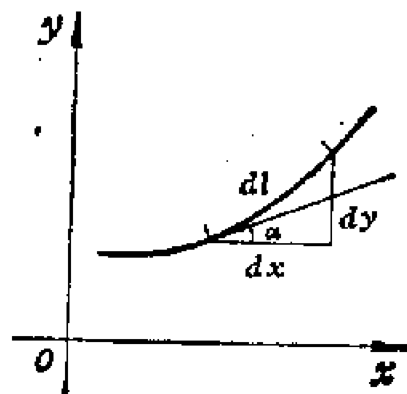


图19.7

如果α表示向着弧长的增加方向的切线与x轴正向的夹角，由弧长微分三角形(如图19.7)，有

$$dx=\cos\alpha dl,\quad dy=\sin\alpha dl$$

于是，根据公式(19.18)和§19.1之(1)式，有

$$\int_{\widehat{AB}} Pdx+Qdy=\int_0^L\{P[\varphi(l),\psi(l)]\cos\alpha+Q[\varphi(l),\psi(l)]\sin\alpha\}dl=\int_{\widehat{AB}}(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)dl \tag{19.19}$$

当(19.19)式左端的第二型曲线积分中的曲线$\widehat{AB}$改变方向时，积分值改变符号，相应的(19.19)式右端的第一型曲线积分，曲线上各点的切线方向指向相反的方向。这时的角α增加（或减少）180°，因此$\cos\alpha$与$\sin\alpha$之绝对值不变，符号相反，从而积分值也随之变号（绝对值不变）。

六　空间曲线积分

我们已经讨论了平面曲线的第一型和第二型曲线积分，关于它们的概念、性质和计算公式都可以很容易地推广到空间曲线上来。下面我们只简要地给出空间曲线的第一型和第二型曲线积分的定义和计算公式。

假设$\widehat{AB}$是一空间光滑（或分段光滑）曲线，$f(x,y,z)$是定义在曲线$\widehat{AB}$上的有界函数。

函数$f(x,y,z)$沿空间光滑曲线$\widehat{AB}$，从A到B的第一型曲线积分是指极限

$$\int_{\widehat{AB}} f(x,y,z)dl=\lim_{\Delta l\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta l_i$$

设有界函数$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$定义在光滑或分段光滑曲线$\widehat{AB}$上，称

$$\int_{\widehat{AB}} Pdx+Qdy+Rdz=\lim_{\Delta l\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i+\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i\right)$$

为一般形状的第二型曲线积分。

假设空间曲线由参数方程

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\chi(t)\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

给出，其中 $\varphi(t),\psi(t),\chi(t),\varphi'(t),\ \psi'(t),\ \chi'(t)$ 皆在闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续，且满足$\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)\neq0$. 当 t从α变到 β时，曲线上的点 从A变到B. 如果函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在曲线$\overset{\frown}{AB}$上连续，则有

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx+Qdy+Rdz=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\ \psi(t),\ \chi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t),\chi(t)]\psi'(t)+R[\varphi(t),\psi(t),\chi(t)]\chi'(t)\}dt \tag{19.20}$$

如果函数 $f(x,y,z)$ 在曲线$\overset{\frown}{AB}$上连续，则有

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y,z)dl=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t),\chi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}dt$$

§19.3 格林公式

一 沿闭路的第二型曲线积分及平面曲线的定向

1 沿闭路的第二型曲线积分

如果第二型曲线积分的积分路线是一条封闭曲线Γ，我们就说它是闭曲线积分. 对于闭曲线积分来说，积分的存在性以及积分值的大小与在路线上取哪一点作为积分道路的起点（同时也是终点）无关.

事实上，设A与 B是闭曲线Γ上的任意二点，则从点A出发，按图 19.8 的箭头方向又回到A的积分，相当于依次按曲线弧$\overset{\frown}{AMB}$ 与$\overset{\frown}{BNA}$的积分之和，即

$$\int_{\overset{\frown}{AMBNA}}=\int_{\overset{\frown}{AMB}}+\int_{\overset{\frown}{BNA}} \tag{1}$$

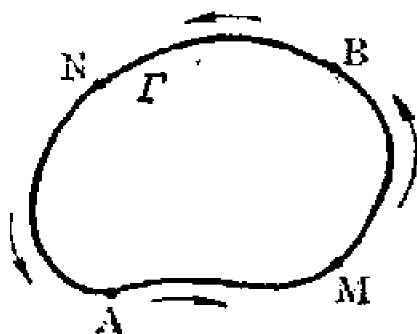


图19.8

但是交换(1)式右端两项的位置，得

$$\int_{\widehat{AMBNA}} = \int_{\widehat{BNA}} + \int_{\widehat{AMB}} = \int_{\widehat{BNAMB}}$$

这就证明了沿闭路积分存在与否，以及值的大小皆与始点（同时也是终点）的选取无关。

正因为如此，闭路积分不必指出始点（或终点），故用符号

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy$$

来表示。

2　平面曲线的定向

我们已经知道，第二型曲线积分与所沿积分曲线的方向有关。对于一般非封闭曲线，当我们指出始点（同时另一端就是终点）以后，积分所沿的曲线的方向就随之而定。然而，对于封闭曲线来说，当我们选定始点（同时又是终点）以后，曲线的方向仍然不能确定。实际上，这时仍有两个方向，如图19.8，一个是箭头指出的方向，另一个是与箭头相反的方向，因此每次计算闭路曲线积分时，当选定始点以后，尚需指出选取哪一个方向进行积分。为了避免这种麻烦，通常对闭曲线的方向作如下的规定：

当一人沿闭曲线（光滑或分段光滑）环行时，该闭曲线所围成的区域总在他的左边，就规定这一方向为闭曲线的**正向**，如图19.8中的闭曲线，其箭头方向就是该闭曲线的正向。

我们约定，今后对闭曲线积分

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy$$

总认为它是沿正方向所取的积分。

二　格林公式

定理19.3（格林公式）　设区域D是由光滑或分段光滑闭

曲线 L（一条或几条）所围成的连通域①（如图19.9）。如果函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 及它们的偏导数$\frac{\partial P}{\partial y}$和$\frac{\partial Q}{\partial x}$在闭区域 D 上连续，则

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint\limits_L Pdx+Qdy \qquad (19.21)$$

公式(19.21) 称为**格林公式**.



图19.9

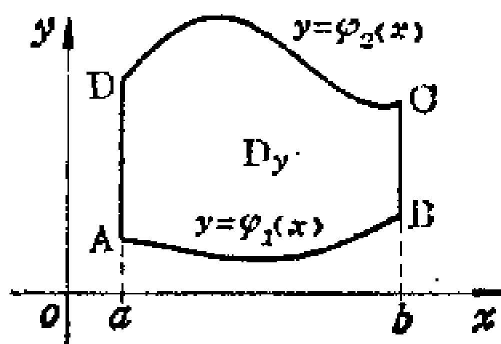


图19.10

证明 设 xy平面上的闭区域 D，它的下、上边界分别为连续曲线

$$y=\varphi_1(x),\ y=\varphi_2(x),\ a\leqslant x\leqslant b$$

而左右两侧的边界分别是直线

$$x=a,\ x=b$$

（如图19.10）。这类区域称为 y－型区域，记作 D_y②。

如果在闭区域 D_y上函数 $P(x,y)$ 及其偏导数$\frac{\partial P}{\partial y}$ 皆连

①连通域包括单连通区域和复连通区域。如果区域内任何一条闭曲线，皆可不经过区域外的点而连续收缩为一点，则称此区域为单连通区域。例如，由一条简单闭曲线所围成的区域就是单连通区域．不是单连通的连通域就称为复连通区域．即区域内至少有一条闭曲线必须经过区域外的点才能连续地收缩为一点．从直观上看，复连通区域就是有洞的连通域．

②在特殊情形下，D_y 型区域的两侧的两条（或一条）线段可能退缩为二点（或一点）。

续，则

$$\iint_{D_y} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\oint_L P(x,y)dx$$

事实上，我们有

$$\iint_{D_y} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy\right] dx$$

$$= \int_a^b \{P[x,\varphi_2(x)] - P[x,\varphi_1(x)]\} dx$$

$$= \int_a^b P[x,\varphi_2(x)]\ dx - \int_a^b P[x,\varphi_1(x)] dx$$

由第二型曲线积分的计算公式（19.1 4）有

$$\iint_{D_y} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b P\ [x,\varphi_2(x)] dx - \int_a^b P[x,\varphi_1(x)] dx$$

$$= \int_{\widehat{DC}} P(x,y)\ dx + \int_{\widehat{BA}} P(x,y) dx \qquad (2)$$

在（2）式右边添加两个直线段$\overline{AD}$ 和$\overline{BC}$ 上的积分，由于直线段$\overline{AD}$与$\overline{BC}$ 皆垂直于 x轴，于是 $dx=0$，从而

$$\int_{\overline{AD}} P(x,y)dx = 0, \quad \int_{\overline{CB}} P(x,y)dx = 0, \qquad (3)$$

因此由（2）式和（3）式，有

$$\iint_{D_y} \frac{\partial P}{\partial y}\ dxdy = \int_{\overline{AD}} Pdx + \int_{\widehat{DC}} Pdx + \int_{\overline{CB}} Pdx + \int_{\widehat{BA}} Pdx$$

$$= -\oint_L P(x,y)dx \qquad (4)$$

设 xy 面上的闭区域D，它的左右边界分别为连续曲线

$$x=\psi_1(y),\ x=\psi_2(y),\ c\leqslant y\leqslant d$$

而下，上边界为直线

$$y=c \text{ 和 } y=d$$

（如图 19.11）。这类区域称为x-型区域，记作D_x。

同理可证，如果函数$Q(x,y)$及其偏导数在闭区域D_x上连续，则

$$\iint_{D_x}\frac{\partial Q}{\partial x}dxdy=\oint_L Q(x,y)dy \quad (5)$$

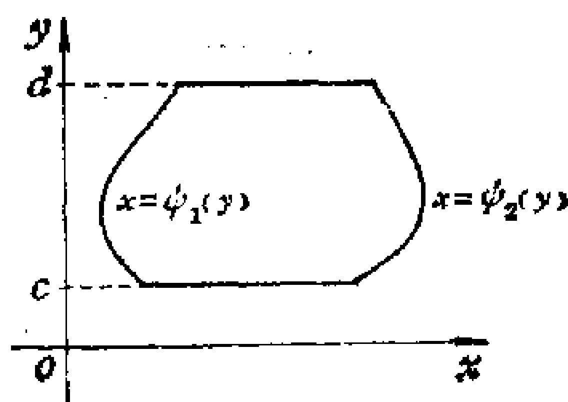


图19.11

1°假设区域D既是D_x型又是D_y型区域，即用平行x轴和平行y轴的直线至多和区域D的边界L相交两点（如图19.12）. 如果P，Q，$\frac{\partial P}{\partial y}$，$\frac{\partial Q}{\partial x}$在闭区域$D$上连续，则（4）与（5）式同时成立。

（5）式减（4）式，得

$$\iint_D\frac{\partial Q}{\partial x}dxdy-\iint_D\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=\oint_L Pdx+\oint_L Qdy$$

即
$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L Pdx+Qdy$$

2°设区域D是由一条光滑或分段光滑闭曲线围成（如图19.13） 可用一条或几条光滑曲线（或直线）将闭区域D分

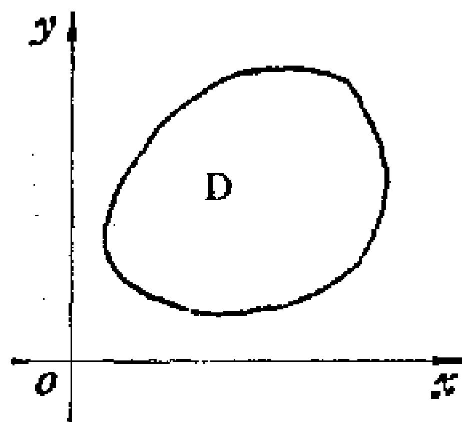


图19.12

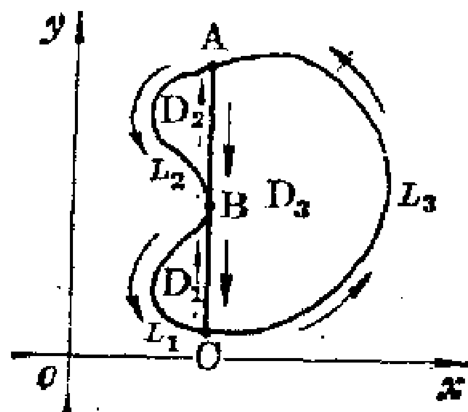


图19.13

成几个既是D_x型又是D_y型小区域，然后，根据1°写出每一小区域的格林公式，并将这些等式左右两边分别相加，即可证明格林公式成立。

如图19.13 用直线段$\overline{ABC}$将区域D分成三个既是D_x型又是D_y型的小区域D_1，D_2和D_3。L_1, L_2, L_3分别是D_1, D_2, D_3的边界中与L重合部分，且$L_1+L_2+L_3=L$，于是

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy+$$

$$\iint_{D_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy+\iint_{D_3}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\oint_{L_1+\overline{CB}}Pdx+Qdy+\oint_{L_2+\overline{BA}}Pdx+Qdy+\oint_{L_3+\overline{ABC}}Pdx+Qdy$$

$$=\oint_{L_1+L_2+L_3}Pdx+Qdy=\oint_L Pdx+Qdy$$

3°设区域D由两条（或两条以上的）闭曲线所围成（如图19.14）。这时区域D是有洞的复连通区域。对于这种区域，可适当添加直线段$\overline{AB}$（当然曲线弧也可以），把区域转化为2°的情形来处理。

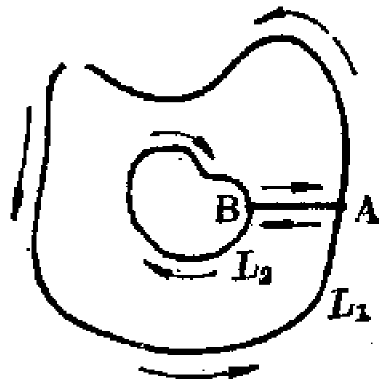


图19.14

在图19.14 中，连接了直线段$\overline{AB}$后，则区域D的边界曲线由L_1，$\overline{AB}$，L_2，$\overline{BA}$组成。根据2°，有

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\oint_{L_1+\overline{AB}+L_2+\overline{BA}}Pdx+Qdy$$

$$=\oint_{L_1}Pdx+Qdy+\int_{\overline{AB}}Pdx+Qdy+\oint_{L_2}Pdx+Qdy$$

$$+\int_{\overline{BA}} Pdx+Qdy$$

$$=\oint_{L_1} Pdx+Qdy+\oint_{L_2} Pdx+Qdy$$

$$=\oint_L Pdx+Qdy$$ □

如果采用向量形式记法，(19.21)式又可改写为

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L \vec{F}\cdot\vec{dl}$$

其中$\vec{F}=P\vec{i}+Q\vec{j}$，$\vec{dl}=dx\vec{i}+dy\vec{j}$.

格林公式给出了平面区域 D 上的二重积分同沿该区域的边界曲线L的第二型曲线积分之间的联系，是数学分析中的一个非常重要的公式。格林公式在数学分析、复变函数以及偏微分方程中都有着重要应用.

例1　应用格林公式，计算闭路积分

$$I=\oint_L x^2ydx+y^2dy$$

其中 L是由曲线 $y^3=x^2$与直线 $y=x$连接起来的闭曲线（如图19.15）.

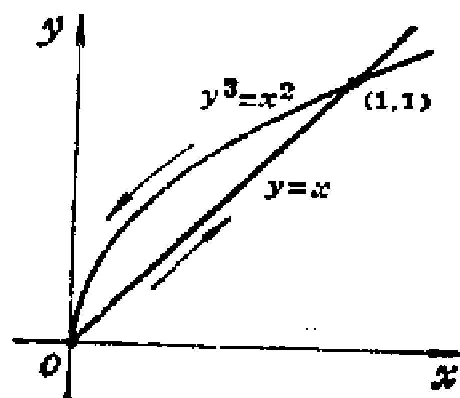


图19.15

解　$P(x,y)=x^2y, Q(x,y)=y^2$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=x^2,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=0$$

由格林公式，有

$$I=\oint_L x^2ydx+y^2dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\iint_D(0-x^2)dxdy=-\int_0^1dx\int_x^{x^{\frac{2}{3}}}x^2dy$$

$$=-\int_0^1(x^{\frac{8}{3}}-x^3)dx=-\frac{1}{44}$$

在格林公式中，如果令

$$Q(x,y)=x,\quad P(x,y)=-y$$

则

$$\oint_L -ydx+xdy=\oint_L xdy-ydx$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_D\left(\frac{\partial x}{\partial x}-\frac{\partial(-y)}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\iint_D[1-(-1)]dxdy=2\iint_D dxdy=2S$$

其中 S为边界曲线 L所围成的平面区域 D的面积。于是，有

$$S=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx \tag{19.22}$$

例2　求椭圆 $x=a\cos t,\ y=b\sin t,(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的面积。

解　$x=a\cos t,\ y=b\sin t, dx=-a\sin t dt,\ dy=b\cos t dt,$ 由公式(19.22)，有

$$S=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a\cos t\cdot b\cos t$$

$$-b\sin t(-a\sin t)]\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(ab\cos^2 t+ab\sin^2 t)dt$$

$$=\frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}dt=\pi ab$$

§19.4　曲线积分与路无关的条件

我们在§19.2 中已经看到，在有共同的始点和终点的曲线积分中，有的曲线积分，如例2 中的几个积分，由于所沿的路线不同，其积分值也不同；有的曲线积分，如例3 中的几个积分，虽然所沿的路线不同，但积分值却相等，即曲线积分值只与始点和终点的位置有关，而与积分路线无关。那么究竟曲线积分满足什么条件时，积分与路线无关呢？

下面的定理回答了这个问题。

定理19.4 如果函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$及其偏导数$\frac{\partial P}{\partial y}$，$\frac{\partial Q}{\partial x}$在单连通区域$D$上连续，则下列四个命题互相等价：

1° 曲线积分

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

只与区域D内始点A和终点B有关，而与连接A、B二点的积分路线无关。

2° 表达式

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

在区域D上是某一函数$F(x,y)$的全微分，即

$$dF(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

3° 在区域D内每一点(x,y)，恒有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

4° 沿D中任一光滑或分段光滑闭曲线L，皆有

$$\oint_L Pdx+Qdy=0$$

证明 1°$\Longrightarrow$2° 设曲线$\overset{\frown}{AB}$始点$A(x_0,y_0)$，终点$B(x,y)$为D内任意一点。由于曲线积分

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

与路线无关，因此该曲线积分是点$B(x,y)$的函数，设

$$F(x,y)=\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

$$=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy①$$

① $\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$表示只与始点$(x_0,y_0)(A)$和终点$(x,y)(B)$有关的曲线积分。

取 Δx 充分小，使得 $C(x+\Delta x,y)\in D$. 因为 $\overline{BC}$ 平行 x 轴（如图 19.16），所以 $dy=0$. 根据曲线积分与路无关及曲线积分的性质，有

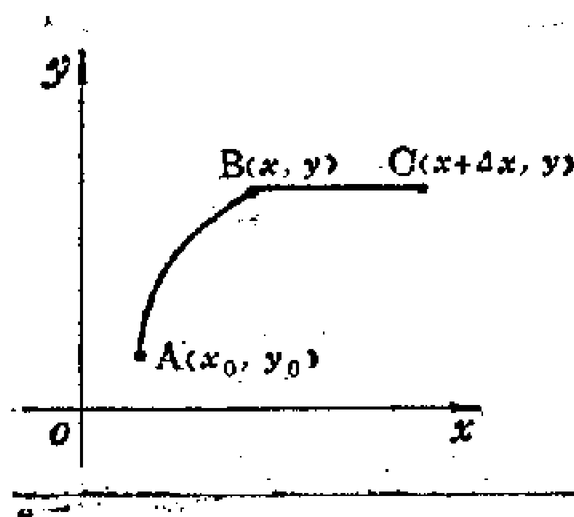


图19.16

$$F(x+\Delta x,y)=\int_{\widehat{AB}} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$$

$$+\int_{\overline{BC}} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=F(x,y)+\int_x^{x+\Delta x} P(x,y)\,dx$$

从而

$$F(x+\Delta x,y)-F(x,y)=\int_x^{x+\Delta x} P(x,y)\,dx$$

因为 $P(x,y)$连续，所以，根据积分中值定理，有

$$\int_x^{x+\Delta x} P(x,y)\,dx=P(x+\theta\Delta x,y)\Delta x \quad (0<\theta<1)$$

于是
$$\frac{F(x+\Delta x,y)-F(x,y)}{\Delta x}=P(x+\theta\Delta x,y) \qquad (1)$$

对（1）式，令 $\Delta x\to 0$，两边取极限，因为$P(x,y)$在区域D内连续，所以，

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x,y)-F(x,y)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}P(x+\theta\Delta x,$$

$$y)=P(x,y)$$

同理可证

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=Q(x,y)$$

因此，表达式 $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$是函数

$$F(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

的全微分，即

$$dF(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

$2^\circ\Longrightarrow3^\circ$ 设在区域D内存在函数 $F(x,y)$，使得

$$dF(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

由此可知，对于D内任意一点(x,y)有

$$P(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x},\quad Q(x,y)=\frac{\partial F}{\partial y}$$

由题设$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}$，$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}$在$D$内连续，根据定理，$\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}$，所以，在$D$内任意一点$(x,y)$有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$3^\circ\Longrightarrow4^\circ$ 设L为D中任一光滑或分段光滑闭曲线，它所围成的区域为Ω。由于D为单连通区域，那么Ω必含在D内。由题设知，区域Ω及其边界L满足格林公式条件，应用格林公式，并注意在D内恒有$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，即$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\equiv0$，有

$$\oint_L Pdx+Qdy=\iint_\Omega\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0$$

$4^\circ\Longrightarrow1^\circ$ 设$\overset{\frown}{AmB}$与$\overset{\frown}{AnB}$为区域D内连接A(始点)、B(终点)二点的任意两条光滑或分段光滑曲线（如图19.17），由4°和第二型曲线积分的性质，有

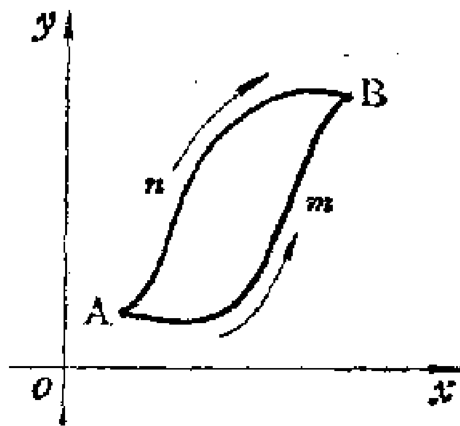


图19.17

$$\int_{\overset{\frown}{AmB}}Pdx+Qdy-\int_{\overset{\frown}{AnB}}Pdx+Qdy$$

$$=\int_{\widehat{AnB}} Pdx+Qdy+\int_{\widehat{BmA}} Pdx+Qdy$$

$$=\oint_{\widehat{AnBmA}} Pdx+Qdy=0$$

于是，
$$\int_{\widehat{AnB}} Pdx+Qdy=\int_{\widehat{AmB}} Pdx+Qdy$$

这就证明了曲线积分$\int_{\widehat{AB}} Pdx+Qdy$只与区域$D$内的始点$A$和终点$B$有关，而与连接$A$、$B$二点的积分路线无关。

综上所述，我们证明了$1°\Longrightarrow 2°\Longrightarrow 3°\Longrightarrow 4°\Longrightarrow 1°$，即定理19.4中的四个命题是互相等价的。 □

应用定理19.4中的3°，不难证明，§19.2 中的例 3 所给出的曲线积分

$$\int_{\widehat{AB}} 2xydx+x^2dy$$

是与路无关的，因此沿四条不同的路线其积分值皆等于1．事实上，

$$P(x,y)=2xy,\quad Q(x,y)=x^2$$

于是，

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=2x=\frac{\partial P}{\partial y}$$

根据定理19.4知，曲线积分$\int_{\widehat{AB}} 2xydx+x^2dy$与路无关。

由定理19.4知，表达式$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$是某个函数$F(x,y)$的全微分的充要条件是：在区域D内任意一点(x,y)，恒有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

这时函数 $F(x,y)$ 称为表达式 $P(x,y)dx+Q(x,y)\ dy$ 的**原函数**。

由定理19.4的证明过程知，表达式 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 的原函数是始点固定（(x_0,y_0)），而终点 (x,y) 任意变动的曲线积分

$$F(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

由于曲线积分

$$F(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

与积分路线无关，于是在求原函数时，可以选择便于积分的路线，如图19.18，可选择折线 ACB。

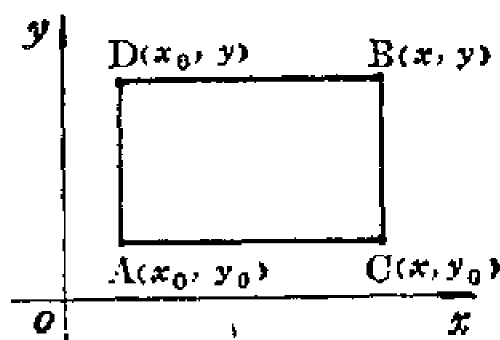


图19.18

在线段 $\overline{AC}$ 上：$y=y_0$，$dy=0$，于是，

$$\int_{\overline{AC}}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx$$

在线段 $\overline{CB}$ 上：$x=x$，$dx=0$，于是

$$\int_{\overline{CB}}P(x,y)dx+Q(x,y)\ dy=\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy$$

由曲线积分的性质

$$F(x,y)=\int_{\widehat{AB}}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

$$=\int_{\overline{AC}}P(x,y)dx+Q(x,y)\ dy+\int_{\overline{CB}}P(x,y)dx+Q(x,y)\ dy$$

$$=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\ dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy \tag{19.23}$$

同样，也可选择折线 ADB，这时有

$$F\ (x,y)\ =\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy+\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx \tag{19.24}$$

例1 判别表达式

$$(4x^3y^3-3y^2+5)dx+(3x^4y^2-6xy-4)dy$$

是否是某函数的全微分，如是，求此表达式的原函数。

解 因为 $P(x,y)=4x^3y^3-3y^2+5, Q(x,y)=3x^4y^2-6xy-4,$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=12x^3y^2-6y\ =\frac{\partial Q}{\partial x}$$

所以，根据定理19.4知，表达式 $(4x^3y^3-3y^2+5)dx+(3x^4y^2-6xy-4)dy$ 是某函数 $F(x,y)$的全微分。

下面求原函数 $F(x,y)$。为了计算简便起见，取 $(x_0,y_0)=(0,0)$，于是，由公式(19.23)有，原函数

$$F(x,y)=\int_0^x 5dx\ +\int_0^y (3x^4y^2-6xy-4)dy+c$$

$$=5x+\left(3x^4\cdot\frac{y^3}{3}-6x\cdot\ \frac{y^2}{2}-4y\right)\Bigg|_0^y+c$$

$$=x^4y^3-3xy^2-4y+5x+c$$

例2 判别表达式

$$y\cos x dx+(3y^2+\sin x)dy$$

是否是某函数的全微分，如是，求此表达式的原函数

解 因为 $P(x,y)=y\cos x,\quad Q(x,y)=3y^2+\sin x$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\cos x=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

所以，根据定理19.4，表达式 $y\cos x dx+(3y^2+\sin x)dy$ 是某函数$F(x,y)$的全微分。

为求原函数$F(x,y)$，令 $(x_0,y_0)=(0,0)$由公式 (19.23) 得原函数

$$F(x,y)=\int_0^x 0\cdot\cos x dx+\int_0^y (3y^2+\sin x)dy+c$$
$$=y^3+y\sin x+c$$

§19.5 第一型曲面积分

同第一型曲线积分一样，由计算曲面质量问题可以导出第一型曲面积分定义，这里不再重述，直接给出第一型曲面积分的定义。

一 第一型曲面积分的定义

设曲面 S是光滑或分片光滑①的连续曲面. 函数$f(x,y,z)$是定义在曲面 S上的有界函数，给曲面 S 任意分割T，将曲面S分成 n个小曲面块

$$\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots, \Delta S_n$$

在 ΔS_i 上任取一点(ξ_i, η_i, ζ_i)，作和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$$

其中 ΔS_i 表示小曲面块ΔS_i 的面积。

定义 如果不论分法T如何，也不论点$(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\in\Delta S_i$的取法如何，只要最大的小曲面块的直径$\Delta d$② $\to 0$，和数$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i,$

①如果曲面S上每一点处都存在切平面，且切平面的位置随着曲面 S 上的点的连续变动而连续变动，则称曲面 S为光滑曲面。如果曲面 S 由方程$z=z(x,y)$，$(x,y)\in D$ 给出，曲面 S光滑的充要条件是：$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 皆在区域D 上连续.

如果将曲面 S 分成有限小块，每一小块都是光滑的，则称曲面 S 为分片光滑曲面。

②Δd_i 是小曲面块 ΔS_i 上任意二点 $P(x,y,z)$，$Q(x',y',z')$ 的距离的上确界，即

$$\Delta d_i=\sup_{P,Q\in\Delta_i}\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$
$$\Delta d=\max\{\Delta d_1, \Delta d_2, \cdots, \Delta d_n\}$$

$\zeta_i)\Delta S_i$ 存在极限，设极限是I，即

$$\lim_{\Delta l\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i = I$$

则称 I为函数 $f(x,y,z)$在曲面 S 上的第一型曲面积分，记作

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \lim_{\Delta l\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i \qquad (19.25)$$

第一型曲面积分有与第一型曲线积分完全类似的性质，读者不难仿照第一型曲线积分的性质写出第一型曲面积分的性质，这里不再重述。

二 第一型曲面积分的计算

关于第一型曲面积分的计算，我们有如下的定理：

定理19.5 设光滑曲面S 由函数

$$z = z(x,y),\quad (x,y)\in D$$

给出，如果函数 $f(x,y,z)$在曲面 S上连续，则有

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f[x,y,z(x,y)]\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy \qquad (19.26)$$

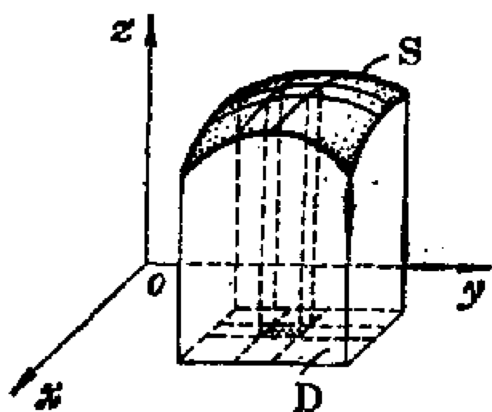


图19.19

证明 任给曲面 S一个分割，将曲面 S分成 n个小曲面块

$$\Delta S_1,\Delta S_2,\cdots,\Delta S_n$$

将这些小曲面块投影到 xy 面上，就得到投影区域D 的一个分割

$$\Delta D_1,\Delta D_2,\cdots,\Delta D_n$$

（如图19.19）。由曲面面积计

算公式，有

$$\Delta S_i = \iint_{\Delta D_i} \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\ dxdy$$

根据积分中值定理有

$$\Delta S_i = \sqrt{1 + z'^2_x(\xi_i^*, \eta_i^*) + z'^2_y(\xi_i^*, \eta_i^*)}\Delta D_i$$
$$(\xi_i, {}^*\eta_i^*) \in \Delta D_i$$

从而

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f[\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i)] \cdot ①$$

$$\sqrt{1 + z'^2_x(\xi_i^*, \eta_i^*) + z'^2_y(\xi_i, {}^*\eta_i^*)}\ \Delta D_i = \sum_{i=1}^{n} f[\xi_i, \eta_i,$$

$$z(\xi_i, \eta_i)]\sqrt{1 + z'^2_x(\xi_i, \eta_i) + z'^2_y(\xi_i, \eta_i)}\ \Delta D_i +$$

$$\sum_{i=1}^{n} f[\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i)][\sqrt{1 + z'^2_x(\xi_i^*, \eta_i^*) + z'_y{}^2(\xi_i^*, \eta_i^*)}$$

$$-\sqrt{1 + z'^2_x(\xi_i, \eta_i) + z'^2_y(\xi_i, \eta_i)}\ ]\Delta D_i \qquad (1)$$

因为函数$\sqrt{1 + z'^2_x(x, y) + z'^2_y(x, y)}$在闭区域 D 上连续，所以必在 D 上一致连续。于是对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $\rho = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta$时有

$$\left| \sqrt{1 + z'^2_x(x_1, y_1) + z'^2_y(x_1, y_1)} - \sqrt{1 + z'^2_x(x_2, y_2) + z'^2_y(x_2\ y_2)}\ \right| < \varepsilon$$

特别是当所有小曲面块中的最大直径$\Delta d < \delta$时，就必然使所有投影小区域中的最大直径 $\Delta\lambda < \delta$，因此，有

$$\left| \sqrt{1 + z'^2_x(\xi_i^*, \eta_i^*) + z'^2_y(\xi_i^*, \eta_i^*)} - \sqrt{1 + z'^2_x(\xi_i, \eta_i) + z'^2_y(\xi_i, \eta_i)}\ \right| < \varepsilon$$

又因函数 $f[x, y, z(x, y)]$在闭区域上连续，所以必有界。即存在

①因为点(ξ_i, η_i, ζ_i)在曲面 S上，即 $\zeta_i = z(\xi_i, \eta_i)$。

$M>0$，使得对任意 $(x,y)\in D$，有

$$|f[x,y,z(x,y)]|<M$$

于是，我们有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f[\xi_i,\eta_i,z(\xi_i,\eta_i)][\sqrt{1+z'^2_x(\xi_i^*,\eta_i^*)+z'^2_y(\xi_i^*,\eta_i^*)}\right.$$

$$\left.-\sqrt{1+z'^2_x(\xi_i,\eta_i)+z'^2_y(\xi_i,\eta_i)}\,]\Delta D_i\right|<M\cdot\varepsilon\cdot|D|$$

其中$|D|$为区域D的面积。

令$\Delta\lambda\to 0$，对（1）式右端第二项取极限，有

$$\lim_{\Delta\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\{f[\xi_i,\eta_i,z(\xi_i,\eta_i)][\sqrt{1+z'^2_x(\xi_i^*,\eta_i^*)+z'^2_y(\xi_i^*,\eta_i^*)}$$

$$-\sqrt{1+z'^2_x(\xi_i,\eta_i)+z'^2_y(\xi_i,\eta_i)}\,]\Delta D_i\}=0 \qquad (2)$$

最后，令$\Delta d\to 0$，对（1）式两边取极限，根据第一型曲面积分及二重积分的定义，并注意（2）式，有

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\iint_D f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,dxdy$$

例1 计算第一型曲面积分 $I=\iint_S z^3dS$，其中 S 是上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 在圆锥 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 内的部分（如图19.20）。

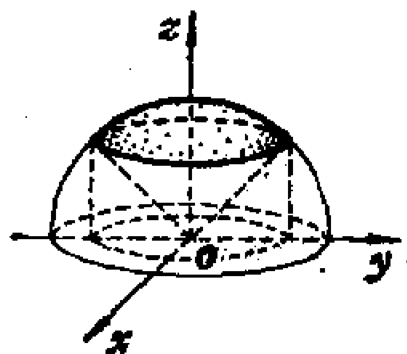


图19.20

解 先求 S在 xy 面上的投影区域D。从方程$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$和方程 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 消去 z得

$$x^2+y^2=\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2$$

即D为由圆周 $x^2+y^2=\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2$ 围成的圆域。

$$z'_x=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\quad z'_y=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}=\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2}$$

$$=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

由公式(19.26)，并利用极坐标变换，有

$$I=\iint_D(a^2-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=a\iint_D(a^2-x^2-y^2)dxdy=a\iint_D(a^2-r^2)rdrd\theta$$

$$=a\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{\frac{a}{2}}}(a^2-r^2)rdr=\frac{3a^5}{16}\int_0^{2\pi}d\theta$$

$$=\frac{3\pi a^5}{8}$$

例2 计算第一型曲面积分 $I=\iint_S|xyz|\,dS$，式中 S 为旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $z=1$ 所割下的部分。

解 二曲面的交线 $\begin{cases}z=1\\z=x^2+y^2\end{cases}$，投影到$xy$ 面上，得给定曲面的投影区域 D：$x^2+y^2\leqslant1$。

设S_1 为曲面S 在第一卦限内的部分，由于曲面 S关于xz面，关于yz面皆对称。且被积函数 $|xyz|$ 关于 xz 面和 yz 面也对称（如图19.21）。因此

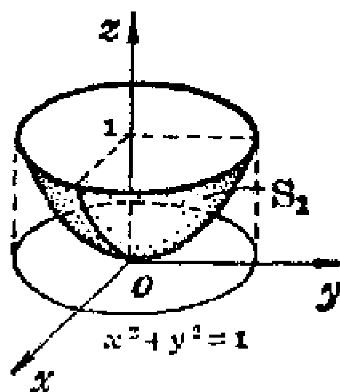


图19.21

$$I=\iint_S|xyz|\,dS=4\iint_{S_1}xyz\,dS$$

$$z'_x=2x,\quad z'_y=2y,\quad \sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}=\sqrt{1+4(x^2+y^2)}$$

根据公式(19.26)，有

$$I=4\iint_{D_1}xy(x^2+y^2)\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,dxdy$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\sin\theta\cos\theta\cdot r^5\sqrt{1+4r^2}\,dr$$

令 $\sqrt{1+4r^2}=u$, $r^2=\frac{u^2-1}{4}$, $rdr=\frac{udu}{4}$, $r=0$, $u=1$;

$r=1$, $u=\sqrt{5}$. 于是，

$$I=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_1^{\sqrt{5}}\left(\frac{u^2-1}{4}\right)^2 u\frac{u}{4}du$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin2\theta d\theta\cdot\int_1^{\sqrt{5}}\frac{1}{64}(u^6-2u^4+u^2)du$$

$$=\frac{1}{32}\left(\frac{u^7}{7}-\frac{2}{5}u^5+\frac{u^3}{3}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{25\sqrt{5}}{84}-\frac{1}{420}=\frac{125\sqrt{5}-1}{420}$$

§19.6 第二型曲面积分

一 曲面的侧

正象第二型曲线积分要涉及到曲线的方向一样，第二型曲面积分也要涉及到曲面的方向，即所谓的曲面侧的概念。

在通常情形下，从直观上是很容易理解曲面侧的概念的。例如，若曲面S由函数

$$z=f(x,y),\ (x,y)\in D$$

给出，那么，我们不难从直观上区别曲面的上侧和下侧.(如图19.22)．又如，若曲面 S 是一个闭曲面，我们很自然地把曲面 S上一点M处的法线$\vec{n}$ (M)指向曲面S的外面的，称为曲面S的**外侧**。另一侧称为曲面 S 的**内侧**（如图19.23）。

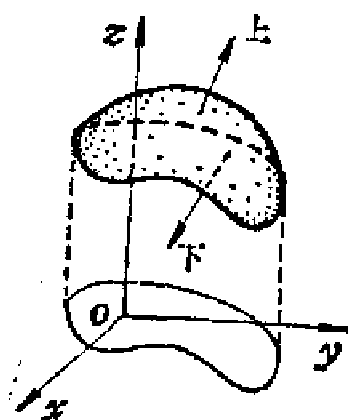


图19.22

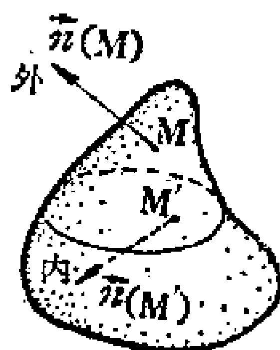


图19.23

关于一般曲面侧的概念我们作如下规定：

设曲面 S 是一光滑曲面，在 S 上任取一定点 M_0，并且在点 M_0 处作一法线，此法线有两个方向，我们选定其中一个指向为正方向，另一个指向就是负方向．设一动点 M，从定点 M_0 出发，沿曲面 S 上任意一条过点 M_0 的，且不与曲面边界相交的连续闭曲线 C 移动，这时动点 M 的法线正方向，就从点 M_0 的法线正方向开始连续变动，最后当点 M 沿闭曲线 C 又回到点 M_0 位置时，若这时点 M 的法线正方向与点 M_0 法线正方向相一致，则称曲面 S 为**双侧曲面**；若这时点 M 的法线正方向与点 M_0 的法线正方向恰好相反，则称曲面 S 为**单侧曲面**．

我们通常见到的曲面，绝大多数是双侧曲面，单侧曲面是少见的．典型的单侧曲面是所谓的麦比乌斯① 带．它的作法如下：取一矩形纸条 $ABCD$，将 CD 端扭转180°后与另一端粘在一起，并使 C 与 A 重合，D 与 B 重合．容易验证这个带状曲面是单侧的．事实上，在曲面上任取一条与边界平行的闭曲线 L，动点 M 从 L 上任一点 M_0 出发，此时法线正方向与点 M_0 的法线正方向一致，当点 M 沿 L 连续移动一周，又回到 M_0 时，这时的点 M 的法线正方向与点 M_0 处法线正方向恰好相反（如图 19.24）．所

①麦比乌斯：Möbius, A.F.德国数学家．1790—1868．

以麦比乌斯带是单侧的．麦比乌斯带的单侧性，还可以如下说明：用一种颜色涂抹麦比乌斯带，只要从带上某一处起，向着一个方向，不需要经过边界，循环涂两圈时，就能将颜色涂遍带子的全部．

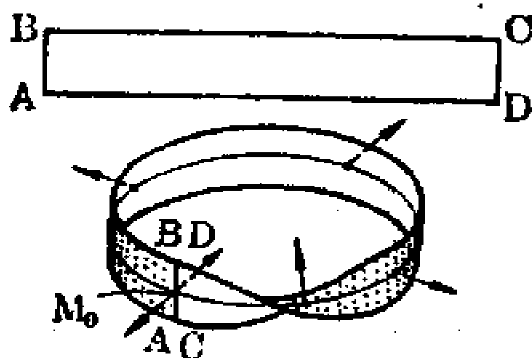


图19.24

设S是一个双侧曲面．如果曲面S上任意一点M_0确定了法线的正方向，则曲面S上其他任何点M处的法线正方向也随之确定，这就给出了曲面S的正侧．如果改变原先选定的法线正方向，则曲面上其它任何点的法线正方向也都跟着改变，这样就确定曲面的负侧．因此，对双侧曲面要确定它的侧，只须在曲面上任意一点选定法线的一个方向作为正向就可以了．

设函数$z=f(x,y)$及其偏导数$\frac{\partial f}{\partial x}$ $\frac{\partial f}{\partial y}$在区域$D$上连续，则函数$z=f(x,y)$给出了一个展布在区域$D$上的光滑曲面．由§17.6①知它的三个法线方向余弦为：

$$\cos\alpha=\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}$$

$$\cos\beta=\frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}$$

① 令$F(x,y,z)=z-f(x,y)=0$，由§17.6法线方向余弦公式推得．

其中根式前的“±1”都取正或都取负。它表示法线的两不同的方向。根式前取正或取负与曲面的正侧有关。

例如，如果在根式前取正号（当然三个方向余弦中的根式都必须取正号），此时$\cos\gamma>0$，这表示法线的正向与z轴的正向夹角γ是锐角，即法向量指向曲面的上方（如图19.22）这就是通常所说的取上侧为正。如果取负号，即$\cos\gamma<0$，它表示法线正方向与z轴正方向夹角为钝角，即法向量指向曲面的下方，也就是通常所说的取下侧为正。

二　第二型曲面积分的定义

设S是光滑或分片光滑的双侧曲面，并选定一侧为正。函数$f(x,y,z)$是定义在曲面S上的有界函数。给曲面S的任意分割T，将曲面S分成n个小曲面块

$$\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots, \Delta S_n$$

在每个小曲面块ΔS_i上任取一点$M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$，作和

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta D_{ixy}=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta D_{ixy}$$

其中ΔD_{ixy}表示小曲面块$S_i(i=1,2,\cdots,n)$在xy面的投影面积。当ΔS_i的法线正方向与z轴正向夹角为锐角时，投影面积取正，否则取负。

定义　如果不论分法T如何，也不论点$M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$的取法如何，只要最大的小曲面块的直径$\Delta d\to 0$，和数$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta D_{ixy}$存在极限，设极限是$I$，即

$$\lim_{\Delta d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta D_{ixy}=\lim_{\Delta d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta D_{ixy}=I$$

则称I为函数$f(x,y,z)$展布在曲面S上的关于xy平面的第二型曲面积分。记作

$$\iint_S f(x,y,z)\,dx\,dy=\lim_{\Delta d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta D_{ixy} \quad (19.27)$$

或
$$\iint_S f(M)\ dx\,dy=\lim_{\Delta d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\ \Delta D_{ixy}$$

同样可定义函数 $f(x,y,z)$展布在曲面 S上关于 yz面的第二型曲面积分为极限

$$J=\lim_{\Delta d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta D_{iyz}$$

即
$$\iint_S f(x,y,z)\ dy\,dz=\lim_{\Delta d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta D_{iyz} \quad (19.28)$$

关于zx面的第二型曲面积分为极限

$$K=\lim_{\Delta d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta D_{izx}$$

即
$$\iint_S f(x,y,z)\,dz\,dx=\lim_{\Delta d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta D_{izx} \quad (19.29)$$

如果第二型曲面积分$\iint_S P(x,y,z)\,dy\,dz$, $\iint_S Q(x,y,z)\,dz\,dx$, $\iint_S R(x,y,z)\,dx\,dy$ 皆存在，则称它们的和为一般形状的第二型曲面积分，并记作

$$\iint_S P(x,y,z)\,dy\,dz+Q(x,y,z)\,dz\,dx+R(x,y,z)\,dx\,dy$$

$$=\iint_S P\,dy\,dz+\iint_S Q\,dz\,dx+\iint_S R\,dx\,dy$$

三　第二型曲面积分的性质

（1）如果第二型曲面积分

$$\iint_S R_1 dxdy \text{ 与 } \iint_S R_2 dxdy$$

皆存在，则第二型曲面积分

$$\iint_S (aR_1+bR_2)dxdy$$

也存在S（式中a与b为常数），且

$$\iint_S (aR_1+bR_2)dxdy = a\iint_S R_1 dxdy + b\iint_S R_2 dxdy$$

（2）如果曲面S是由曲面S_1和S_2组成①，且

$$\iint_{S_1} Rdxdy \text{ 与 } \iint_{S_2} Rdxdy$$

皆存在，则第二型曲面积分$\iint_S Rdxdy$也存在，且

$$\iint_S Rdxdy = \iint_{S_1} Rdxdy + \iint_{S_2} Rdxdy$$

（3）如果用S^-表示双侧曲面S与选定的一侧（正侧）相反的一侧（负侧），则

$$\iint_{S^-} Rdxdy = -\iint_S Rdxdy$$

性质（1）、（2）、（3）换为关于yz面和zx面的第二型曲面积分也成立。从而对于一般形状的第二型曲面积分也成立。

$$\iint_{S^-} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy = -\iint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

四 第二型曲面积分的计算

关于第二型曲面积分的计算，我们有如下的定理：

①曲面S_1与S_2可能不相交，即无公共点；也可能有公共边界线，但无公共内点，曲面S_1与S_2假设是光滑或分片光滑的。

定理19.6 设函数 $f(x,y,z)$在光滑曲面 S

$$z=z(x,y),\quad (x,y)\in D$$

上连续．如果取曲面 S 的上侧为正，则有

$$\iint_S f(x,y,z)\,dxdy=\iint_D f[x,y,z(x,y)]dxdy \quad (19.30)$$

证明 因为曲面 S的上侧为正，所以 Δ_{ixy} 皆为正，又由于曲面方程为 $z=z(x,y)$，于是 $\zeta_i=z(\xi_i,\eta_i)$，从而有

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta D_{ixy}=\sum_{i=1}^{n}f[\xi_i,\eta_i,z(\xi_i,\eta_i)]\Delta D_i \quad (1)$$

（1）式右端的 $\Delta D_i=\Delta D_{ixy}$.

（1）式右端是连续函数 $f[x,y,z(x,y)]$在区域 D上的二重积分的积分和，因此根据二重积分与第二型曲面积分的定义，令$\Delta d\to 0$，对（1）式两端取极限，有

$$\iint_S f(x,y,z)\,dxdy=\iint_D f[x,y,z(x,y)]dxdy \qquad \square$$

同理，假设函数 $f(x,y,z)$在光滑曲面 S

$$y=y(z,x),\quad (z,x)\in D$$

上连续，如果取曲面 S 的法线方向与 y轴正向成锐角的那一侧为正，则

$$\iint_S f(x,y,z)\;dzdx=\iint_S f[x,y(z,x),z]dzdx \quad (19.31)$$

假设函数 $f(x,y,,z)$在光滑曲面S

$$x=x(y,z),\quad (y,z)\in D$$

上连续，如果取曲面 S 的法线方向与 x轴正向成锐角的那一侧为正，则

$$\iint_S f(x,y,z)\;dydz=\iint_D f[x(y,z),y,z]dydz \quad (19.32)$$

假设 S是由平行 z轴的母线构成的柱面，这时由于所有的投影面积$D_{ixy}=0$，于是

$$\sum_{i=0} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta D_{ixy}\equiv 0$$

从而
$$\iint_S f(x,y,z)\,dxdy=\lim_{\Delta d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta D_{ixy}=0 \quad (19.33)$$

同理，若 S是平行 y轴（或 x轴）的母线构成的柱面，则

$$\iint_S f(x,y,z)\,dzdx=0 \quad \left(\text{或}\iint_S f(x,y,z)\,dydz=0\right) \quad (19.34)$$

如果 S是一个闭曲面，则用符号

$$\iint_S P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy$$

表示沿闭曲面 S外侧进行的一般形状的第二型曲面积分。

五　两种曲面积分的联系

设光滑曲面 S由函数 $z=z(x,y)$，$(x,y)\in D$ 给出，并取上侧为正，则展布在曲面 S上的正侧的连续函数 $f(x,y,z)$ 的第二型曲面积分

$$\iint_S f(x,y,z)\,dxdy=\lim_{\Delta d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta D_{ixy}$$

由曲面面积公式，得

$$\Delta S_i=\iint_{D_{ixy}}\sqrt{1+z'^2_x(x,y)+z'^2_y(x,y)}\,dxdy$$

$$=\iint_{D_{ixy}}\frac{1}{\cos\gamma}\,dxdy$$

其中γ是曲面ΔS_i上的任意一点的法线正方向与 z轴正方向的交角，是关于 x,y的二元函数．由题设 $\cos\gamma$在闭区域 D_{ixy} 上连续，根据积分中值定理，在闭区域ΔD_{ixy}内必存在一点 $(\xi_i^*,\eta_i^*,\zeta_i^*)$，使得该点法线正方向与 z轴正向夹角 γ_i^*满足等式

$$\Delta S_i=\frac{1}{\cos\gamma_i^*}\Delta D_{ixy}\text{，即}\quad \Delta D_{ixy}=\cos\gamma_i^*\Delta S_i$$

从而

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta D_{ixy} = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos\gamma_i^* \Delta S_i \qquad (2)$$

设 $\cos\gamma_i$表示曲面ΔS_i上的点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 的法线正方向与z轴正方向交角余弦，由于 $\cos\gamma$在 ΔD_{ixy}上连续，于是，有

$$\lim_{\Delta d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\cos\gamma_i^* - \cos\gamma_i)\Delta S_i = 0①$$

因此由（2）式，有

$$\lim_{\Delta d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta D_{ixy}$$

$$= \lim_{\Delta d \to 0} \left\{ \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos\gamma_i \Delta S_i + \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\cos\gamma_i^* - \cos\gamma_i)\Delta S_i \right\} = \lim_{\Delta d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos\gamma_i \Delta S_i +$$

$$\lim_{\Delta d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\cos\gamma_i^* - \cos\gamma_i)\Delta S_i$$

$$= \iint_S f(x, y, z) \cos\gamma dS$$

即

$$\iint_S f(x, y, z)\ dxdy = \iint_S f(x, y, z) \cos\gamma dS \qquad (19.35)$$

注意：如果将曲面的上侧改为下侧，则(19.35) 式的左边要改变符号；而右端积分中的角 γ的值也要增加或减少π，从而$\cos\gamma$恰好改变符号，所以右端的积分也相应地改变符号.

同理可证：

$$\iint_S f(x, y, z)\ dydz = \iint_S f(x, y, z) \cos\alpha dS \qquad (19.36)$$

① 见定理19.5中的（2）式的证明.

$$\iint_S f(x,y,z)\, dzdx = \iint_S f(x,y,z)\cos\beta dS \qquad (19.37)$$

上面二式中的 α,β分别是曲面 S 的法线正方向与 x 轴正向和 y轴正向的交角。

最后，对于一般形状的第二型曲面积分，有

$$\iint_S P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dzdx + R(x,y,z)\,dxdy$$

$$= \iint_S [P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]dS$$

$$(19.38)$$

如果令

$$\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}, \quad \vec{n} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\vec{k}$$

则

$$(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS = \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$$

于是(19.38)又可改写为向量形式

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS \qquad (19.39)$$

例1　计算第二型曲面积分

$$I = \iint_S xyz\,dxdy$$

其中 S为柱面$x^2+z^2=a^2$ 在 $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$两卦限内被平面 $y=0$及$y=h$所截下部分的外侧（如图19.25）。

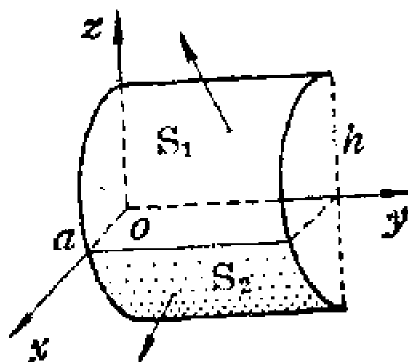


图19.25

解　S 可看作由$S_上$和 $S_下$两片所连接而成，其中$S_上$与$S_下$ 的方程分别为

$$z_上 = \sqrt{a^2-x^2}, \quad z_下 = -\sqrt{a^2-x^2}$$

由题意可知，对$S_上$是沿上侧积分，对$S_下$是沿下侧积分。于是根据第二型曲面积分的性质，有

$$I=\iint\limits_{S_{上}} xyzdxdy+\iint\limits_{S_{下}} xyzdxdy \qquad (3)$$

由图可见，$S_{上}$和$S_{下}$在 xoy坐标面的投影区域D_{xy}皆为矩形：$0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant h$，于是，由（3）式有

$$I=\iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{a^2-x^2}\,dxdy-\iint\limits_{D_{xy}} xy\left(-\sqrt{a^2-x^2}\right)dxdy$$

$$=2\iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{a^2-x^2}\,dxdy=2\int_0^a dx\int_0^h x\sqrt{a^2-x^2}\,ydy$$

$$=h^2\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx=h^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a$$

$$=\frac{a^3h^2}{3}$$

例2　计算积分

$$\iint\limits_S xdydz+ydzdx+zdxdy$$

式中 S为球 $x^2+y^2+z^2=a^2$的外表面。

解　设上半球面 S_1上：$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$；下半球面S_2下：$z=-\sqrt{a-x^2-y^2}$。投影区域 D_{xy}为圆：$x^2+y^2\geqslant a^2$

先计算

$$\iint\limits_S zdxdy=\iint\limits_{S_{上}} zdxdy+\iint\limits_{S_{下}} zdxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy-\iint\limits_{D_{xy}}\left(-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)dxdy$$

$$=2\iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\sqrt{a^2-r^2}\,rdr$$

$$=4\pi\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}(a^2-r^2)\Big|_0^a=\frac{4\pi a^3}{3}$$

由对称性，得

$$\iint_S x\,dydz = \iint_S y\,dzdx = \frac{4\pi a^3}{3}$$

从而，有

$$\iint_S x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy = 3\cdot\frac{4\pi a^3}{3} = 4\pi a^3$$

§19.7 奥—高公式

格林公式给出了平面闭区域上的二重积分与其边界闭曲线上的曲线积分之间的关系，而奥一高公式则给出了空间区域上的三重积分与其边界闭曲面上的曲面积分之间的关系。

定理 19.7 设空间区域V是由光滑或分片光滑的闭曲面S（一片或n片）所围成的连通区域① . 如果函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 及$\frac{\partial P}{\partial x}$，$\frac{\partial Q}{\partial y}$，$\frac{\partial R}{\partial z}$在闭区域$V$上连续，则有

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \oiint_S P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy \tag{19.40}$$

(19.40)式的右端的曲面积分是沿闭曲面 S 外侧进行的。等式(19.40)称为奥一高公式。

证明 设区域V 的上、下侧边界分别为光滑曲面：

$S_{下}$：$z = z_1(x,y)$，$(x,y)\in D_{xy}$；

$S_{上}$：$z = z_2(x,y)$，$(x,y)\in D_{xy}$；

$S_{侧}$：由通过区域V的投影区域 D_{xy}的边界，且平行 z轴的

---

①连通域包括单连通和复连通区域．如果空间区域内任何一个封闭曲面皆可不经过区域外的点而连续地缩为一点，则称此空间区域为单连通区域．例如，由一个简单闭曲面所围成的区域就是单连通区域．不是单连通的连通区域，就称为复连通区域，即区域内至少有一个封闭曲面必须经过区域外的点才能连续地收缩为一点．从直观上看，复连通区域就是有空洞的连通区域．

母线构成的柱面。

这类区域V称为 z—型区域，记作V_z①（如图19.26）。

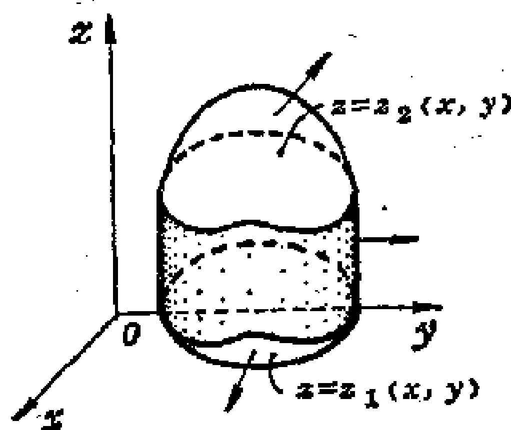


图19.26

对于 V_z型区域，有

$$\iiint_{V_z}\frac{\partial R}{\partial z}\,dxdydz = \oiint_S R\,dxdy$$

事实上，由三重积分计算公式，有

$$\iiint_{V_z}\frac{\partial R}{\partial z}\,dxdydz = \iint_{D_{xy}} dxpy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}dz$$

$$\iint_{D_{xy}}R[x,y,z_2(x,y)]dxdy - \iint_{D_{xy}}R[x,y,z_1(x,y)]dxdy \quad (1)$$

由曲面积分的性质，有

$$\oiint_S Rdxdy = \iint_{S_{上}} Rdxdy + \iint_{S_{下}} Rdxdy + \iint_{S_{侧}} Rdxdy \quad (2)$$

由公式(19.30)有

$$\iint_{S_{下}} Rdxdy = -\iint_{D_{xy}}R[x,y,z_1(xy)]dxdy \quad (3)$$

$$\iint_{S_{上}} Rdxdy = \iint_{D_{xy}}R[x,y,z_2(x,y)]\;dxdy \quad (4)$$

由公式(19.33)，有

$$\iint_{S_{侧}} Rdxdy = 0 \quad (5)$$

将（3）式，（4）式及（5）式之值代入（2）式中得

$$\oiint_S Rdxdy = \iint_{D_{xy}}R[x,y,z_2(x,y)]dxdy -$$

---

①在特殊情形下，V_z型区域侧面的母线平行z轴的柱面可能退缩为一条曲线。

$$\iint_{D_{xy}} R[x,y,z_1(x,y)]dxdy \tag{6}$$

比较（1）式与（6）式，得

$$\iiint_{V_z} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \oiint_S R dxdy \tag{7}$$

同理可证

$$\iiint_{V_y} \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \oiint_S Q dzdx \tag{8}$$

$$\iiint_{V_x} \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \oiint_S P dydz \tag{9}$$

对于一般形状的单连通或复连通区域V，我们可以用一片或几片光滑曲面（双侧）把V分成n个小区域$V_1,V_2,\cdots,V_n$，使每个小区域V_i（$i=1,2,\cdots,n$）同时是V_x型、V_y型和V_z型区域①。从而，由（7）式、（8）式和（9）式，有

$$\iiint_{V_i} \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \oiint_{S_i+\sigma_i} P dydz \tag{10}$$

$$\iiint_{V_i} \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \oiint_{S_i+\sigma_i} Q dzdx \tag{11}$$

$$\iiint_{V_i} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \oiint_{S_i+\sigma_i} R dxdy \tag{12}$$

式中S_i是V_i中的边界曲面与S重合的部分，显然$\sum_{i=1}^{n} S_i = S$，而σ_i是分割V所添加的曲面。将(10)、(11)、(12)式相加，其左边之和为

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\iiint_{V_i} \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz + \iiint_{V_i} \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz + \iiint_{V_i} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz\right.$$

$$= \iiint_{V} \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz + \iiint_{V} \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz + \left.\iiint_{V} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz\right]$$

---

①读者不难仿照V_z型区域的定义，给出V_x型V_y型区域的定义。

$$=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

而右边三式之和，由于$\sum_{i=1}^{n}S_i=S$，而对每个添加曲面都用了正负两侧，故展布在其上的曲面积分恰好消去。从而

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\oiint_{S_i+\sigma_i}Pdydz+\oiint_{S_i+\sigma_i}Qdzdx+\oiint_{S_i+\sigma_i}Rdxdy\right]$$

$$=\oiint_S Pdydz+\oiint_S Qdzdx+\oiint_S Rdxdy$$

$$=\oiint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

由三式的左边之和等于右边之和，得

$$\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=$$

$$+\oiint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy.$$ □

利用奥一高公式可简化某些第二型曲面积分的计算。

例1 利用奥一高公式计算曲面积分

$$I=\oiint_S(x^2-yz)dydz+(y^2-zx)dzdx+(z^2-xy)dxdy$$

其中 S是由三个坐标面及平行于坐标面的平面 $x=a$，$y=a$和$z=a$所围成的正方体的外表面。

解 因为，$P=x^2-yz$，$Q=y^2-zx$，$R=z^2-xy$，所以

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=2x+2y+2z$$

由奥一高公式，得

$$I=2\iiint_V(x+y+z)dxdydz=2\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^a(x+y+z)dz$$

$$=2\int_0^a dx\int_0^a\left(ax+ay+\frac{a^2}{2}\right)dy=2\int_0^a\left(a^2x+\frac{a^3}{2}+\frac{a^3}{2}\right)dx$$

$= 3a^4$

例2 证明，由光滑闭曲面 S所围成的闭区域V 的体积

$$V = \frac{1}{3}\oiint_S x dydz + ydzdx + zdxdy$$

证明 因为 $P = x, Q = y$, $R = z$, 所以

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$$

由奥—高公式，有

$$\oiint_S x dydz + ydzdx + zdxdy = \iiint_V 3dxdydz = 3\iiint_V dxdydz$$

$$= 3V$$

从而，由上式得

$$V = \frac{1}{3}\oiint_S x dydz + ydzdx + zdxdy$$

§19.8 斯托克斯公式

格林公式给出了平面闭区域上的二重积分与其边界闭曲线上的曲线积分之间的关系，把平面闭区域推广到空间曲面块上，就得到了空间曲面S 上的曲面积分，与沿其边界空间闭曲线的线积分之间的关系，这就是本节讨论的斯托克斯公式。

由于闭曲线有方向问题，而曲面又有侧的问题，于是，在未讨论斯托克斯公式之前，先对曲面S及其边界闭曲线L的方向作如下规定：设有一人站在曲面S 的正侧（即人头方向与法线正方向一致），如果当他沿 L行进时，闭曲线所围成的曲面块总在他的左方，则规定人的行进方向为边界闭曲线 L的正向。反之，就是边界闭曲线L 的负向（如图 19.27）。这个法则称为右手法则或右手螺旋法则（用右手作成半握式，使其拇指与其他四指垂直，拇指的方向代表曲面法线的正方向，则其他四指的方向即为曲线的正方向）。

定理19.8 设有双侧光滑曲面块S，其边界L是光滑或分段光滑的闭曲线。如果函数$P(x,y,z,)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$及其一阶偏导数在曲面块S（包含L）上连续，则

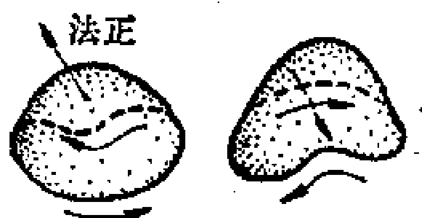


图19.27

$$\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\oint_L Pdx+Qdy+Rdz \qquad (19.41)$$

其中 S的侧与L的方向按右手法则确定．(19.41) 式称为斯托克斯公式。

证明 为了明确起见，不妨设双侧光滑曲面S取上侧为正，它的方程为

$$z=z\ (x,y),(x,y)\in D_{xy}$$

它的边界曲线L在xy面的投影为沿反时针方向进行的闭曲线Γ（如图19.28）．设其参数方程为

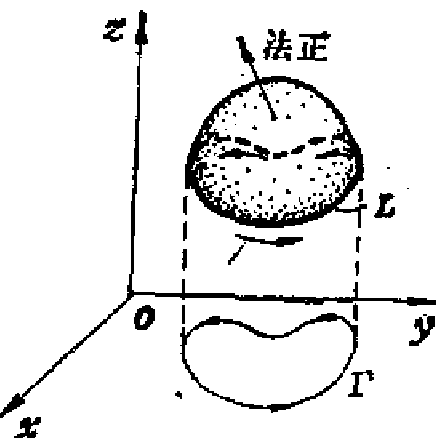


图19.28

$$\Gamma:\ x=\varphi(t),y=\psi(t),\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta$$

则空间曲线L的参数方程为

$$\Gamma:\ x=\varphi(t),\ y=\psi(t),z=f[\psi(t),\psi(t)]=\chi(t),\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta$$

由空间曲线积分的计算公式(19.20)有

$$\int_L Pdx=\int_\alpha^\beta P[\varphi(t),\psi(t),\chi(t)]\ \varphi'(t)dt$$

$$=\int_\alpha^\beta P\{\varphi(t),\psi(t),f[\varphi(t),\psi(t)]\}\varphi'(t)dt$$

$$=\int_L P[x,y,f\ (x,y)]dx \qquad (1)$$

这样所考虑的空间曲线积分就化为平面曲线积分。

令 $P[x,y,f(x,y)]=\varphi(x,y)$，由格林公式和（1）式，有

$$\oint_L Pdx=\int_L \varphi(x,y)\,dx= -\iint_D \frac{\partial \varphi}{\partial y}dxdy \qquad (2)$$

由复合函数的求导法则，有

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}$$

于是

$$\iint_D \frac{\partial \varphi}{\partial y}dxpy=\iint_D\left[\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right]dxdy$$

$$=\iint_S\left[\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right]dxdy$$

$$=\iint_S\left[\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right]\cos\gamma dS \qquad (3)$$

由于光滑曲面正侧的法线的方向余弦

$$\cos\alpha=\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}$$

于是，

$$-\frac{\partial f}{\partial y}=\cos\beta\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

$$=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma},\quad -\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}$$

因此，由两种曲面积分之间的关系(19.35)和(19.37)二式，有

$$\iint_S \left[\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right]\cos\gamma dS=\iint_S \left[\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right]$$

$$\cos\gamma dS=\iint_S \left[\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma-\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta\right]dS$$

$$=\iint_S \frac{\partial P}{\partial y}dxdy-\frac{\partial P}{\partial z}dzdx \qquad (4)$$

将（4）代入（3）中得

$$\iint_D \frac{\partial \varphi}{\partial y}dxdy=\iint_S \frac{\partial P}{\partial y}dxdy-\frac{\partial P}{\partial z}dzdx \qquad (5)$$

再将（5）式代入（2）式，得

$$\oint_L Pdx=\iint_S \frac{\partial P}{\partial z}dzdx-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy \qquad (6)$$

同理，如果曲面 S 的方程为

$$x=x(y,z)\quad (y,z)\in D_{yz}$$

可证明

$$\oint_L Qdy=\iint_S \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy-\frac{\partial Q}{\partial z}dydz \qquad (7)$$

如果曲面 S 的方程为

$$y=y(z,x),\quad (z,x)\in D_{zx}$$

可证明

$$\oint_L Rdz=\iint_S \frac{\partial R}{\partial y}dydz-\frac{\partial R}{\partial x}dzdx \qquad (8)$$

如果给定的曲面 S 既可用 $z=z(x,y)$ 表示，又可用 $y=y(z,x)$ 表示，又可用 $x=x(y,z)$ 表示，那么，（6）、（7）、（8）三式同时成立，将三式相加并合并同类项得

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz$$

$$+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

最后，对于一般形状的光滑双侧曲面块，总可以用曲面上

若干条光滑曲线把它分成n个小曲面块，使得每个小曲面块都可用三种方程（$z=z(x,y)$，$y=y(z,x)$，$x=x(y,z)$）来表示，因而(19.41)式成立.将这些等式相加，并注意在添加的每段光滑曲线上，正负两个方向各积分一次，恰好互相消去，因此，斯托克斯公式(19.41) 成立. □

在§19.4 中，我们利用格林公式讨论了平面曲线积分与路无关的条件. 在这里，我们将利用斯托克斯公式来讨论空间曲线积分与路无关的条件. 为此，要求对所考虑的空间区域V 内的任意简单光滑或分段光滑闭曲线L，必能"张"成一片（非自身相交的）以 L 为边界，并且完全落在区域 V 内的光滑曲面，称具有这种性质的区域V 为"依曲面"的单连通区域. 球和二同心球面所包围的区域都是这种意义下的单连通区域，而环状区域则是这种意义下的复连通区域.

同平面曲线积分完全类似，我们也有关于空间曲线积分与路无关条件的定理.

定理19.9 如果函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 及其一阶偏导数在依曲面意义下的单连通区域 V上连续，则下列四个命题互相等价：

1° 曲线积分

$$\int_{\widehat{AB}} Pdx+Qdy+Rdz$$

只与区域V 内的始点A 和终点B 有关，而与连接 A、B 二点的积分路线无关.

2° 表达式

$$Pdx+Qdy+Rdz$$

是区域V 内某一函数 $F(x,y,z)$的全微分，即

$$dF(x,y,z)=Pdx+Qdy+Rdz$$

3° 在区域V内每一点 (x,y,z)，恒有

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

4° 沿区域V内任一光滑或分段光滑闭曲线 L 的积分恒为0，即

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=0$$

证明同平面曲线积分与路无关条件的定理19.4完全类似，所不同的是定理19.4用的是格林公式，而本定理则要应用格林公式的推广公式——斯托克斯公式，故证明从略。

例1　计算曲线积分

$$I=\oint_L (z-2y)dx+(x-2z)dy+(y-2x)dz$$

其中L为平面 $x+y+z=1$与三个坐标面的交线，当观察者站在第一卦限 xy平面上$x+y>1$处看交线，此交线是按逆时针方向进行的（如图 19.29）。

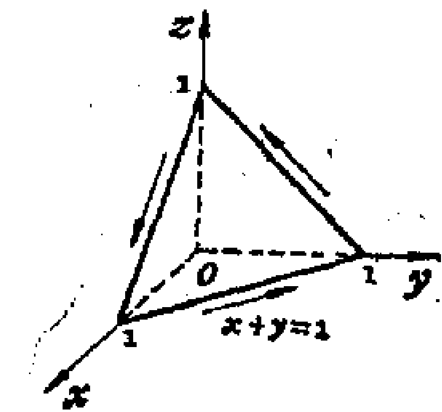


图19.29

解　$P=z-2y, Q=x-2z, R=y-2x$，由斯克托斯公式，有

$$I=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_S[1-(-2)]dydz+[1-(-2)]dzdx$$

$$+[1-(-2)]dxdy=\iint_S 3dydz+3dzdx+3dxdy$$

由对称性，得

$$I=9\iint_S dxdy=9\iint_{D_{xy}}dxdy=9\times\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{9}{2}$$

例2　验证曲线积分

$$\int_L (2x+yz)dx+(2y+xz)dy+xydz$$

与路无关，并求积分

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)}(2x+yz)dx+(2y+xz)dy+xydz$$

解　$P=2x+yz,\ Q=2y+xz,\ R=xy$

因为 $\quad \dfrac{\partial R}{\partial y}=x=\dfrac{\partial Q}{\partial z},\quad \dfrac{\partial P}{\partial z}=y=\dfrac{\partial R}{\partial x},\quad \dfrac{\partial Q}{\partial x}=z=\dfrac{\partial P}{\partial y}$

所以，根据定理19.9，曲线积分与路无关．为此选取折线：先从原点（0，0，0）沿x轴至点（1，0，0），再从点（1，0，0）沿平行y轴的直线至点（1，1，0），最后从点（1，1，0）沿平行于z轴的直线至点（1，1，1）（如图19.30）．于是，

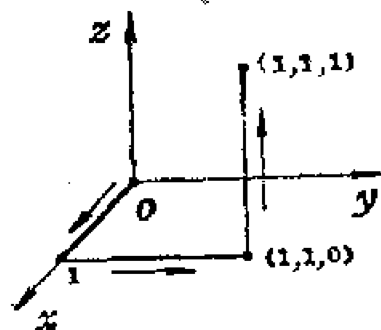


图19.30

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)}(2x+yz)dx+(2y+xz)dy+xydz$$

$$=\int_0^1 2xdx+\int_0^1 2ydy+\int_0^1 dz$$

$$=x^2\Big|_0^1+y^2\Big|_0^1+z\Big|_0^1$$

$$=3.$$



学习指导

一　内容概要

1　重点及要求

本章主要讨论了平面及空间曲线的第一型和第二型曲线积分，空间曲面的第一型和第二型曲面积分的概念、性质和计算，重点是计算，尤其是第二型曲线积分与曲面积分的计算更为重要，读者必须很好掌握．此外，还讨论了二重积分、三重

积分、曲线积分与曲面积分之间的几个重要公式：格林公式，奥—高公式和斯托克斯公式。这些公式不仅指出了各种积分之间的关系，而且应用这些公式常常给计算某些积分带来方便。因此，读者一定要很好地掌握这些公式的条件和用法。一般说来，多半是应用格林公式把复杂的闭曲线积分化为该闭曲线所围成的一个平面区域上的较简单的（区域和被积函数都比较简单）二重积分。而奥—高公式则多用于将较复杂的闭曲面的第二型曲面积分化为较简单的三重积分（区域和被积函数都比较简单）。

2　第一型曲线积分的计算

范围	给定方程	化为参数方程	代入化为定积分	注意
平面	$x=\varphi(t)$ $y=\psi(t)$ $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$	$x=\varphi(t)$ $y=\psi(t)$ $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ $dl=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$	$\int_{\widehat{AB}} f(x,y)dl=\int_{\widehat{BA}} f(x,y)dl$ $=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]$ $\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\;dt$	与方向无关，所化定积分总是从 α（小）积到 β（大）
空间	$x=\varphi(t)$ $y=\psi(t)$ $z=\chi(t)$ $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$	$x=\varphi(t)$ $y=\psi(t)$ $z=\chi(t)$ $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ $dl=$ $\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}\,dt$	$\int_{\widehat{AB}} f(x,y,z)dl$ $=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t),\chi(t)]\cdot$ $\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}$ $\cdot dt$	与方向无关，所化定积分总是从 α（小）积到 β（大）

3　第二型曲线积分计算

范围	方　程	计算dx或dy	代入积分中化为定积分	注意
平面	$x=\varphi(t)$ $y=\psi(t)$ $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ $A:(\varphi(\alpha),\psi(\beta))$ $B:\ (\varphi(\beta),\psi(\beta))$	$dx=\varphi'(t)dt$ $dy=\psi'(t)dt$	$\int_{\widehat{AB}}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ $=\int_{\alpha}^{\beta}\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+$ $+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$	与方向有关
空间	$x=\varphi(t)$ $y=\psi(t)$ $z=\chi(t)$ $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ $A(\varphi(\alpha),\psi(\alpha),$ $\chi(\alpha))$ $B(\varphi(\beta),$ $\psi(\beta),\chi(\beta))$	$dx=\varphi'(t)dt$ $dy=\psi'(t)dt$ $dz=\chi'(t)dt$	$\int_{\widehat{AB}}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy$ $+R(x,y,z)dz$ $=\int_{\alpha}^{\beta}\{P[\varphi(t),\psi(t),\chi(t)]\varphi'(t)$ $+Q[\varphi(t),\psi(t),\chi(t)]\psi'(t)$ $+R[\varphi(t),\psi(t),\chi(t)]\chi'(t)\}dt$	与方向无关

4　第一型曲面积分计算

方　程	计　算 dS	代入化为二重积分
$z=z(x,y)$ $(x,y)\in D_{xy}$	$dS=$ $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy$	$\iint_S f(x,y,z)dS=$ $\iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\cdot$ $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy$
$y=y(z,x)$ $(z,x)\in D_{zx}$	$dS=$ $\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}dzdx$	$\iint_S f(x,y,z)dS=$ $\iint_{D_{zy}} f[x,y,(z,x,)z]\cdot$ $\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}dzdx$
$x=x(y,z)$ $(y,z)\in D_{yz}$	$dS=$ $\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}dydz$	$\iint_S f(x,y,z)dS=$ $\iint_{D_{yz}} [x(y,z),y,z]\cdot$ $\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}dydz$

5 第二型曲面积分计算

曲面 S 的侧及方程	代入并注意曲面 S 的侧	注 意
$S_{上}: z = z(x,y)$ $(x,y) \in D_{xy}$ $(S_{下}: z = z(x,y))$	$\iint_S f(x,y,z)dxdy$ $=\iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]dxdy$ $\left(=-\iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\ dxdy\right)$	与曲面侧选取有关
$S_{右}: y = y(z,x)$ $(z,x) \in D_{zx}$ $(S_{左}: y = y(z,x))$	$\iint_S f(x,y,z)dzdx$ $=\iint_{D_{zx}} f[x,y(z,x),z]dzdx$ $\left(=-\iint_{D_{zx}} f[x,y(z,x),z]dzdx\right)$	①
$S_{前}: x = x(y,z)$ $(y,z) \in D_{yz}$ $(S_{后}: x = x(y,z))$	$\iint_S f(x,y,z)dydz$ $=\iint_{D_{yz}} f[x(y,z),y,z]dydz$ $\left(=-\iint_{D_{yz}} f[x(y,z),y,z]dydz\right)$	②

①$S_{右}$指曲面 $y=y(z,x)$ 的正法线与 y 轴正向夹角为锐角。

② $S_{前}$指曲面 $x=x(y,z)$ 的正法线与 x 轴正向夹角为锐角。

6 几种积分之间的联系

名　　称	内　　　　容
格林公式	$\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint\limits_{L}Pdx+Qdy$
奥——高公式	$\iiint\limits_{V}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$ $=\oiint\limits_{S}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$
斯托克斯公式	$\iint\limits_{S}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$ $=\oint\limits_{L}Pdx+Qdy+Rdz$ 为了便于记忆，写成行列式形式 $\iint\limits_{S}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$ $=\oint\limits_{L}Pdx+Qdy+Rdz$

二　几点说明

1　关于各种积分的方向

到目前为止，我们学过的所有积分中，二重积分与三重积分的积分域，即平面有界区域与空间有界区域没有方向问题，于是二重积分与三重分也就没有方向问题；而第一型曲线积分及第一型曲面积分虽然积分域：曲线或曲面与方向有关，但第一型曲线积分及第一型曲面积分却与方向无关．除此以外，还有一类积分，如定积分、第二型曲线积分（平面的和空间的）

---

①在行列式中，形式上把 $dydz$、$dzdx$、$dxdy$ 和 $\frac{\partial}{\partial x}$，$\frac{\partial}{\partial y}$，$\frac{\partial}{\partial z}$ 都看作数，于是，行列式中的项，例如，$dydz\cdot\frac{\partial}{\partial y}\cdot R$ 表示 $\frac{\partial R}{\partial y}dydz$，其他的项的意义相同．

和第二型曲面积分，它们皆与曲线或曲面的方向有关。

事实上，我们有

1° $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)dx$

2° $\int\limits_{\widehat{AB}} Pdx+Qdy = -\int\limits_{\widehat{BA}} Pdx+Qdy$

$\int\limits_{\widehat{AB}} Pdx+Qdy+Rdz = -\int\limits_{\widehat{BA}} Pdx+Qdy+Rdz$

3° $\oiint\limits_{S} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$

$= -\oiint\limits_{S内} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$

2　关于曲线积分与曲面积分的对称性的应用

例1　计算空间曲线积分

$$\oint\limits_L x^2 dl$$

其中L为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $x+y+z=0$ 所截得的圆周。

解法一　首先求出球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$与平面 $x+y+z=0$ 的交线（圆周）的参数方程．为此，由方程 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和$x+y+z=0$消去y得

$$\left(z+\frac{x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\ (2a^2-3x^2)$$

令　　$x=\sqrt{\frac{2}{3}}\,a\cos t$，则

$$z=-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2a^2-3x^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a\left(\sin t-\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t\right)$$

$$y=-(x+z)=-\frac{\sqrt{2}}{2}a\left(\sin t+\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t\right)$$

由此得到圆周的参数方程

$$\begin{cases} x=\sqrt{\frac{2}{3}}a\cos t \\ y=-\frac{\sqrt{2}}{2}a\left(\sin t+\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t\right) \quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi) \\ z=\frac{\sqrt{2}}{2}a\left(\sin t-\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t\right) \end{cases}$$

$$dl=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt$$

$$=\sqrt{\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}a\sin t\right)^2+\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}a\left(\cos t-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin t\right)\right]^2+\left[\frac{\sqrt{2}}{2}a\left(\cos t+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin t\right)\right]^2}\,dt=a\,dt$$

于是，有

$$\oint_L x^2dl=\int_0^{2\pi}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}a\cos t\right)^2\cdot a\,dt$$

$$=\frac{2a^3}{3}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{2}{3}\pi a^3$$

由此可见，按正规作法是相当麻烦的。然而，如果利用被积函数和积分曲线的对称性，此题就变得非常简单。

解法二 由于在交线(圆周)$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ x+y+z=0\end{cases}$中所含的三个变量 x,y和 z所处的地位是完全对称的。因此，

$$\oint_L x^2dl=\oint_L y^2dl=\oint_L z^2dl$$

从而

$$\oint_L x^2dl=\frac{1}{3}\left[\oint_L x^2dl+\oint_L y^2dl+\oint_L z^2dl\right]=\frac{1}{3}\oint_L(x^2+y^2+z^2)\,dl$$

由于被积函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$恒在曲线

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

取值，于是 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2\equiv a^2$. 故

$$\oint_L x^2 dl=\frac{1}{3}\oint_L a^2 dl=\frac{a^2}{3}\oint_L dl=\frac{a^2}{3}\cdot 2\pi a=\frac{2\pi a^3}{3}$$

例2 计算积分

$$\iint_S x^3 dydz+y^3 dzdx+z^3 dxdy$$

其中 S 为球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外表面。

解 设上半球面 $S_上$: $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$；下半球面 $S_下$: $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$. 它们在 xy 平面上的投影都是圆域 D_{xy}: $x^2+y^2\leqslant a^2$. 于是，

$$\iint_S z^3 dxdy=\iint_{S_上} z^3 dxdy+\iint_{S_下} z^3 dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}(a^2-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}dxdy-\iint_{D_{xy}}-(a^2-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}dxdy$$

$$=2\iint_{D_{xy}}(a^2-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}dxdy=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a(a-r^2)^{\frac{3}{2}}\cdot rdr$$

$$=4\pi\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{5}(a^2-r^2)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^a=\frac{4\pi a^5}{5}$$

由于三个被积函数 x^3, y^3, z^3 在积分域球面

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

的外表面中所处的地位完全相同，即该积分有对称性，于是

$$\iint_S y^3 dzdx=\iint_S x^3 dydz=\frac{4\pi a^5}{5}$$

因此，有

$$\oiint_S x^3 dydz+y^3 dzdx+z^3 dxdy=3\times\frac{4\pi a^5}{5}=\frac{12\pi a^5}{5}$$

由此可以看出，正确运用对称性，能够简化计算。

三　例题选讲

例1　计算第一型曲线积分

$$\int_L x\,dl$$

其中L为对数螺线$\rho=ae^{k\theta}(k>0)$在 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 的部分。

解　将$\rho=ae^{k\theta}$代到极坐标替换中，得到参数方程

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta=ae^{k\theta}\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta=ae^{k\theta}\sin\theta \qquad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi) \end{cases}$$

$$dl=\sqrt{x'^2(\theta)+y'^2(\theta)}\,d\theta$$

$$=\sqrt{(ake^{k\theta}\cos\theta-ae^{k\theta}\sin\theta)^2+(ake^{k\theta}\sin\theta+ae^{k\theta}\cos\theta)}\,d\theta$$

$$=a\sqrt{1+k^2}\,e^{k\theta}d\theta$$

将 x与 dl代入曲线积分中，得

$$\int_L x\,dl=\int_0^{2\pi}ae^{k\theta}\cos\theta\cdot a\sqrt{1+k^2}\,e^{k\theta}d\theta$$

$$=a^2\sqrt{1+k^2}\int_0^{2\pi}e^{2k\theta}\cos\theta\,d\theta$$

$$=a^2\sqrt{1+k^2}\,\frac{e^{2k\theta}(2k\cos\theta+\sin\theta)}{4k^2+1}\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$=\frac{2ka^2\sqrt{1+k^2}\,(e^{4k\pi}-1)}{1+4k^2}$$

例2　计算第一型曲线积分

$$\int_L (x^2+y^2+z^2)\,dl$$

其中L为螺线 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

解　因为 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt$, 所以$x'=-a\sin t, y'=a\cos t, z'=b$, 于是

$$dl=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt=\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+b^2}\,dt$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2}\, dt$$

将 x, y, z,及 dl之值代入曲线积分中，得

$$\int_L (x^2 + y^2 + z^2)\, dl = \int_0^{2\pi} [(a\cos t)^2 + (a\sin t)^2 + (bt)^2]$$

$$\sqrt{a^2 + d^2}\, dt = \int_0^{2\pi} (a^2 + b^2 t^2) \sqrt{a^2 + b^2}\, dt = \Big[a^2 \sqrt{a^2 + b^2} t$$

$$+ \frac{b^2 \sqrt{a^2 + b^2}}{3} t^3 \Big]\Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{3} \sqrt{a^2 + b^2} (3a^2 + 4\pi^2 b^2)$$

例3 计算积分

$$\int_L z\, dl$$

其中L为交线 $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x^2 = ay \end{cases}$ 上从点 $O(0, 0, 0)$ 到 $A(a, a, \sqrt{2} a)$一段弧 $(a>0)$.

解 先求曲线的参数方程。取x 作参数，将 $y = \frac{x^2}{a}$代入到 $x^2 + y^2 = z^2$中，解得

$$z = \sqrt{x^2 + \left(\frac{x^2}{a}\right)^2} = \frac{x}{a} \sqrt{a^2 + x^2}$$

于是此曲线的参数方程为

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{a} \\ z = \dfrac{x}{a} \sqrt{a^2 + x^2} \end{cases} \quad (0 \leqslant x \leqslant a)$$

$$dl = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{2x}{a}\right)^2 + \left(\frac{2x^2 + a^2}{a\sqrt{a^2 + x^2}}\right)^2}\, dx$$

$$= \frac{\sqrt{8}}{a} \cdot \sqrt{x^4 + \frac{9}{8} a^2 x^2 + \frac{1}{4} a^4} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx$$

于是，有

$$\int_L z\,dl=\int_0^a \frac{x}{a}\sqrt{a^2+x^2}\cdot\frac{\sqrt{8}}{a}\cdot\frac{\sqrt{x^4+\frac{9}{8}a^2x^2+\frac{1}{4}a^4}\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{8}}{a^2}\int_0^a x\sqrt{x^4+\frac{9}{8}a^2x^2+\frac{a^4}{4}}\,dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{a^2}\int_0^a \sqrt{\left(x^2+\frac{9a^2}{16}\right)^2-\frac{17a^4}{16^2}}\,d\left(x^2+\frac{9a^2}{16}\right)^{①}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{a^2}\left[\frac{x^2+\frac{9a^2}{16}}{2}\sqrt{x^4+\frac{9}{8}a^2x^2+\frac{a^4}{4}}-\frac{17a^4}{2\cdot 16^2}\ln\left(x^2+\frac{9a^2}{16}+\sqrt{x^4+\frac{9}{8}a^2x^2+\frac{a^4}{4}}\right)\right]\Bigg|_0^a=\frac{\sqrt{2}}{a^2}\left[\frac{25a^2}{64}\cdot\right.$$

$$\left.\sqrt{\frac{19}{2}}a^2-\frac{17a^4}{2\cdot16^2}\cdot\ln\frac{25a^2+8\sqrt{\frac{19}{2}}a^2}{16}-\left(\frac{9a^4}{64}-\frac{17a^4}{2\cdot16^2}\ln\frac{17a^2}{16}\right)\right]$$

$$=\frac{a^2}{256\sqrt{2}}\left[100\sqrt{38}-72-17\ln\frac{25+4\sqrt{38}}{17}\right]$$

例4 计算曲线积分

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} xy\,dx$$

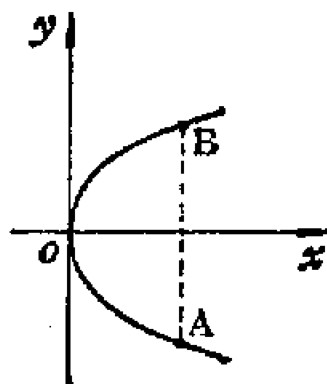


图19.31

其中$\overset{\frown}{AB}$是抛物线$y^2=x$从点$A(1,-1)$到点$B(1,1)$一段弧（如图19.31）.

解 $\int_{\overset{\frown}{AB}}=\int_{\overset{\frown}{AO}}+\int_{\overset{\frown}{OB}}$

---

① $\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+c$.

曲线$\widehat{AO}$的方程为$y=-\sqrt{x}$，于是

$$\int_{\widehat{AO}} xy\,dx=\int_1^0 x(-\sqrt{x})\,dx=-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_1^0=\frac{2}{5}$$

曲线$\widehat{OB}$的方程为$y=\sqrt{x}$，于是

$$\int_{\widehat{OB}} xy\,dx=\int_0^1 x\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{5}$$

从而，我们有

$$\int_{\widehat{AB}} xy\,dx=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$$

例5　计算曲线积分

$$\oint_L \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$$

其中L为以$A(1,0)$，$B(0,1)$，$C(-1,0)$，$D(0,-1)$为顶点的正方形的围线（如图19.32）。

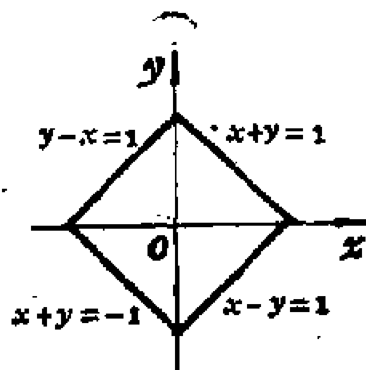


图19.32

解　正方形各边的方程分别为

AB:$y=1-x$，BC:$y=1+x$

CD:$y=-1-x$，DA:$y=-1+x$

于是，$\oint_L \dfrac{dx+dy}{|x|+|y|}$

$$=\int_{\overline{AB}}\frac{dx+dy}{x+y}+\int_{\overline{BC}}\frac{dx+dy}{-x+y}+\int_{\overline{CD}}\frac{dx+dy}{-x-y}+\int_{\overline{DA}}\frac{dx+dy}{x-y}$$

$$=\int_1^0(1-1)dx+\int_0^{-1}2dx+\int_{-1}^0(1-1)dx+\int_0^1(1+1)dx$$

$$=0-2+0+2=0$$

例6　计算积分

$$\oint_L y^2dx+z^2dy+x^2dz$$

其中 L 为曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x^2+y^2=ax$ $(z\geqslant 0, a>0)$ 相交的闭曲线。若从 ox 轴上$x>a$的地方观察，此曲线是按逆时针方向进行的（如图19.33）。

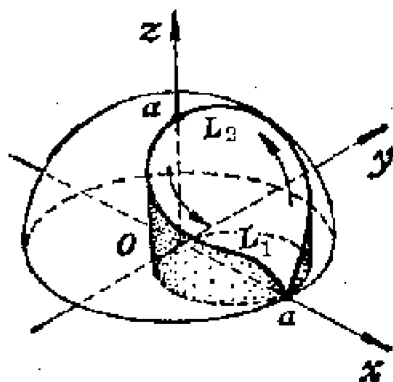


图19.33

解 首先将给定曲线化为参数方程。取极角 θ为参数。为此，令

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta \quad (1)$$

将（1）代入到柱面方程 $x^2+y^2=ax$中，得

$$r=a\cos\theta \tag{2}$$

再将（2）代入（1）中得

$$\begin{cases} x=a\cos^2\theta \\ y=a\cos\theta\cdot\sin\theta \end{cases} \tag{3}$$

再将（3）代入到球面方程 $x^2+y^2+z^2=a^2$中，解得

$$z=\sqrt{a^2-(a\cos^2\theta)^2-(a\cos\theta\sin\theta)^2}=a|\sin\theta|$$

这样，我们得到曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x=a\cos^2\theta \\ y=a\sin\theta\cos\theta \\ z=a\ |\sin\theta\ | \end{cases} \qquad \left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

于是，

$$dx=-2a\sin\theta\cos\theta d\theta$$

$$dy=a\cos2\theta d\theta$$

$$dz=\begin{cases} a\cos\theta d\theta, & 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2} \\ -a\cos\theta d\theta, & -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta<0 \end{cases}$$

将 y及 dx 的表达式代入到曲线积分$\oint_L y^2dx$中，得

$$\oint_L y^2dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2\theta\cos^2\theta(-2a)\sin\theta\cos\theta d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-2a^3)\sin^3\theta\cos^3\theta d\theta = 0$$[1]

将 x 及 dz 的表达式代入到曲线积分 $\oint_L x^2dz$ 中得

$$\oint_L x^2dz = \int_{L_1} x^2dz + \int_{L_2} x^2dz$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (a\cos^2\theta)^2 a\cos\theta d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos^2\theta)^2 a\cdot(-\cos\theta)d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} a^3\cos^5\theta d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-a^3\cos^5\theta]d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a^3\cos^5(-\theta)\cdot d(-\theta) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-a^3\cos^5\theta)d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3\cos^5\theta d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-a^3\cos^5\theta)d\theta$$

$$= 0$$

将 z 及 dy 的表达式代入到曲线积分 $\oint_L z^2dy$ 中得

$$\oint_L z^2dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2\theta\cdot a\cos2\theta d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3\cdot \frac{1-\cos2\theta}{2}\cdot\cos2\theta d\theta =$$

$$= a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos2\theta d\theta - a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2\theta d\theta$$

$$= 0 - a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos4\theta}{2} d\theta$$

$$= -\frac{a^3\pi}{4}$$

因此曲线积分

[1] 奇函数在关于原点的对称区间上的积分等于零。

$$\oint_L y^2dx + z^2dy + x^2dz = 0 - \frac{a^3\pi}{4} + 0 = -\frac{a^3\pi}{4}$$

例7 计算积分

$$I = \oint_L xy^2dy - x^2ydx$$

其中沿正方向进行的圆周 $x^2+y^2=a^2$.

解 $P(x,y) = -x^2y$, $Q(x,y) = xy^2$, $\frac{\partial P}{\partial y} = -x^2$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = y^2$

由格林公式，有

$$I = \iint_D (y^2+x^2)dxdy = \iint_{x^2+y^2\leqslant a^2} (x^2+y^2)dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^2 \cdot rdr = 2\pi \cdot \frac{r^4}{4}\Big|_0^a$$

$$= \frac{\pi a^4}{2}$$

例8 计算曲线积分

$$\int_{\widehat{Amo}} (e^x\sin y - my)dx + (e^x\cos y - m)dy$$

其中$\widehat{Amo}$为由点 $A(a,0)$至点$O(0,0)$的上半圆周$x^2+y^2=ax$（如图19.34）.

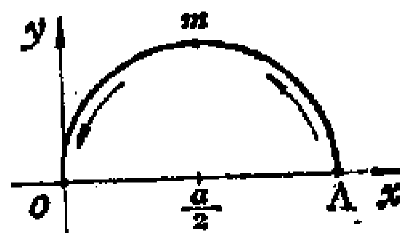


图19.34

解 补加直线段$\overline{OA}$，使之构成闭路$\widehat{AmoA}$. 由曲线积分性质，有

$$\int_{\widehat{Amo}} = \oint_{\widehat{AmoA}} - \int_{\overline{oA}} \tag{4}$$

对于闭路积分$\oint_{\widehat{AmoA}}$，应用格林公式化为二重积分.

$P(x,y) = e^x\sin y - my$, $Q(x,y) = e^x\cos y - m$

$\frac{\partial P}{\partial y} = e^x\cos y - m$, $\quad \frac{\partial Q}{\partial x} = e^x\cos y$

设闭曲线$\widehat{AmoA}$围成的半圆域为D，则由格林公式，有

$$\oint_{\widehat{AmoA}} (e^x\sin y - my)dx + (e^x\cos y - m)dy$$

$$= \iint_D [e^x\cos y - (e^x\cos y - m)]dxdy$$

$$= \iint_D m dxdy = m\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi ma^2}{8}$$

对于直线段$\overline{OA}$上的积分$\int_{\overline{OA}}$．由于$y=0$ $(0\leqslant x\leqslant a)$，于是，

$dy=0$，从而有

$$\int_{\overline{OA}} (e^x\sin y - my)dx + (e^x\cos y - m)dy = \int_0^a 0dx = 0$$

因此，由（4）式，有

$$\int_{\widehat{Amo}} (e^x\sin y - my)dx + (e^x\cos y - m)dy = \frac{\pi ma^2}{8} - 0 = \frac{\pi ma^2}{8}$$

例9　计算曲线积分

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$$

其中L为按正方向进行而不经过坐标原点的光滑封闭曲线。

解　$P(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$，$Q(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

当$(x,y)\neq(0,0)$时，恒有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

分两种情况讨论：

（i）若坐标原点在围线之外，这时在闭曲线L围成的有界闭区 域D上，$P(x,y)$，$Q(x,y)$及其一阶偏导数皆连续，于是，由格林公式，有

$$\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\iint_D\left[\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}-\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right]dxdy=\iint_D 0dxdy$$

$$=0$$

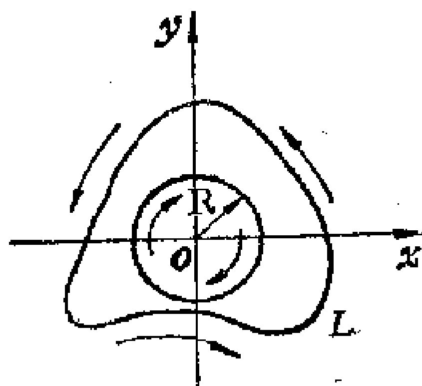


图19.35

(ii)若坐标原点位于围线之内，这时 $P(x,y)$与 $Q(x,y)$在原点皆无定义，不满足格林公式条件，故不能直接在L所围成的区域上应用格林公式，为了应用格林公式，我们挖去以原点为心的一个小圆．即取充分小的 $R>0$，以原点 $(0,0)$为心，以R为半径作一小圆：$x^2+y^2=R^2$．使其完全位于闭曲线L之内．用D_R表示界于L和小圆L_R之界的环形区域(如图19.35)．显然，在D_R上，$P(x,y)$，$Q(x,y)$及其偏导数皆连续，从而可应用格林公式，得

$$\oint_{L+L_R}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\iint_{D_R}\left[\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}-\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right]dxdy=0$$

其中 L_R是顺时针方向进行的小圆 $x^2+y^2=R^2$．

根据曲线积分的性质，有

$$\oint_{L+L_R}=\oint_L+\oint_{L_R}=0$$

从而，$$\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=-\oint_{L_R}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\oint_{-L_R}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

其中$-L_R$表示与小圆周 L_R反方向的圆周，即是逆时针方向进行的圆周 $x^2+y^2=R^2$．它的参数方程

$$x=R\cos t,y=R\sin t\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

于是，我们有

$$\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\oint_{-L_R}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{R\cos t\cdot R\cos t-R\sin t\cdot(-R\sin t)}{R^2}dt$$

$$=\int_0^{2\pi}dt=2\pi$$

例10 求星形线 $x=a\cos^3t$，$y=b\sin^3t$（$0\leqslant t\leqslant 2\pi$）所围成的面积（如图19.36）。

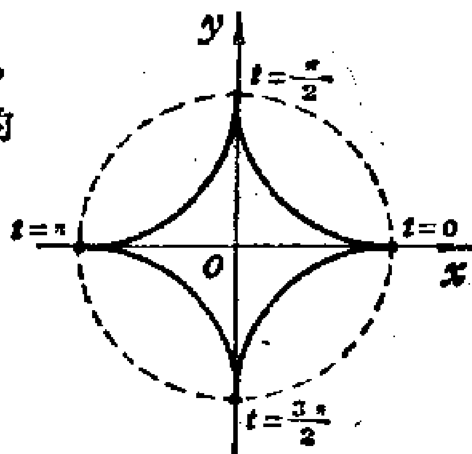


图19.36

解 $x=a\cos^3t, y=b\sin^3t$

$dx=-3a\cos^2t\sin t dt$,

$dy=3b\sin^2t\cos t dt$

由面积公式（19.22），有

$$S=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a\cos^3t\cdot 3b\sin^2t\cos t-b\sin^3t\cdot(-3a\cos^2t\sin t)]dt$$

$$=\frac{3ab}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2t\cos^2t(\cos^2t+\sin^2t)dt$$

$$=\frac{3ab}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2 2t dt=\frac{3ab}{8}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4t}{2}dt$$

$$=\frac{3ab}{8}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}dt-\frac{3ab}{8}\int_0^{2\pi}\frac{\cos 4t}{2}dt$$

$$=\frac{3\pi ab}{8}$$

例11 计算与路无关的曲线积分 $\int_{(0,1)}^{(2,3)}(x+y)dx+(x-y)dy$

解 由公式（19.23），有

$$\int_{(0,1)}^{(2,3)}(x+y)dx+(x-y)dy$$

$$=\int_0^2(x+1)dx+\int_1^3(2-y)dy$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_0^2+\left(2y-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^3$$

$$=4$$

例12 证明，如果 $dU=Pdx+Qdy$，则

$$I=\int_{\widehat{AB}} Pdx+Qdy=U(B)-U(A)=U(M)\Big|_A^B$$

其中 $U(A)=U(x_A,y_A)$，$U(B)=U(x_B,y_B)$，x_A,y_A与x_B,y_B分别为点A与B的坐标。

证明 设联结 A,B两点的任意一条在 D内的光滑曲线L，设参数方程为$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$，且 $\varphi(\alpha)=x_A$，$\psi(\alpha)=y_A$，$\varphi(\beta)=x_B$，$\psi(\beta)=y_B$，则

$$I=\int_{\widehat{AB}} Pdx+Qdy=\int_L Pdx+Qdy$$

$$=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\,dt$$

因为 $dU=Pdx+Qdy$，所以 $P=\dfrac{\partial U}{\partial x}$，$Q=\dfrac{\partial U}{\partial y}$，从而，

有

$$I=\int_\alpha^\beta\left[\frac{\partial U}{\partial x}\varphi'(t)+\frac{\partial U}{\partial y}\psi'(t)\right]dt$$

$$=\int_\alpha^\beta\frac{d}{dt}U[\varphi(t),\psi(t)]dt=U[\varphi(t),\psi(t)]\Big|_\alpha^\beta$$

$$=U[\varphi(\beta),\psi(\beta)]-U[\varphi(\alpha),\psi(\alpha)]=U(x_A,y_A)-U(x_B,y_B)$$
$$=U(B)-U(A)$$

同理可证，如果 $dU(x,y,z)=P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$，则

$$I=\int_{\widehat{AB}} Pdx+Qdy+Rdz=U(B)-U(A)=U(M)\Big|_A^B$$

其中 $U(A)=U(x_A,y_A,z_A)$，$U(B)=U(x_B,y_B,z_B)$，x_A,y_A，z_A与x_B,y_B,z_B 分别为点 A与 点B的坐标。

对于全微分型的曲线积分，如果被积表达式 $Pdx+Qdy$（或 $Pdx+Qdy+Rdz$）的原函数 $U(x,y)$（或 $U(x,y,z)$）很容易观察出来，用此结论计算全微分的曲线积分是很简便的。如

例题11所给定的曲线积分$\int_{(0,1)}^{(2,3)}(x+y)dx+(x-y)dy$，不难看出，

$$U=\frac{x^2}{2}+xy-\frac{y^2}{2}$$

的全微分$dU=d\left(\frac{x^2}{2}+xy-\frac{y^2}{2}\right)=(x+y)dx+(x-y)dy$.

于是，有

$$\int_{(0,1)}^{(2,3)}(x+y)dx+(x-y)dy=$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+xy-\frac{y^2}{2}\right)\bigg|_{(0,1)}^{(2,3)}=\left(\frac{2^2}{2}+2\cdot3-\frac{3^2}{2}\right)-\left(\frac{0^2}{2}+0\cdot1-\frac{1^2}{2}\right)$$

$$=4$$

再如被积表达式为某函数的全微分的线积分$\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)}yzdx+xzdy+xydz$，可用此法计算如下：设$U(x,y,z)=xyz$，则$\frac{\partial U}{\partial x}=yz$，$\frac{\partial U}{\partial y}=xz$，$\frac{\partial U}{\partial z}=xy$，从而，有

$$dU=d(xyz)=yzdx+xzdy+xydz$$

于是

$$\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)}yzdx+xzdy+xydz=(xyz)\bigg|_{(1,2,3)}^{(6,1,1)}=6\cdot1\cdot1-1\cdot2\cdot3=0$$

例13 判别表达式

$$e^x[e^y(x-y+2)+y]dx+e^x[e^y(x-y)+1]dy$$

是否是某一函数的全微分。如果是，求此全微分的原函数。

解 因为$P(x,y)=e^x[e^y(x-y+2)+y]$，$Q(x,y)=e^x[e^y(x-y)+1]$.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=e^x[e^y(x-y+1)+1]=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

所以，根据定理19.4，表达式是某函数的全微分。

下面求原函数$F(x,y)$.取$(x_0,y_0)=(0,0)$，由公式(19.23)，有

$$F(x,y)=\int_0^x e^x(x+2)dx+\int_0^y e^x[e^y(x-y)+1]dy+c_1$$

$$=e^x(x+2)\Big|_0^x-\int_0^x e^x dx+e^x y\Big|_0^y+e^x(x-y)e^y\Big|_0^y+$$

$$+e^x\int_0^y e^y dy+c_1$$

$$=xe^x+e^x-1+e^{x+y}(x-y)-xe^x+e^{x+y}-e^x+c_1$$

$$=e^{x+y}(x-y+1)+c$$

例14　计算第一型曲面积分

$$\iint_S (x^2+y^2)dS$$

其中 S为锥体$\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1$的边界曲面.

解　曲面 S是由锥面S_1:$z=\sqrt{x^2+y^2}$当$0\leqslant z\leqslant 1$ 的部分和平面 S_2:$z=1$ 当 $x^2+y^2\leqslant 1$的部分. 曲面 S_1和 S_2在 xy 的投影区域皆为圆域 D:$x^2+y^2\leqslant 1$.

由曲面积分的性质，有

$$\iint_S (x^2+y^2)dS=\iint_{S_1}(x^2+y^2)dS+\iint_{S_2}(x^2+y^2)dS \qquad (5)$$

对于积分$\iint_{S_1}(x^2+y^2)dS$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy$$

$$=\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\ dxdy$$

$$=\sqrt{2}\,dxdy$$

将 dS的表达式代入到积分中，得

$$\iint_{S_1}(x^2+y^2)dS=\iint_D (x^2+y^2)\sqrt{2}\,dxdy$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr=\sqrt{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi \quad (6)$$

对于积分$\iint\limits_{S_2}(x^2+y^2)dS$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=0,\ dS=dxdy$$

于是 $\iint\limits_{S_2}(x^2+y^2)dS=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)dxdy$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2\cdot rdr=2\pi\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi}{2} \quad (7)$$

将（6）式与（7）式之值代入（5）中得

$$\iint\limits_{S}(x^2+y^2)dS=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\frac{(\sqrt{2}+1)\pi}{2}$$

例15 计算第一型曲面积分

$$I=\iint\limits_{S}(xy+yz+zx)dS$$

其中 S为圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被圆柱面$x^2+y^2=2ax$所割下的部分（如图19.37）。

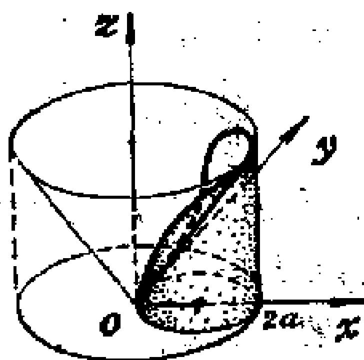


图19.37

解 显然圆锥面被割下部分的投影区域 D 为圆域：$x^2+y^2\leqslant 2ax$ 或者表为 $r\leqslant 2a\cos\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

$$=\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,dxdy$$

$$=\sqrt{2}\,dxdy$$

将 $dS=\sqrt{2}\,dxdy$ 代入到曲面积分中，并利用极坐标变换，有

$$I=\iint_D (xy+yz+zx)\sqrt{2}\,dxdy$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} r^3\cos\theta\sin\theta + r^3\sin\theta + r^3\cos\theta\,dr$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta\cdot\sin\theta+\sin\theta+\cos\theta)\frac{r^4}{4}\Big|_0^{2a\cos\theta} d\theta$$

$$=4\sqrt{2}a^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [(\cos\theta+1)\cos^4\theta\sin\theta+\cos^5\theta]d\theta①$$

$$=4\sqrt{2}a^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\theta)^2 d\sin\theta$$

$$=4\sqrt{2}a^4\left[\sin\theta-\frac{2}{3}\sin^3\theta+\frac{\sin^5\theta}{5}\right]\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{64\sqrt{2}}{15}a^4$$

例16 计算第二型曲面积分

$$\oiint_S f(x)dydz+g(y)dzdx+h(z)dxdy$$

其中 $f(x),g(y),h(z)$ 皆为连续函数， S 为长方体的 $0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant b$，$0\leqslant z\leqslant c$ 的外表面。

解 长方体的外表面 S 共分六个平面（如图19.38）。

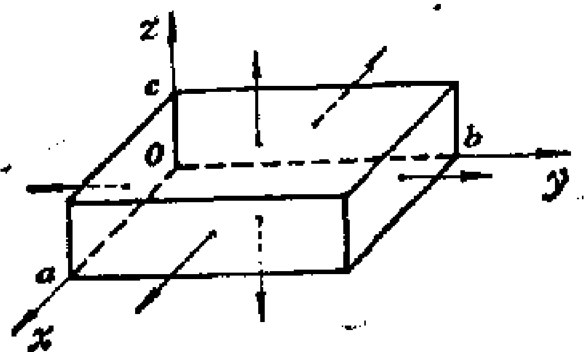


图19.38

①因为 $(\cos\theta+1)\cos^4\theta\sin\theta$ 为奇函数，所以

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta+1)\cos^4\theta\sin\theta d\theta=0$$

$S_{后}$： $x=0$， D_{yz}： $0\leqslant y\leqslant b$， $0\leqslant z\leqslant c$

$S_{前}$： $x=a$， D_{yz}： $0\leqslant y\leqslant b$， $0\leqslant z\leqslant c$

$S_{左}$： $y=0$， D_{zx}： $0\leqslant z\leqslant c$， $0\leqslant x\leqslant a$

$S_{右}$： $y=b$， D_{zx}： $0\leqslant z\leqslant c$， $0\leqslant x\leqslant a$

$S_{下}$： $z=0$， D_{xy}： $0\leqslant x\leqslant a$， $0\leqslant y\leqslant b$

$S_{上}$： $z=c$， D_{xy}： $0\leqslant x\leqslant a$， $0\leqslant y\leqslant b$

首先计算积分$\oiint\limits_{S}h(z)dxdy$.

因为 $S_{后}$, $S_{前}$, $S_{左}$, $S_{右}$在 xy 面上的投影区域皆是直线段，其面积微元 $dxdy=0$，所以，有

$$\iint\limits_{S_{后}} h(z)dxdy=\iint\limits_{S_{前}} h(z)dxdy=\iint\limits_{S_{左}} h(z)dxdy$$

$$=\iint\limits_{S_{右}} h(z)dxdy=0$$

而

$$\iint\limits_{S_{下}} h(z)dxdy=-\iint\limits_{D_{xy}}h(0)dxdy=-h(0)\int_0^a dx\int_0^b dy$$

$$=-abh(0)$$

$$\iint\limits_{S_{上}} h(z)dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}h(c)dxdy=h(c)\int_0^a dx\int_0^b dy$$

$$=abh(c)$$

于是，根据曲面积分的性质，有

$$\oiint\limits_{S}h(z)dxdy=\iint\limits_{S_{后}} h(z)dxdy+\iint\limits_{S_{前}} h(z)dxdy+\iint\limits_{S_{左}} h(z)dxdy$$

$$+\iint\limits_{S_{右}} h(z)dxdy+\iint\limits_{S_{下}} h(z)dxdy+\iint\limits_{S_{上}} h(z)dxdy$$

$$=0+0+0+0-abh(0)+abh(c)$$

$$=[h(c)-h(0)]ab \tag{8}$$

同理可得

$$\oint\!\!\!\!\oint_S g(y)\,dzdx = [g(b)-g(0)]ac \tag{9}$$

$$\oint\!\!\!\!\oint_S f(x)\,dydz = [f(a)-f(0)]bc \tag{10}$$

由曲面积分性质和（8）、（9）、（10）三式，得

$$\oint\!\!\!\!\oint_S f(x)\,dydz + g(y)\,dzdx + h(z)\,dxdy$$

$$= abc\left[\frac{f(a)-f(0)}{a}+\frac{g(b)-g(0)}{b}+\frac{h(c)-h(0)}{c}\right]$$

例17 计算第二型曲面积分

$$\oint\!\!\!\!\oint_S \frac{dydz}{x}+\frac{dzdx}{y}+\frac{dxdy}{z}$$

其中 S为椭球$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的外表面（如图19.39）.

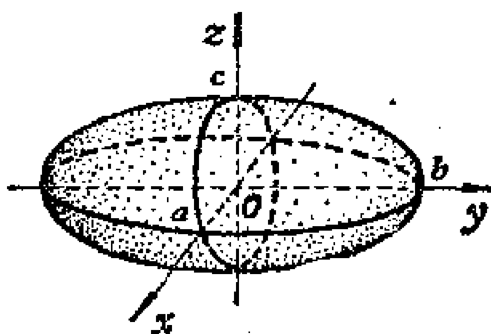


图19.39

解 首先计算$\oint\!\!\!\!\oint_S \frac{dxdy}{z}$.

外侧椭球面 S是由下侧为正的下半椭球面 $S_下$及上侧为正的上半椭球面 $S_上$所组成，即$S_外=S_下+S_上$，其中

$$S_下:\ z=-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},\ D_{xy}:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$$

$$S_上:\ z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},\ D_{xy}:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$$

根据曲面积分性质和计算公式，得

$$\oint\!\!\!\!\oint_S \frac{dxdy}{z}=\iint_{S_下}\frac{dxdy}{z}+\iint_{S_上}\frac{dxdy}{z}$$

$$= -\iint_{D_{xy}} \frac{dxdy}{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} + \iint_{D_{xy}} \frac{dxdy}{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}$$

$$= \frac{2}{c}\iint_{D_{xy}} \frac{dxdy}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} \tag{11}$$

设 $x=ar\cos\theta$, $y=br\sin\theta$, 则 $J=abr$, $D_{r\theta}$: $r\leqslant 1$, 于是，有

$$\oiint_S \frac{dxdy}{z} = \frac{2}{c}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 \frac{abr}{\sqrt{1-r^2}}dr = \frac{2ab}{c}\ 2\pi\cdot(-\sqrt{1-r^2})\Big|_0^1$$

$$= \frac{4\pi ab}{c}$$

同理可得

$$\oiint_S \frac{dydz}{x} = \frac{4\pi bc}{a} \tag{12}$$

$$\oiint_S \frac{dzdx}{y} = \frac{4\pi ac}{b} \tag{13}$$

由曲面积分性质和(11)、(12)、(13)三式，有

$$\oiint_S \frac{dydz}{x} + \frac{dzdx}{y} + \frac{dxdy}{z} = 4\pi\left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right)$$

例18 计算曲面积分

$$\oiint_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$$

其中 S为球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外表面。

解 因为 $P=x^3$, $Q=y^3$, $R=z^3$,所以,

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z} = 3x^2+3y^2+3z^2 = 3(x^2+y^2+z^2)$$

由奥一高公式，并对所得三重积分作球坐标替换，有

$$\oiint_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$$

$$= 3\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz = 3\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^2\cdot r^2 \sin\varphi dr$$

$$= 6\pi\cdot\frac{a^5}{5}\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi = \frac{12\pi a^5}{5}$$

例19 计算曲面积分

$$\oiint\limits_S (x-y+z)dydz+(y-z+x)dzdx+(z-x+y)dxdy$$

其中 S为曲面 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$ 的外表面。

解 因为 $P=x-y+z$，$Q=y-z+x$，$R=z-x+y$，所以，

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=1+1+1=3$$

由奥—高公式得

$$\oiint\limits_S (x-y+z)dydz+(y-z+x)dzdx+(z-x+y)dxdy$$

$$=3\iiint\limits_V dxdydz$$

其中V为空间区域：$|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|\leqslant 1$

令 $u=x-y+z$，$v=y-z+x$，$w=z-x+y$

则 $$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=4，\text{从而}$$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=\frac{1}{\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}}=\frac{1}{4}$$

由变量替换公式，有

$$\iiint\limits_V dxdydz=\iiint\limits_{V'}\frac{1}{4}dudvdw$$

其中 V'是变换后的新区域：$|u|+|v|+|w|\leqslant 1$①是 u,v,w坐

①曲面$|u|+|v|+|w|=1$表示八个平面：$u+v+w=1$，$-u+v+w=1$，$u-v+w=1$，$u+v-w=1$，$-u-v+w=1$，$u-v-w=1$ $-u+v-w=1$，$-u-v-w=1$。

标系中对称于坐标原点的正八面体(如图19.40) 其体积等于平面 $u+v+w=1$, $u=0$, $v=0$, $w=0$所围成的四面体的体积的8倍，即

$$\iiint\limits_{V'} du\,dv\,dw=8\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=\frac{4}{3}$$

于是，有

$$\oint\!\!\!\!\oint\limits_{S}(x-y+z)dydz+(y-z+x)dzdx+(z-x+y)dxdy$$

$$=3\iiint\limits_{V}dxdydz=\frac{3}{4}\iiint\limits_{V'}du\,dv\,dw=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}=1$$

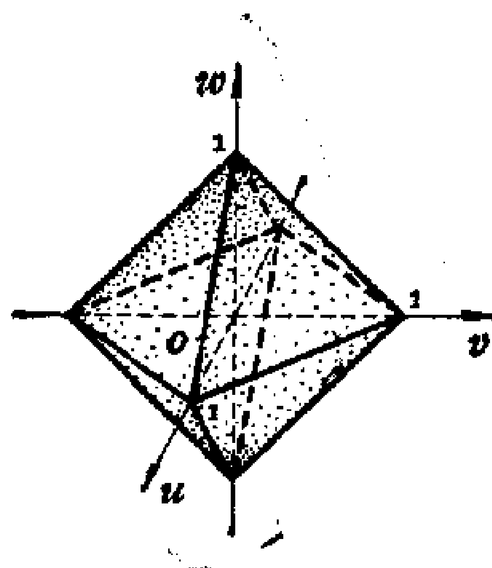


图19.40

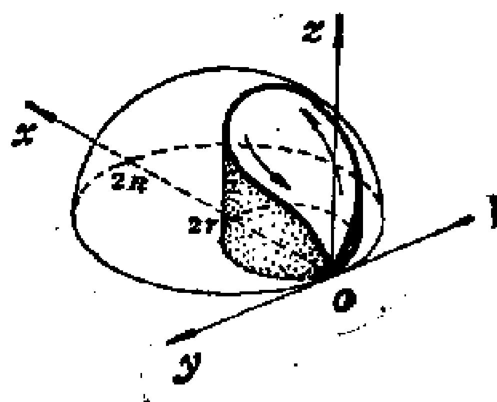


图19.41

例20 计算空间曲线积分

$$\oint\limits_{L}(y^2+z^2)dx+(x^2+z^2)dy+(x^2+y^2)dz$$

其中 L 是曲面$x^2+y^2+z^2=2Rx$与 $x^2+y^2=2rx$ $(0<r<R,z>0)$的交线。当观察者站在负半 x轴上，向 x轴正半轴看去，此曲线是沿逆时针方向进行的曲线（如图19.41）.

解 $P=y^2+z^2$, $Q=x^2+z^2$, $R=x^2+y^2$.由斯托克斯公式，有

$$\oint_L (y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz$$

$$=2\iint_S (y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$$

根据斯托克斯公式关于方向的右手螺旋法则知，球面法线向上为正．于是球面 $z=\sqrt{2Rx-x^2-y^2}$ 的法线方向余弦为：

$$\cos\alpha=\frac{-\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}=\frac{x-R}{R}$$

$$\cos\beta=\frac{-\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}=\frac{y}{R}$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}=\frac{z}{R}$$

由一、二型曲面积分的联系公式(19.38)，有

$$\oint_L (y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz$$

$$=2\iint_S[(y-z)\cos\alpha+(z-x)\cos\beta+(x-y)\cos\gamma]dS$$

$$=2\iint_S\left[(y-z)\frac{x-R}{R}+(z-x)\frac{y}{R}+(x-y)\frac{z}{R}\right]dS$$

$$=2\iint_S(z-y)dS=2\iint_S zdS-2\iint_S ydS$$

由于曲面 S关于 oxz面对称，于是

$$\iint_S ydS=0$$

从而，有

$$\oint_L (y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz$$

$$=2\iint_S zdS=2\iint_S R\cos\gamma dS$$

$$=2\iint_S Rdxdy=2R\cdot\pi r^2=2\pi Rr^2$$

习　　题

§19.1

1．计算下列第一型曲线积分：

（1）$\int_L y^2dl$，其中 L为摆线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$的一拱。

（2）$\int_L (x^2+y^2)dl$，其中L为曲线 $x=a(\cos t+t\sin t)$，$y=a(\sin t-t\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$。

（3）$\int_L (x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})dl$，其中 L为内摆线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$的弧。

（4）$\int_L |y|dl$，其中L为双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$的弧。

（5）$\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$，其中 L为圆周 $x^2+y^2=ax$。

2．计算下列空间第一型曲线积分：

（1）$\int_L \sqrt{2y^2+z^2}dl$，其中 L为 $x^2+y^2+z^2=a^2$与$x=y$相交的圆周。

（2）$\int_L zdl$，其中 L为圆锥螺线$x=t\cos t$，$y=t\sin t$，$z=t$ $(0\leqslant t\leqslant t_0)$。

§19.2

3．计算下列第二型曲线积分：

(1) $\int_L (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$，其中 L为抛物线

$$y=x^2 \quad (-1\leqslant x\leqslant 1).$$

(2) $\int_L (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$，其中 L为曲线

$$y=1-|1-x| \quad (0\leqslant x\leqslant 2).$$

(3) $\int_L \dfrac{x^2dy-y^2dx}{x^{\frac{5}{3}}+y^{\frac{5}{3}}}$，其中$L$为星形线 $x=a\cos^3t$，$y=a\sin^3t$ 自点 $A(a,0)$到点 $(0,a)$一段。

(4) $\oint_L \dfrac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$，其中 L为依逆时针方向通过的圆周 $x^2+y^2=a^2$。

(5) $\oint_{omAno} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}dy-dx$，其中 omA为抛物线 $y=x^2$，onA为直线段 $y=x$，

4．计算下列空间第二型曲线积分：

(1) $\int_L (y^2-z^2)dx+2yzdy-x^2dz$，式中$L$为依参数增加方向进行的曲线$x=t$，$y=t^2$，$z=t^3$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$。

(2) $\int_L ydx+zdy+xdz$，式中 L 为依参数增加方向进行的纽形螺线 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=bt$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$。

(3) $\int_L (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$，式中 L 为球面的一部分 $x^2+y^2+z^2=1$，$x>0$，$y>0$，$z>0$ 的围线，当沿着它的正向进行时（指人站立的方向与球面的外法线方一致）该曲面保持在行进者的左方。

5．证明不等式

$$\left|\int_L Pdx+Qdy\right|\leqslant LM$$

式中 L 为积分曲线段的长度，$M=\max\limits_{(x,y)\in L}\sqrt{P^2+Q^2}$。

§19.3

6. 利用格林公式计算下列曲线积分：

(1) $\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,dx + y[xy + \ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]dy$

式中 L 为按逆时针方向进行的区域D：$0\leqslant y\leqslant\sqrt{x}$，$0\leqslant x\leqslant 1$ 的边界围线。

(2) $\oint_L (x+y)dx-(x-y)dy$，式中 L为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$。

(3) $\oint_L e^{-(x^2-y^2)}(\cos 2xy dx+\sin 2xy dy)$， 式中$L$为圆周$x^2+y^2=R^2$。

· 7. 利用曲线积分计算下列曲线所围成图形的面积：

(1)抛物线 $(x+y)^2=ax$ $(a>0)$和 x轴。

(2)双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$。

§19.4

8 验证下列线积分的被积表达式是某函数的全微分，并计算线积分：

(1) $\int_{(1,-1)}^{(1,1)} (x-y)(dx-dy)$。

(2) $\int_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$。

(3) $\int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{ydx-xdy}{x^2}$沿着不与 y轴相交的途径。

(4) $\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$沿着不通过坐标原点的途径。

9. 求下列全微分所对应的原函数$u(x,y)$：

(1) $du=(x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-y^2)dy$。

(2) $du=\frac{ydx-xdy}{3x^2-2xy+3y^2}$。

§19.5

10. 计算下列第一型曲面积分：

(1) $\iint_S (x+y+z)dS$，式中 S为曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$，$z\geqslant 0$。

（2）$\iint\limits_S \frac{dS}{(1+x+y)^2}$，式中$S$为四面体 $x+y+z\leqslant 1$，$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$z\geqslant 0$的边界。

（3）$\iint\limits_S dS$，式中 S为球面 $x^2+y^2+z^2=2cz$ $(c>0)$被锥面 $x^2+y^2=z^2$ 割下的部分。

§19.6

11. 计算下列第二型曲面积分：

（1）$\iint\limits_S (y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$，式中$S$为圆锥体 $\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1$的外表面。

（2）$\iint\limits_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，式中 S为球 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$的外表面。

§19.7

12. 利用奥—高公式计算下列第二型曲面积分：

（1）$\iint\limits_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，式中 S为立方体 $0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant a$，$0\leqslant z\leqslant a$的边界的外表面。

（2）$\iint\limits_S (x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)dS$，式中 S为锥面 $x^2+y^2=z^2$ $(0\leqslant z\leqslant h)$的一部分，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$为锥面的外法线的方向余弦。

§19.8

13. 利用斯托克斯公式计算下列空间曲线积分：

（1）$\oint\limits_L (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$，式中 L 为依参数 t 增大的方向通过的椭圆 $x=a\sin^2 t$，$y=2a\sin t\cos t$，$z=a\cos^2 t$ $(0\leqslant t\leqslant\pi)$，

（2）$\oint\limits_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$，式中$L$为圆柱面$x^2+y^2=a^2$与平面$\frac{x}{a}+\frac{y}{h}=1$ $(a>0,\ h>0)$的交线（椭圆），若从 x 轴正向

看去，此椭圆是依反时针方向进行的。

(3) $\oint\limits_{L}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$，式中 L 为用平面 $x+y+z=\frac{3}{2}a$ 切立方体 $0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant a$，$0\leqslant z\leqslant a$ 的表面所得的切痕，若从 x 轴的正向看去，它是依逆时针方向进行的。

14. 计算下列被积表达式为某函数全微分的曲线积分

(1) $\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} xdx+y^2dy-z^3dz$。

(2) $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中点$(x_1,y_1,z_1)$位于球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 之上，而点(x_2,y_2,z_2)位于球面 $x^2+y^2+z^2=b^2$之上 $(a>0,b>0)$。

(3) $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(x+y+z)(dx+dy+dz)$，其中$f$ 为连续函数。

15. 求下列全微分的原函数：

(1) $du=(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz$。

(2) $du=\left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\right)dx+\left(\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2}\right)dy-\frac{xy}{z^2}dz$。

第二十章　广义积分

在第九章里，我们讨论的定积分$\int_a^b f(x)dx$有两个方面的限制：一是积分区间〔a，b〕是有限的；二是被积函数$f(x)$在闭区间〔a，b〕上是有界的．但是，应用积分解决实际问题或研究理论问题时，时常遇到积分区间是无穷的和被积函数是无界的情形，这就要求我们打破定积分在这两方面的限制，把定积分的概念加以推广．本章就是从定积分出发，应用极限的方法，把定积分分别推广成为无穷区间上的积分和无界函数的积分．通常把无穷区间上的积分简称为**无穷积分**，把无界函数的积分简称为**瑕积分**．无穷积分和瑕积分又统称为**广义积分**．

本章主要讨论无穷积分和瑕积分的收敛和发散的概念，以及收敛性判别法．

§20.1　无穷积分

一　无穷积分的概念

首先来看一个例子：在地球上发射火箭（垂直于地面），要将它送到距离地心为b处，问火箭需要作多少功？要它脱离地球引力，需作多少功？

设地球半径为R，火箭质量为m，地球质量为M．由万有引力定律，距地球中心为$r(r>R)$处，火箭在dr段所做的功微元

$$dw=\mu\frac{mM}{r^2}dr \tag{1}$$

其中 μ为引力常数。

因为物体在地球表面所受的重力与引力相等，所以有

$$mg=\mu\frac{mM}{R^2} \text{或} \ \mu=\frac{gR^2}{M}$$

将 μ 值代入（1）式中得

$$dw=\frac{mgR^2}{r^2}dr$$

于是，将火箭由地面送到距离地心为 $b(b>R)$ 处需做功

$$W=\int_R^b dw=\int_R^b\frac{mgR^2}{r^2}dr=mgR^2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{b}\right) \quad (2)$$

容易看出，如果要火箭脱离地球引力，这时火箭克服地球引力所做的功，就是当 $b\to+\infty$时，（2）式的极限，即

$$\lim_{b\to\infty}\int_R^b\frac{mgR^2}{r^2}dr=\lim_{b\to\infty} mgR^2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{b}\right)=mgR$$

上述问题，就是一个积分上限无限增大的极限问题。实际上，它就是一个无穷积分的例子。一般情况是

定义 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上有定义，对任意 $A(a<A)$，函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, A]$ 上可积，符号

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx \tag{20.1}$$

称为函数 $f(x)$在无穷区间 $[a, +\infty)$ 上的积分，简称**无穷积分**。

如果当 $A\to+\infty$ 时，积分 $\int_a^A f(x)dx$ 存在极限，则称无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ **收敛**。即

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{A\to\infty}\int_a^A f(x)dx \tag{20.2}$$

如果当 $A\to+\infty$ 时，积分 $\int_a^A f(x)dx$ 不存在极限，则称无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ **发散**。

设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, b]$ 上有定义，对任意 $B(B<b)$，函数 $f(x)$ 在闭区间 $[B,b]$ 上可积，符号

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx \tag{20.3}$$

称为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty, b]$ 上的积分，简称**无穷积分**。

如果当 $B\to-\infty$ 时，积分 $\int_{B}^{b} f(x)dx$ 存在极限，则称无穷积分 $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ **收敛**，即

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim_{B\to-\infty}\int_{B}^{b} f(x)dx \tag{20.4}$$

如果当 $B\to-\infty$ 时，积分 $\int_{B}^{b} f(x)dx$ 不存在极限，则称无穷积分 $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ **发散**。

对于函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的无穷积分有如下的定义：

定义 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义，对任意的 $-\infty<B<A<+\infty$，函数 $f(x)$ 在闭区间 $[B, A]$ 上可积，符号

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

称为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的积分，简称**无穷积分**。

如果对任意的 $c\in(-\infty, +\infty)$，函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, c]$ 和 $[c, +\infty)$ 上的无穷积分 $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ 与 $\int_{c}^{+\infty} f(x)dx$ 皆收敛，则称函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx=\int_{-\infty}^{c} f(x)dx+\int_{c}^{+\infty} f(x)dx \tag{20.5}$$

如果存在 $c\in(-\infty,+\infty)$，函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,c]$ 或 $[c,+\infty)$ 上的无穷积分 $\int_{-\infty}^{c}f(x)dx$ 或 $\int_{c}^{+\infty}f(x)dx$ 发散，则称函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 发散。

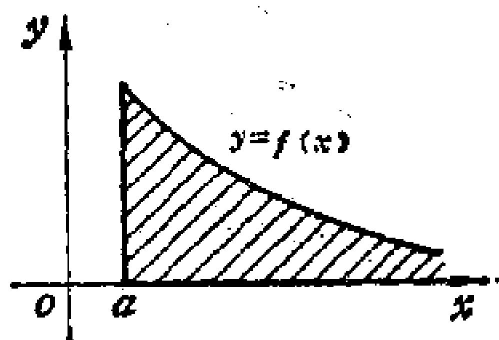


图20.1

无穷积分有明显的几何意义：我们知道，如果函数 $f(x)>0$ $(a\leqslant x\leqslant b)$，则定积分 $\int_{a}^{b}f(x)dx$ 表示由直线 $x=a$，$x=b$，$y=0$ (x轴)和曲线 $y=f(x)$ 所围成的曲边梯形的面积。同样，无穷积分 $\int_{a}^{+\infty}f(x)dx$ 是由直线 $x=a$，$y=0$(x 轴)和曲线 $y=f(x)$ 所围成的向右方"无限延伸"图形（如图20.1）的面积。

例1 讨论无穷积分 $\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^{p}}(a>0)$ 的敛散性。

解 1°当 $p\neq1$ 时，根据无穷积分收敛定义，有

$$\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^{p}}=\lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b}\frac{dx}{x^{p}}=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{x^{1-p}}{1-p}\right)\Big|_{a}^{b}$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-p}(b^{1-p}-a^{1-p})=\begin{cases}\dfrac{a^{1-p}}{p-1},\text{当 } p>1\\ +\infty,\text{时 } p<1\end{cases}$$

2°当 $p=1$ 时，根据无穷积分敛散性定义，有

$$\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^{p}}=\lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}(\ln b-\ln a)=+\infty$$

综上所述，无穷积分 $\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^{p}}$ 当 $p>1$ 时收敛，其值为 $\frac{a^{1-p}}{p-1}$，当 $p\leqslant1$ 时发散。

例 2 计算无穷积分$\int_1^{+\infty} xe^{-x^2}dx$。

解 $\int_1^{+\infty} xe^{-x^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b xe^{-x^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)\Big|_1^b$

$$=\frac{-1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(e^{-b^2}-\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{2e}$$

例 3 计算广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$。

解 因为对任意实数 a，无穷积分

$$\int_{-\infty}^{a}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to-\infty}\int_b^a\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to-\infty}(\mathrm{arctg}a-\mathrm{arctg}b)$$

$$=\mathrm{arctg}a-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\mathrm{arctg}a+\frac{\pi}{2}$$

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{c\to+\infty}\int_a^c\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{c\to+\infty}(\mathrm{arctg}c-\mathrm{arctg}a)$$

$$=\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}a$$

所以，根据无穷积分收敛的定义，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{a}\frac{dx}{1+x^2}+\int_a^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=\mathrm{arctg}a+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}a=\pi$$

二　无穷积分的性质

前面已经看到，因为无穷积分是积分上限（或下限）所确定的函数 $F(b)=\int_a^b f(x)dx$（或$F(a)=\int_a^b f(x)dx$）当 $b\to+\infty$（或$a\to-\infty$）时的极限．所以，根据极限与定积分的性质，不难推出无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 具有下列简单性质：

1．如果无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛，则对任意 $c>a$，无穷

积分$\int_c^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛，且

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$$

2．如果无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛，k 为常数，则无穷积分$\int_a^{+\infty} kf(x)dx$ 也收敛，且

$$\int_a^{+\infty} kf(x)dx = k\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

3．如果无穷积分$\int_a^{+\infty} f_1(x)dx$与$\int_a^{+\infty} f_2(x)dx$皆收敛，则无穷积分$\int_a^{+\infty} [f_1(x) \pm f_2(x)]dx$ 也收敛，且

$$\int_a^{+\infty} [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int_a^{+\infty} f_1(x)dx \pm \int_a^{+\infty} f_2(x)dx$$

4．如果无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，$F(x)$为 $f(x)$ 的原函数，则

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} F(x)\Big|_a^b$$

$$= \lim_{b \to +\infty}[F(b) - F(a)] = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty}$$

其中$F(+\infty) = \lim\limits_{b \to +\infty} F(b)$.

这是无穷积分的微积分基本公式.

5．如果$u(x)$，$v(x)$ 在区间$[a, +\infty)$上可导，且$\int_a^{+\infty} udv$，$uv\Big|_a^{+\infty}$与$\int_a^{+\infty} vdu$ 中，至少有两个收敛，则另一个也收敛，且

$$\int_a^{+\infty} udv = uv\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} vdu$$

其中 $u(+\infty)\cdot v(+\infty) = \lim\limits_{b \to +\infty}[u(b)v(b)]$。

这是无穷积分的分部积分公式.

6．如果函数 $x = \varphi(t)$ 在区间 $[a, +\infty)$ (右端也可以有

限）严格单调与可导，且$\varphi(a)=a$, $\varphi(+\infty)=+\infty$ ($\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi(t)=+\infty$)，两个无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$与$\int_a^{+\infty}f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$ 有一个收敛，则另一个也收敛，且

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\int_b^{+\infty}f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

这是无穷积分的换元公式。

上述性质可由极限、定积分性质及无穷积分定义直接证明。从略。

例 4　讨论 $I_n=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^n dx$ ($n=0, 1, 2\cdots$) 的敛散性。

解　当$n=0$时，$I_0=\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=1$。由分部积分公式，当 $n=1$ 时，

$$I_1=\int_0^{+\infty}e^{-x}xdx=-xe^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=1$$

用数学归纳法，假设 I_{n-1} 收敛，则

$$I_n=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^n dx=-x^n e^{-n}\Big|_0^{+\infty}+n\int_0^{+\infty}x^{n-1}e^{-x}dx=nI_{n-1}$$

由此知 I_n 收敛，且

$$I_n=nI_{n-1}=n(n-1)I_{n-2}=\cdots=n!\,I_0=n!$$

例 5　计算$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n}$。

解　令 $x=\mathrm{tg}t$, $dx=\frac{dt}{\cos^2 t}$, $t=\mathrm{arctg}x$，当 $x=0$ 时，$t=0$；当$x=+\infty$时，$t=\frac{\pi}{2}$。由无穷积分的换元公式，有

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\cos^2 t(1+\mathrm{tg}^2 t)^n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-2}t\,dt①$$

$$=\frac{1\cdot3\cdots\cdots(2n-3)}{2\cdot4\cdots\cdots(2n-2)}\cdot\frac{\pi}{2}$$

① 见§9.5例7。

§20.2 无穷积分收敛判别法

在§20.1中，我们讨论的无穷积分的敛散性都是根据无穷积分的定义，直接计算得到的。但是，当被积函数的原函数是非初等函数或虽是初等函数，但很不好求时，就要根据被积函数的形式判别其收敛性。

一 无穷积分与无穷级数的关系

根据无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛定义，我们说无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛于 I，是指变动的积分上限 b 的函数 $F(b)=\int_a^b f(x)dx$，当$b\to+\infty$时存在极限 I，即

$$I=\lim_{b\to+\infty}F(b)=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

把它和无穷级数收敛定义 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}u_k=S$ 相比较，不难看出，

$f(x)dx$相当于 u_k，$\int_a^b f(x)dx$相当于级数的部分和$\sum\limits_{k=1}^{n}u_k=S_n$，积分值相当于级数的和，所不同的只是，无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$是函数$f(x)$在无穷区间$[a,+\infty)$上连续地作和，而无穷级数则是在自然数集上离散地作和。因此，无穷积分的敛散性与无穷级数的敛散性必存在密切的关系。

事实上，根据归结原则知，积分上限函数 $F(b)=\int_a^b f(x)dx$ 存在极限的充要条件是：对任意一个递增趋向$+\infty$的数列$\{A_n\}$ $(A_0=a)$都有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^{A_n} f(x)dx=I$$

又根据十一章几点说明2知，数列$\left\{\int_a^{A_n} f(x)dx\right\}$（其中$\{A_n\}$递增且趋向$+\infty$）与级数$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x)dx$ （$A_0=a$）具有相同的敛散性。于是我们有如下的定理：

定理20.1 无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛于I的充要条件是：对任意一个递增趋向$+\infty$的数列$\{A_n\}(A_0=a)$，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x)dx$$

收敛于同一数I。

因此，根据此定理，可以把讨论无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$的收敛性，转化为讨论无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x)dx$的收敛性。

二 被积函数非负的情形

同正项级数在级数理论中占有重要地位一样，被积函数$f(x)$非负的无穷积分，在无穷积分的理论中也占有同样重要的地位。因此，我们首先来讨论非负的被积函数的无穷积分。

我们知道，正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的充要条件是：其部分和有界。与此相应的，对于无穷积分，我们有：

定理20.2 设函数$f(x)$在无穷区间$[a,+\infty)$上非负，

1° 若积分上限函数$\int_a^t f(x)dx$在区间$[a,+\infty)$上有上界，则无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛；

2° 若积分上限函数$\int_a^t f(x)dx$在区间$[a,+\infty)$上无上

界，则无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散。

根据函数的单调有界定理，不难证明此定理。具体证明过程留给读者自己去完成。

对应于正项级数的比较判别法，有非负函数的无穷积分的比较判别法：

定理20.3（比较判别法） 设有二非负函数的无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$与$\int_a^{+\infty}g(x)dx$，对任意 $x\in[a,+\infty)$，有$0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$。

1° 若无穷积分$\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 收敛，则无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$也收敛；

2° 若无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散，则无穷积分$\int_a^{+\infty}g(x)dx$也发散。

证明 1° 因为无穷积分$\int_a^{+\infty}g(x)dx$收敛，根据定理20.2知，积分上限函数$\int_a^b g(x)dx$在区间$[a,+\infty)$必有上界（否则$\int_a^b g(x)dx$无上界，根据定理20.2之2°，无穷积分$\int_a^{+\infty}g(x)dx$发散，与题设无穷积分$\int_a^{+\infty}g(x)dx$收敛矛盾）。所以，根据不等式 $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$ 有$\int_a^b f(x)dx\leqslant\int_a^b g(x)dx$，从而，积分上限函数$\int_a^b f(x)dx$ 有上界，再根据定理20.2之1°，无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛。

2° 用反证法。若无穷积分$\int_a^{+\infty}g(x)dx$收敛，由1°知，无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 也收敛，这与题设无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发

散矛盾。 □

例1 判别无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{1+x^2}dx$的敛散性。

解 因为，对任意 $x\in[1,+\infty)$，有

$$\frac{\sin^2 x}{1+x^2}\leqslant\frac{1}{1+x^2}<\frac{1}{x^2}$$

而无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$收敛($p=2>1$ 见上节例1)，所以根据比较判别法知，无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{1+x^2}dx$是收敛的。

例2 判别概率积分$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$的敛散性。

解 由无穷积分性质1，有

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\int_0^1 e^{-x^2}dx+\int_1^{+\infty}e^{-x^2}dx \qquad (2)$$

对于无穷积分$\int_1^{+\infty}e^{-x^2}dx$，因为对任意 $x\geqslant 1$ 时，有

$$e^{-x^2}\leqslant e^{-x}$$

而无穷积分$\int_1^{+\infty}e^{-x}dx$收敛（见§20.1例4，$n=0$ 的情形），所以，根据定理20.3之1°知，无穷积分$\int_1^{+\infty}e^{-x^2}dx$收敛。

因为$\int_0^1 e^{-x^2}dx$是普通的定积分，所以，由（2）式立即得到，无穷积分$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$是收敛的。

推论1 设有二非负函数的无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$与$\int_a^{+\infty}g(x)dx$，如果有极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=c$$

则1°当 $0<c<+\infty$ 时，无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$与$\int_a^{+\infty}g(x)dx$同时

收敛或同时发散；

2° 当 $c=0$ 时，由无穷积分 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛，可推得无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛；

3° 当 $c=+\infty$时，由无穷积分 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散，可推得无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$也发散。

证明 1° 设$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c$，且 $0<c<+\infty$，根据极限定义，对 $\varepsilon_0=\dfrac{c}{2}>0$，存在$x_0\in R$，当 $x>x_0$ 时，有

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-c\right|<\frac{c}{2}\text{或}\frac{c}{2}g(x)<f(x)<\frac{3c}{2}g(x) \quad (3)$$

由不等式（3）的右端和无穷积分$\int_a^{+\infty} g(x)dx$收敛。根据比较判别法之1°，无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛。

由不等式(3)和无穷积分$\int_a^{+\infty} g(x)dx$发散，根据比较判别法之2°知：无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也发散。

2° 当$c=0$时，有 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，即对 $\varepsilon=1$，存在$x_0\in R$，当 $x>x_0$ 时，有$0<\dfrac{f(x)}{g(x)}<1$，即

$$f(x)<g(x) \quad (\text{当}x>x_0\in R\text{时})$$

根据比较判别法之1°，由无穷积分$\int_a^{+\infty} g(x)dx$收敛，推得无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛。

3° 当$c=+\infty$时，有$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$，根据正无穷大

的定义，对 $M=1$，存在 $x_0\in R$，当 $x>x_0$ 时，有 $\frac{f(x)}{g(x)}>1$，即

$$f(x)>g(x) \quad (x>x_0\in R)$$

根据比较判别法之2°，由无穷积分 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散，推得无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也发散。 □

推论 2 设非负函数 $f(x)$ 在任意闭区间 $[a, A]$（任意 $A\in(a,+\infty)$）上可积，且

$$\lim_{x\to+\infty} x^p f(x)=c$$

1° 若 $p>1$，且 $0\leqslant c<+\infty$，则无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛；

2° 若 $p\leqslant 1$，且 $0<c\leqslant+\infty$，则无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散。

证明 不妨设 $a>0$①。1°若 $p>1$，且 $0\leqslant c<+\infty$，无穷积分 $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ 收敛（见§20.1例1）根据推论 1 之1°与2°知，无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛。

2° 若 $p\leqslant 1$，且 $0<c\leqslant+\infty$，无穷积分 $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ 发散（§20.1例 1），根据推论 1 之1°与3°知，无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散。 □

例 3 判别无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ 的敛散性。

---

① 如果 $a<0$，取 $a'>0$，转向讨论无穷积分 $\int_{a'}^{+\infty} f(x)dx$ 的敛散性。根据无穷积分性质 1，无穷积分 $\int_{a'}^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 有相同的敛散性。

解 $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1}{x^2\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}$，取 $P=2$，有

$$\lim_{x\to+\infty} x^2f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2\cdot\frac{1}{x^2\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=1$$

根据定理20.3推论 2 之1°知，无穷积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ 收敛。

例 4 判别无穷积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{arctg}x}{x}dx$ 的收敛性。

解 取 $P=1$，有

$$\lim_{x\to+\infty} x^pf(x)=\lim_{x\to+\infty} x\cdot\frac{\mathrm{arctg}x}{x}=\frac{\pi}{2}$$

根据定理20.3推论 2，无穷积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{arctg}x}{x}dx$ 发散。

例 5 判别无穷积分$\int_1^{+\infty}x^ae^{-x}dx(a>0)$ 的敛散性。

解 取 $P=2$，有

$$\lim_{x\to+\infty} x^pf(x)=\lim_{x\to+\infty} x^px^ae^{-x}=\lim_{x\to+\infty} x^{2+a}e^{-x}=0$$

于是，无穷积分$\int_1^{+\infty}x^ae^{-x}dx$收敛。

例 6 判别无穷积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^5+1}}dx$ 的敛散性。

解 取 $P=\dfrac{1}{2}$，有

$$\lim_{x\to+\infty} x^p\frac{x^2}{\sqrt{x^5+1}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\cdot\frac{x^2}{\sqrt{a^5+1}}=1$$

于是，无穷积分$\int_0^{+\infty}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^5+1}}dx$ 发散。

例 7 判别无穷积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln(x^2+1)}{x}dx$ 的敛散性。

解 取 $P=1$,有

$$\lim_{x\to+\infty} x^p\frac{\ln(x^2+1)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln(x^2+1)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\ln(x^2+1)$$
$$=+\infty$$

根据定理20.3推论2之3°,无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x}dx$发散。

三 被积函数为一般情形

相应于变号级数的收敛性判别法,我们来讨论被积函数为一般情形的无穷积分的收敛判别法.

根据函数极限的柯西准则,积分上限函数$\int_a^b f(x)dx$当$b\to+\infty$时存在极限,即无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛的充要条件是:对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $B>0$,当 $b_1>B$, $b^2>B$ 时,有

$$\left|\int_a^{b_2}f(x)dx-\int_a^{b_1}f(x)dx\right|<\varepsilon$$

而 $\int_a^{b_2}f(x)dx-\int_a^{b_1}f(x)dx=\int_{b_1}^{b_2}f(x)dx$

于是我们得到下面的无穷积分的柯西收敛准则:

定理20.4(柯西收敛准则) 无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛的充要条件是:对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $B>0$,当 $b_1>B$, $b_2>B$ 时,有

$$\left|\int_{b_1}^{b_2}f(x)dx\right|<\varepsilon$$

这个定理的直观意义是:函数$f(x)$的无穷积分收敛的充要条件是,函数$f(x)$在充分远处任意"一段"上积分可任意小。

定理20.5(绝对收敛定理) 如果无穷积分$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$收敛,则无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$也收敛。

证明 因为无穷积分$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$收敛，所以，根据定理20.4，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$B>0$，当$b_1>B, b_2>B$时，有

$$\left|\int_{b_1}^{b_2}|f(x)|dx\right|<\varepsilon$$

而

$$\left|\int_{b_1}^{b_2}f(x)dx\right|\leqslant\left|\int_{b_1}^{b_2}|f(x)|dx\right|<\varepsilon$$

于是，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$B>0$，当$b_1>B$，$b_2>B$时，有

$$\left|\int_{b_1}^{b_2}f(x)dx\right|<\varepsilon$$

根据定理20.4，无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛。

定义 如果无穷积分$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$收敛，则称无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$**绝对收敛**。

如果无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛，而$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$发散，则称无穷积分**条件收敛**。

例 8 判别无穷积分$\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bx dx$（$a, b$均为实常数，且$a>0$）的绝对收敛性。

解 因为$|e^{-ax}\sin bx|\leqslant e^{-ax}$（$a\leqslant x<+\infty$），而

$$\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx=-\frac{1}{a}e^{-ax}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{a}$$

即无穷积分$\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx$收敛，所以，根据比较判别法知，无穷积分$\int_a^{+\infty}|e^{-ax}\sin bx|dx$收敛。再根据定理20.5和无穷积分的绝对收敛定义，无穷积分$\int_a^{+\infty}e^{-ax}\sin bx dx$收敛，且绝对收敛。

我们曾利用阿贝尔变换证明了判别一般的(变号)数项级数收敛性的狄利克莱判别法和阿贝尔判别法。在无穷积分中，也有与之相应的判别法。

定理20.6（狄利克莱判别法） 如果对任意$b\in[a,+\infty)$，积分$\int_a^b f(x)dx$有界，而函数$g(x)$在区间$[a,+\infty)$上单调，且$g(x)\to 0(x\to+\infty$时），则无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)g(x)dx$收敛。

证明 对任意$b_1, b_2\in[a,+\infty)$，函数$f(x)$与$g(x)$在闭区间$[b_1, b_2]$上满足第二积分中值定理① 条件，于是存在$\xi\in[b_1, b_2]$，有

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)dx\right| = \left|g(b_1)\int_{b_1}^{\xi} f(x)dx + g(b_2)\int_{\xi}^{b_2} f(x)dx\right| \leqslant |g(b_1)|\left|\int_{b_1}^{\xi} f(x)dx\right| + |g(b_2)|\left|\int_{\xi}^{b_2} f(x)bx\right| \quad (4)$$

由题设，存在$M>0$，对任意$b\in[a,+\infty)$，有

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leqslant M$$

从而，对任意b和上面的ξ都有

$$\left|\int_b^{\xi} f(x)dx\right| = \left|\int_b^a f(x)dx+\int_a^{\xi} f(x)dx\right|$$

$$\leqslant\left|\int_a^{b} f(x)dx\right| + \left|\int_a^{\xi} f(x)dx\right|\leqslant M+M=2M$$

由此，对上述的ξ和任意的$b_1, b_2\in[a,+\infty)$有

$$\left|\int_{b_1}^{\xi} f(x)dx\right|<2M,\ \left|\int_{\xi}^{b_2} f(x)dx\right|<2M \quad (5)$$

因为当$x\to+\infty$时，$g(x)\to 0$，所以，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$B>0$，当$b_1, b_2>B$时，有

$$|g(b_1)|<\varepsilon,\quad |g(b_2)|<\varepsilon \quad (6)$$

比较不等式（4），（5）与（6）得到，

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)dx\right|\leqslant 2M\varepsilon+2M\varepsilon=4M\varepsilon$$

---

① 见例题选讲几点说明。

根据柯西收敛准则，无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$收敛。 □

例 9 证明无穷积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$条件收敛。

证明 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$。

讨论无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$的收敛性，由于对任意 $b\in[1,+\infty)$，有

$$\left|\int_1^b \sin x dx\right|=\left|-\cos x\Big|_1^b\right|=\left|\cos 1-\cos b\right|\leqslant 2$$

当 $x\to+\infty$时，$\frac{1}{x}$单调并趋近于 0 。根据狄利克莱判别法，无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛。

2 $\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx$ 为普通的定积分，从而无穷积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛。但它不是绝对收敛的。

事实上，对任意的 $x>0$，有

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right|\geqslant\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1}{2x}-\frac{\cos 2x}{2x}$$

因为无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x}dx$ 收敛（与判别$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛方法完全一样），而无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x}dx$ 发散。所以无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$发散。根据比较判别法，无穷积分$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ 发散。从而无穷积分

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$$

发散。根据条件收敛定义，无穷积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

条件收敛。

例10 研究无穷积分$\int_a^{+\infty}\sin x^2dx$ ($a>0$) 的收敛性。

解 令 $x^2=t$, $x=\sqrt{t}$. $dx=\frac{dt}{2\sqrt{t}}$，当 $x=a$ 时，$t=a^2$，当 $x\to+\infty$时， $t\to+\infty$，有

$$\int_a^{+\infty}\sin x^2dx=\frac{1}{2}\int_{a^2}^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$$

根据狄利克莱判别法，不难判别无穷积分$\int_{a^2}^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$ 收敛。即无穷积分$\int_a^{+\infty}\sin x^2dx$ 收敛。

注意：此例告诉我们，无穷积分收敛时，被积函数 $f(x)$ 可以不趋向 0 ($x\to+\infty$)。但对无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 来说，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则必有一般项 $u_n\to0(n\to\infty)$。这是无穷积分与无穷级数的很重要的区别。

定理20.7（阿贝尔判别法） 如果无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，函数 $g(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上单调有界，则无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)g(x)dx$ 收敛。

证明 因为无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，所以，根据无穷积分的柯西收敛准则，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在$B>0$，当$b_1,b_2>B$ 时，有

$$\left|\int_{b_1}^{\xi}d(x)dx\right|<\varepsilon,\quad \left|\int_{\xi}^{b_2}f(x)dx\right|<\varepsilon \qquad (7)$$

其中 ξ介于 b_1 与 b_2 之间。

又因无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，所以函数 $f(x)$ 在任意闭区间 $[a, b]$上可积，从而在闭区间 $[b_1, b_2] \subset [a, b]$ 上可积，而$g(x)$ 单调. 根据第二中值定理，存在某个 $\xi \in [b_1, b_2]$，使得

$$\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,g(x)dx = g(b_1)\int_{b_1}^{\xi} f(x)dx + g(b_2)\int_{\xi}^{b_2} f(x)dx \qquad (8)$$

由于函数$g(x)$在区间$[a, +\infty)$ 上有界. 于是，存在 $M>0$，对任意 $x \in [a, +\infty)$，有

$$|g(x)| \leqslant M \qquad (9)$$

由不等式（7）、（8）和（9），得

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)dx\right| \leqslant |g(b_1)| \left|\int_{b_1}^{\xi} f(x)dx\right| + |g(b_2)| \left|\int_{\xi}^{b_2} f(x)dx\right| < M\cdot\varepsilon + M\cdot\varepsilon = 2M\varepsilon$$

根据柯西收敛准则知，无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛。

§20.3 瑕积分

一 瑕积分的概念

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 的任意邻域 $(x_0-\delta, a_0+\delta)$ 内无界，①则称 x_0 是函数 $f(x)$的瑕点.

例如，$-1, 1$都是函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的瑕点.

定义 设函数 $f(a)$ 在区间 $[a, b)$ 上有定义，b 是函数

① 同样，如果函数 $f(x)$在 x_0 的任意左邻域 $(x_0-\delta, x_0)$（或任意右邻域 $(x_0, x_0+\delta)$）无界，也称点x_0是函数$f(x)$的瑕点。

$f(x)$的瑕点。对任意正数 $\varepsilon(0<\varepsilon<b-a)$，函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b-\varepsilon]$上可积。符号

$$\int_a^b f(x)dx \qquad (20.6)$$

称为函数 $f(x)$在区间 $[a, b)$上的瑕积分。

如果当 $\varepsilon\to0^+$时，积分 $\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx$存在极限，则称瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛，且

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0+}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx \qquad (20.7)$$

如果当 $\varepsilon\to0^+$ 时，积分 $\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx$ 不存在极限，则称瑕积分$\int_a^b f(x)dx$发散。

同样可定义 a是函数 $f(x)$的瑕点的情况。

设函数 $f(x)$在区间 $(a, b]$上有定义，a是函数 $f(x)$的瑕点，对任意正数 $\varepsilon(0<\varepsilon<b-a)$，函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a+\varepsilon, b]$上可积，符号

$$\int_a^b f(x)dx \qquad (20.6)$$

称为函数 $f(x)$在区间 $(a, b]$上的瑕积分。

如果当 $\varepsilon\to0^+$时，积分 $\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$存在极限，则称瑕积分$\int_a^b f(x)dx$ 收敛，且

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx \qquad (20.8)$$

如果当 $\varepsilon\to0^+$时，积分$\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ 不存在极限，则称瑕积分$\int_a^b f(x)dx$发散。

设闭区间(a, b)内只有一点$c(a<c<b)$ 是函数 $f(x)$ 的瑕点，如果两个瑕积分$\int_a^c f(x)dx$与$\int_c^b f(x)dx$ 皆收敛，则称瑕

积分$\int_a^b f(x)dx$ 收敛，且

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

如果瑕积分$\int_a^c f(x)dx$与$\int_c^b f(x)dx$中至少有一个发散，则称瑕积分$\int_a^b f(x)dx$ 发散。

如果函数 $f(x)$在闭区间 $[a,\ b]$上有有限个瑕点，可同样定义它的敛散性。

例 1. 计算瑕积分$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$。

解 被积函数$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$在$[0,1)$ 上连续，$x=1$为瑕点，有

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0+}\arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0+}\arcsin(1-\varepsilon)=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$$

例 2 讨论瑕积分$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ $(b>a,\ p>0)$的敛散性。

解 b 是被积函数的瑕点，有

1° 当 $p\neq 1$ 时，

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_a^{b-\varepsilon}\frac{dx}{(b-x)^p}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0+}\left[-\frac{1}{1-p}(b-x)^{1-p}\Big|_a^{b-\varepsilon}\right]$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\frac{1}{1-p}(b-a)^{1-p}-\frac{1}{1-p}\varepsilon^{1-p}\right]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(b-a)^{1-p}}{1-p}, & P<1\\[2ex] \infty, & P>1\end{cases}$$

2° 当$P=1$时，

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p} = \lim_{\varepsilon\to0+}\int_a^{b-\varepsilon}\frac{dx}{b-x} = \lim_{\varepsilon\to0+}[\ln(b-a)-\ln\varepsilon]$$
$$= +\infty.$$

于是，瑕积分当 $P<1$时收敛，当 $P\geqslant1$时发散。

例3 计算瑕积分$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$。

解 $x=1$ 是被积函数的瑕点，有

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} + \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to0+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} + \lim_{\varepsilon\to0+}\int_{1+\varepsilon}^3\frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to0+} 3(x-1)^{\frac{1}{3}}\Big|_0^{1-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to0+} 3(x-1)^{\frac{1}{3}}\Big|_{1+\varepsilon}^3$$
$$= 3(1+\sqrt[3]{2})$$

二 瑕积分与无穷积分的联系

经过适当的换元，瑕积分可转化为无穷积分，无穷积分可转化为瑕积分.

设 a是函数 $f(x)$的瑕点，且函数 $f(x)$在区间(a, b)上的瑕积分收敛，即

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

令 $u=\frac{1}{x-a}$或 $x=a+\frac{1}{u}$，$dx=-\frac{1}{u^2}du$。$x=a+\varepsilon$ 时，$u=\frac{1}{\varepsilon}$，$x=b$ 时，$u=\frac{1}{b-a}$，有

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$
$$= \lim_{\varepsilon\to0-}\int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{\varepsilon}} f\left(a+\frac{1}{u}\right)\frac{du}{u^2}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to0-}\int_A^{\frac{1}{\varepsilon}}\varphi(u)\,du = \lim_{\frac{1}{\varepsilon}\to+\infty}\int_A^{\frac{1}{\varepsilon}}\varphi(u)du = \int_A^{+\infty}\varphi(u)du$$

其中 $\varphi(u)=\frac{1}{u^2}f\left(a+\frac{1}{u}\right)$，$k=\frac{1}{b-a}$。于是，瑕积分转化为无穷积分。

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上的无穷积分收敛，即

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\ dx$$

存在，通常令 $u=\frac{a}{x}$ 或 $x=\frac{a}{u}$，$dx=-\frac{a}{u^2}du$，$x=a$ 时，$u=1$；$x=b$ 时，$u=\frac{a}{b}$，有

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\int_1^{\frac{a}{b}}f\ \left(\frac{a}{b}\right)\left(-\frac{a}{u^2}\right)du$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\int_{\frac{a}{b}}^1\frac{a}{u^2}f\left(\frac{a}{u}\right)du=\int_0^1\frac{a}{u^2}f\left(\frac{a}{u}\right)du$$

$$=\int_0^1\varphi(u)du$$

其中 $\varphi(u)=\frac{a}{u^2}f\left(\frac{a}{u}\right)$，$u=0$ 是函数 $\varphi(u)$ 的瑕点①。于是，无穷积分转化为瑕积分。

综上所述，只要经过适当的换元，瑕积分与无穷积分可以互相转化。从而，无穷积分所具有的简单性质（微积分公基本

---

① 有时需设其他变换方能将无穷积分化为瑕积分．例如，$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx$，若令 $u=\frac{2}{x}$，则

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_2^b\frac{dx}{x^3}=\lim_{b\to+\infty}\int_{\frac{2}{b}}^1\frac{u^3}{2^3}\cdot\frac{2}{u^2}du=\frac{1}{4}\int_0^1 udu$$

是普通的定积分

但是令 $u=\frac{1}{x^3}$，则 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^3}=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{8}}\frac{1}{\sqrt[3]{u}}du$，即无穷积分变成瑕积分

式，分部积分公式以及换元公式等都可以转移到瑕积分中来。

例 4 证明，瑕积分$\int_0^1 \frac{1}{x^a}\sin\frac{1}{x}dx$ 当 $a<2$ 时收敛。

证明 令 $x=\frac{1}{t}$，$dx=-\frac{1}{t^2}dt$；$t=\frac{1}{x}$，当 $x=\varepsilon$ 时，$t=\frac{1}{\varepsilon}$，$x=1$时，$t=1$，有

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a}\sin\frac{1}{x}dx=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^a}\sin\frac{1}{x}dx$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^1 t^a\sin t\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_1^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{\sin t}{t^{2-a}}dt=\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{2-a}}dt$$

根据狄利克莱判别法，当 $2-a>0$时，即 $a<2$ 时，无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{2-a}}dt$收敛。于是，当 $a<2$ 时，瑕积分$\int_0^1\frac{1}{x^a}\sin\frac{1}{x}dx$收敛。

§20.4 瑕积分收敛判别法

我们已经看到，对瑕积分通过一个适当的换元，可转化为无穷积分，反之亦然。因此，对无穷积分建立的敛散性判别法都可以相应地转移到瑕积分中来。所以，对瑕积分的敛散性判别法只给出结果而不加证明。

为了确定起见，我们只讨论积分区间右端点是瑕点的情形。

定理20.8 设函数 $f(x)$在区间$[a, b)$ 上非负，

1° 若对任意的 $\varepsilon>0(a<b-\varepsilon)$，积分$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ 有上界，则瑕积分$\int_a^b f(x)dx$ 收敛；

2° 若对任意的 $\varepsilon>0$，积分$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ 无上界，则瑕积分$\int_a^b f(x)dx$ 发散。

定理20.9（比较判别法） 设有二非负函数的瑕积分$\int_a^b f(x)dx$ 与$\int_a^b g(x)dx$，对任意 $x\in[a,b)$，有

$$0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$$

1° 若瑕积分$\int_a^b g(x)dx$ 收敛，则瑕积分$\int_a^b f(x)dx$ 也收敛；

2° 若瑕积分$\int_a^b f(x)dx$ 发散，则瑕积分$\int_a^b g(x)dx$ 也发散。

推论1 设有二非负函数的瑕积分$\int_a^b f(x)dx$与$\int_a^b g(x)dx$ 如果有极限

$$\lim_{x\to b-0}\frac{f(x)}{g(x)}=c$$

则1°当 $0<c<+\infty$ 时，瑕积分$\int_a^b f(x)dx$与$\int_a^b g(x)dx$ 同时收敛或同时发散；

2° 当$c=0$时，由瑕积分$\int_a^b g(x)dx$ 收敛，可推得瑕积分$\int_a^b f(x)dx$ 也收敛；

3° 当 $c=+\infty$时，由瑕积分$\int_a^b g(x)dx$ 发散，可推得瑕积分$\int_a^b f(x)dx$ 也发散。

推论2 设非负函数 $f(x)$在任意闭区间$[a,\ b-\varepsilon]$（任意$0<\varepsilon<b-a$）上可积，且

$$\lim_{x\to b-0}(b-x)^p f(x)=c$$

1° 若 $P<1$，且 $0\leqslant c<+\infty$，则瑕积分$\int_a^b f(x)dx$收敛；

2° 若$P\geqslant 1$，且 $0<c\leqslant+\infty$，则瑕积分$\int_a^b f(x)dx$ 发散.

定理20.10（柯西收敛准则） 瑕积分$\int_a^b f(x)dx$ 收敛的充要条件是：对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $b-\delta<x_1<b$，$b-\delta<x_2<b$时，有

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right|<\varepsilon$$

定理20.11（绝对收敛定理） 如果瑕积分$\int_a^b |f(x)|dx$ 收敛，则瑕积分$\int_a^b f(x)dx$ 也收敛.

定义 如果瑕积分$\int_a^b|f(x)|dx$收敛，则称瑕积分$\int_a^b f(x)dx$**绝对收敛**.

如果瑕积分$\int_a^b f(x)dx$收敛，而瑕积分$\int_a^b |f(x)|dx$ 发散，则称瑕积分**条件收敛**.

定理20.12（狄利克莱判别法） 设 b 为被积函数 $f(x)$ 的瑕点. 如果对任意$\varepsilon(0<\varepsilon<b-a)$，积分$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ 有上界，而函数$g(x)$在区间$[a,b)$上单调，且$g(x)\to 0(x\to b$时)，则瑕积分$\int_a^b f(x)g(x)dx$收敛.

下面给出定理20.12的一个特殊情形.

定理20.12′ 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上连续，且存在$M>0$，使得对任意的 $\varepsilon(0<\varepsilon<b-a)$，都有

$$\left|\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx\right|\leqslant M$$

则瑕积分$\int_a^b (b-x)^\alpha f(x)dx$ 收敛$(\alpha>0)$.

定理20.13（阿贝尔判别法） 设 b为被积函数 $f(x)$ 的瑕

点. 如果瑕积分$\int_a^b f(x)dx$收敛，函数 $g(x)$ 在区间$[a,b)$上单调有界，则瑕积分$\int_a^b f(x)g(x)dx$ 收敛.

例1 判别瑕积分$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$ 的敛散性.

解 因为，

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}ax = -\int_0^1 \frac{-\ln x}{\sqrt{x}}dx$$

所以，我们来判别非负函数$\frac{-\ln x}{\sqrt{x}}$的瑕积分$\int_0^1 \frac{-\ln x}{\sqrt{x}}dx$ 的敛散性.

$x=0$是被积函数$\frac{-\ln x}{\sqrt{x}}$的瑕点. 取 $P=\frac{3}{4}<1$, 有

$$\lim_{x\to 0+} x^{\frac{3}{4}}\cdot\frac{-\ln x}{x^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to 0+} -x^{\frac{1}{4}}\ln x = 0 < +\infty$$

根据定理20.9之推论 2，瑕积分$\int_0^1 \frac{-\ln x}{\sqrt{x}}dx$ 收敛，从而瑕积分$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$ 收敛.

例2 判别瑕积分$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}dx$ 的敛散性.

解 $x=1$是被积分函数$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}$的瑕点. 取 $P=\frac{1}{2}<1$, 有

$$\lim_{x\to 1-0}(1-x)^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} = \lim_{x\to 1-0}\sqrt{1-x}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2)}}$$

$$=\frac{1}{2}<+\infty$$

根据定理20.9之推论 2，瑕积分$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}dx$ 收敛.

例 3　判别瑕积分$\int_0^1 \frac{1}{x^{2-\alpha}}\cos\frac{1}{x}dx(0<\alpha<2)$的敛散性.

解　$x=0$ 是被积函数的瑕点. 因为

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{2-\alpha}}\cos\frac{1}{x}dx=\int_1^0 x^{\alpha}\cdot\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}dx$$

对于瑕积分$\int_1^0 x^{\alpha}\cdot\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}dx$. 令 $f(x)=\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$，显然 $f(x)$在区间$(0,1]$上连续，且存在 $M=2>0$，对任意$\varepsilon(0<\varepsilon<1)$，都有

$$\left|\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}dx\right|=\left|-\int_\varepsilon^1\cos\frac{1}{x}\ d\frac{1}{x}\right|$$

$$=\left|-\sin\frac{1}{x}\Big|_\varepsilon^1\right|\leqslant 2$$

又已知$\alpha>0$，根据定理20.12′，瑕积分$\int_0^1 \frac{1}{x^{2-\alpha}}\cos\frac{1}{x}dx$ 收敛.

例 4　讨论广义积分$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx$ 的敛散性.

解　$\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx=\int_0^1\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx+\int_1^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx$.

对 $I_1=\int_0^1\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx$，当$\alpha\geqslant 1$时，为定积分. 当 $\alpha<1$ 时，$x=0$是被积函数的瑕点. 取 $P=1-\alpha$，有

$$\lim_{x\to 0+} x^P\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}=\lim_{x\to 0+} x^{1-\alpha}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}=1<+\infty$$

当 $P=1-\alpha<1$时，即当 $\alpha>0$ 时，I_1 收敛；当 $P=1-\alpha\geqslant 1$ 时，即当 $\alpha\leqslant 0$ 时，I_1 发散.

对 $I_2=\int_1^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx$，它是无穷积分.

当 $\alpha\geqslant 1$时，取 $P=1$，有

$$\lim_{x\to+\infty} x^P\cdot\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}=\lim_{x\to+\infty} x\cdot\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}=\begin{cases}1,\text{当 }\alpha=1\\+\infty,\text{当}\alpha>1\end{cases}$$

根据定理20.3之推论2，无穷积分 I_2 发散。

当 $\alpha<1$时，取 $P=2-\alpha$，即 $P>1$，有

$$\lim_{x\to+\infty}x^{p}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}=\lim_{x\to+\infty}x^{2-\alpha}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x}=1$$

根据定理20.3之推论2，无穷积分 I_2 收敛。

综上所述，我们有下表

	$\alpha\leqslant0$	$0<\alpha<1$	$\alpha\geqslant1$
I_1	发散	收敛	定积分
I_2	收敛	收敛	发 散
I	发散	收敛	发 散

例5　求欧拉① 积分

（1）$B(P,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$

（2）$\Gamma(S)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx$

的收敛域。

解　（1）因为当 $P<1$时，0是瑕点；当 $q<1$时，1是瑕点。所以，需将瑕积分 $B(p,q)$ 改写为

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

设 $I_1=\int_0^{\frac{1}{2}}x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$与 $I_2=\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$。

对 I_1，取 $\lambda=1-p$，有

$$\lim_{x\to0+}x^{\lambda}x^{p-1}(1-x)^{q-1}=\lim_{x\to0+}x^{1-p}\cdot x^{p-1}(1-x)^{q-1}=1 \tag{1}$$

根据定理20.9推论2，由（1）式，当 $\lambda=1-p<1$，即当 $P>$

① 欧拉，Euler，L.瑞士数学家，1707—1783。

0，q任意数时，I_1 收敛。

对I_2，取 $\lambda=1-q$，有

$$\lim_{x\to 1-0}(1-x)^{\lambda}x^{p-1}(1-x)^{q-1}$$

$$=\lim_{x\to 1-0}(1-x)^{1-q}x^{p-1}(1-x)^{q-1}=1 \qquad (2)$$

根据定理20.9推论2，由（2）式，当 $\lambda=1-q<1$即当$q>0$，P为任意数时，I_2 收敛。

总之，当 $P>0$，$q>0$ 时，I_1 与 I_2 同时收敛，从而$B(p,q)$ 收敛。

（2）因为当 $S<1$ 时，0 是被积函数的瑕点，同时它是一个无穷积分，所以需将广义积分 $\Gamma(S)$ 改写为①

$$\Gamma(S)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx=\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx+\int_1^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx$$

设 $I_3=\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx$，与 $I_4=\int_1^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx$。

对 I_3，取 $\lambda=1-S$，有

$$\lim_{x\to 0+}x^{\lambda}x^{s-1}e^{-x}=\lim_{x\to 0+}x^{1-s}x^{s-1}e^{-x}=1 \qquad (3)$$

根据定理20.9推论2，由（3）式，当 $\lambda=1-S<1$，即当 $S>0$ 时，I_3 收敛。

对 I_4，取 $\lambda>1$，对任意 S，有

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\lambda}x^{s-1}e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}x^{\lambda+s-1}e^{-x}=0<+\infty \qquad (4)$$

根据定理20.3推论2，由（4）式知，对任意S，无穷积分I_4收敛。

总之，当 $S>0$时，I_3 与 I_4 同时收敛，从而 $\Gamma(S)$收敛。

---

① 一般说来，$\Gamma(s)$ 可改写为任一形式

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx=\int_0^{a}x^{s-1}e^{-x}dx+\int_a^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx$$

其中 a 为任意正数，即 $0<a<+\infty$ 为了简单明确，通常取 $a=1$，即

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx=\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx+\int_1^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx$$

学 习 指 导

一 内容概要

1 重点及要求

本章主要是讨论两种广义积分（无穷积分与瑕积分）的敛散性及其判别法.

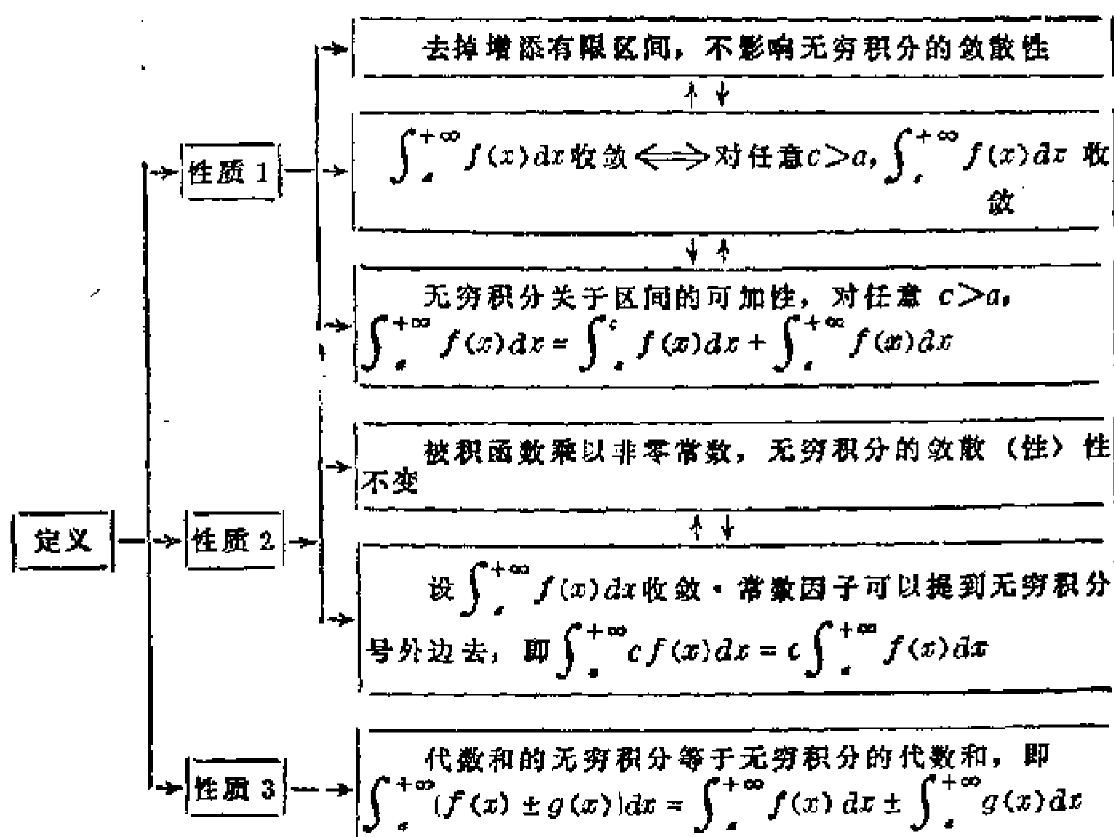
读者一定要深入理解与掌握无穷积分、瑕积分的收敛和发散的概念. 会应用收敛定义判别某些无穷积分和瑕积分的敛散性. 判别非负函数的无穷积分（或瑕积分）敛散性的定理20.2（或定理20.8）是根据函数的单调有界定理证明的，它是比较判别法及其推论的基础，比较判别法的推论 2 是判别无穷积分或瑕积分经常使用的非常有效的方法，读者一定要掌握好，运用好.

与"p"级数相应的无穷积分$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$，瑕积分$\int_a^b\frac{dx}{(b-x)^p}$（或$\int_a^b\left(\frac{dx}{(x-a)^p}\right)$在无穷积分或瑕积分中，也具有象 P 级数在级数中的同样重要的地位.

对于判别被积函数为一般情形的无穷积分与瑕积分的敛散性，要掌握好绝对收敛定理和两个充分性判别法——狄利克莱判别法和阿贝尔判别法. 狄利克莱判别法和阿贝尔判别法都是根据柯西收敛准则推导出来的. 从理论上说，柯西收敛准则可以判别一切广义积分的敛散性，所以说柯西收敛准则有较高的理论意义.

此外，广义积分的性质对判别广义积分的收敛性，以及计算广义积分也是很有作用的.

2 无穷积分的基本性质



瑕积分有完全类似的性质，读者可自己列表给出。

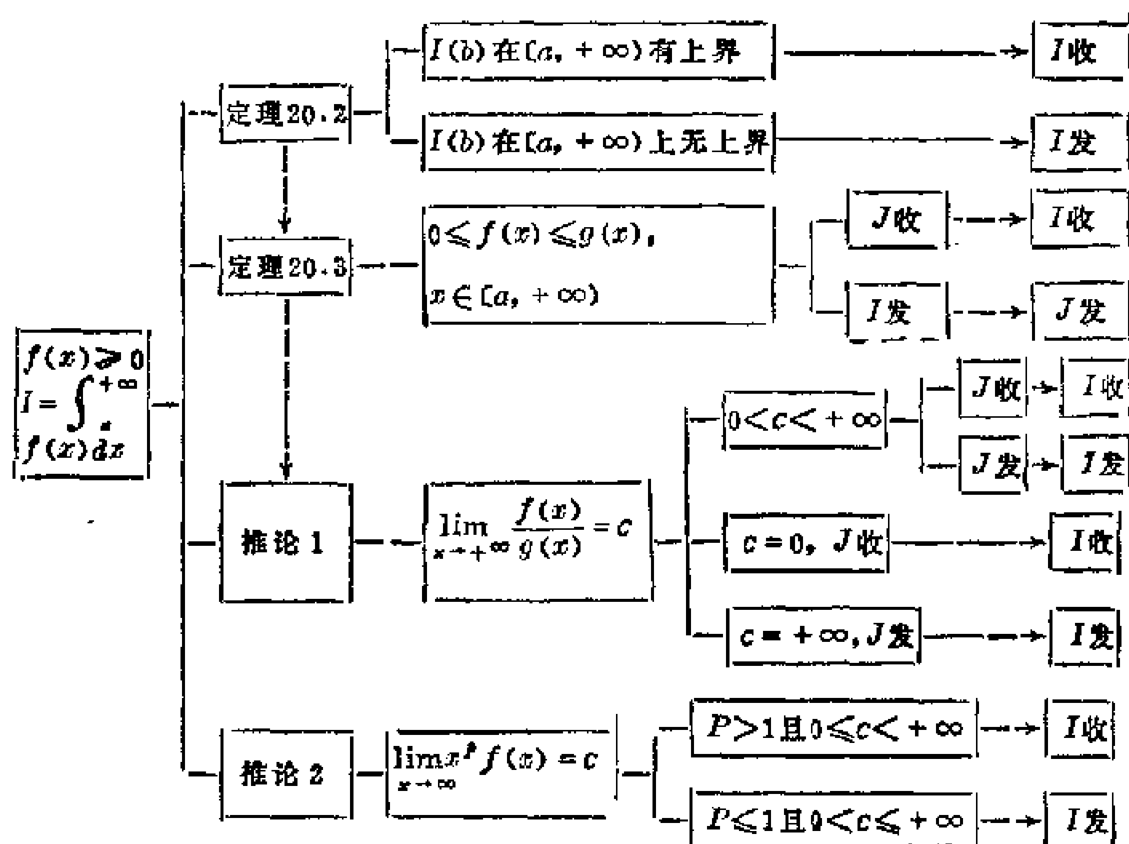
3 无穷积分的计算公式

名　　称	条　　　　件	公　　　式
微积分基本公式	(1) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛； (2) $F(x)$是 $f(x)$ 的原函数	$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big\|_a^{+\infty}$
分部积分公式	(1) $u(x)$，$v(x)$在$[a, +\infty)$上可导； (2) $\int_a^{+\infty} udv$，$uv\Big\|_a^{+\infty}$，$\int_a^{+\infty} vdu$ 中有两个存在	$\int_a^{+\infty} udv = uv\Big\|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} vdu$
换元公式	(1) $x=\varphi(t)$ 在$[\alpha, +\infty)$ 上严格单调，可导，$\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(+\infty)=+\infty$； (2) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$与$\int_\alpha^{+\infty} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$ 中至少有一个收敛	$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_\alpha^{+\infty} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$

瑕积分有相应的计算公式，读者自己列表给出结果。

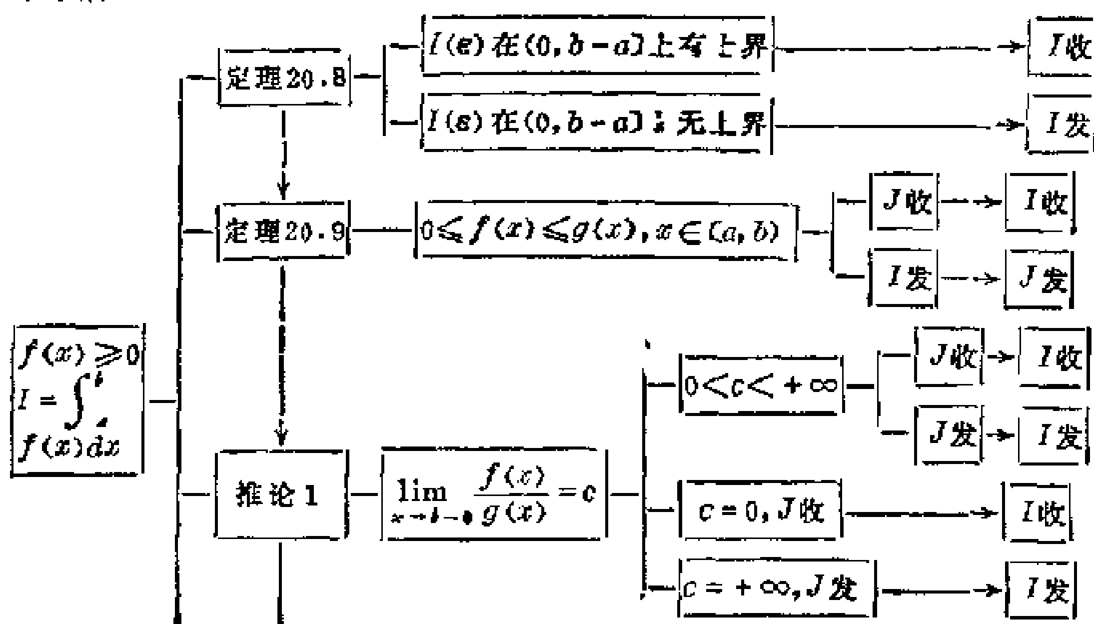
4 非负函数的无穷积分收敛判别法

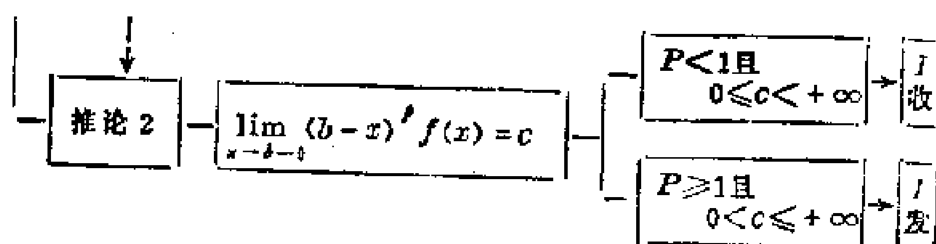
设 $I=\int_a^{+\infty}f(x)dx, J=\int_a^{+\infty}g(x)dx,\ I(b)=\int_a^b f(x)dx$。



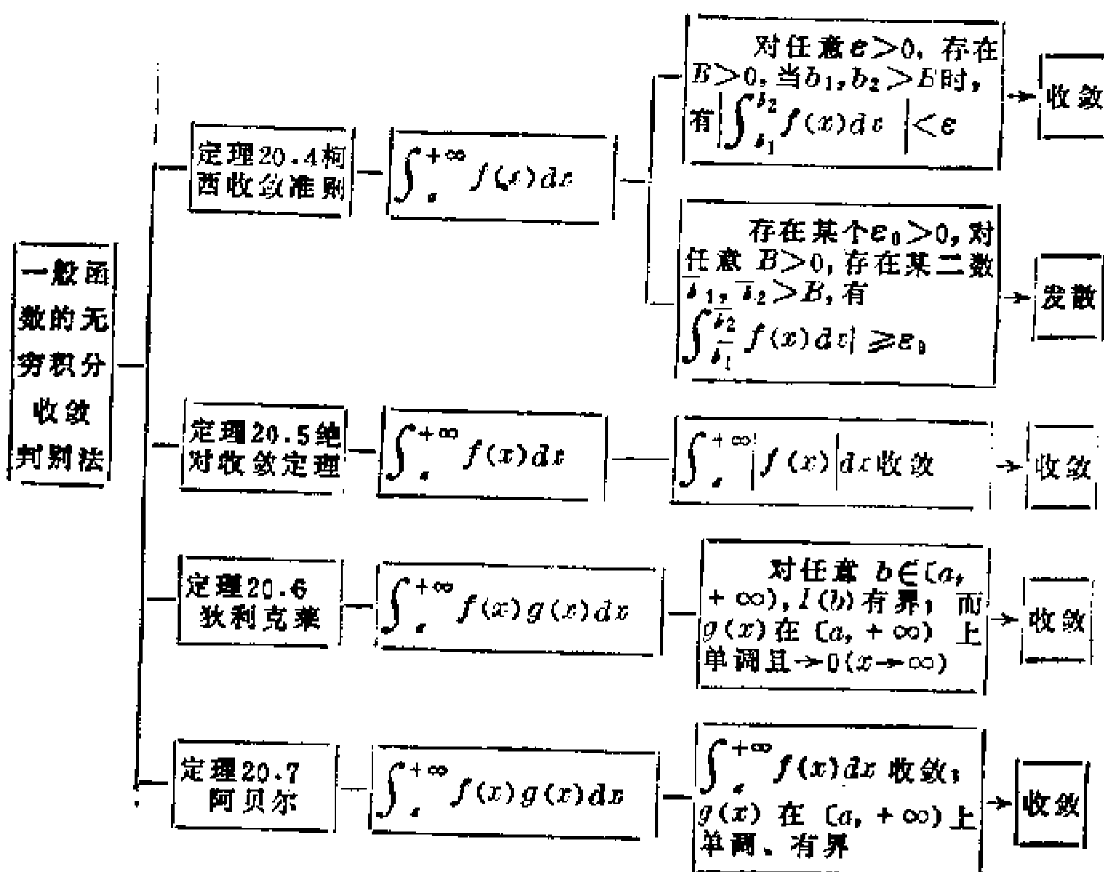
4′ 非负函数的瑕积分收敛判别法

设 $I=\int_a^b f(x)dx, J=\int_a^b g(x)dx,\ I(\varepsilon)=\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, b 为瑕点。

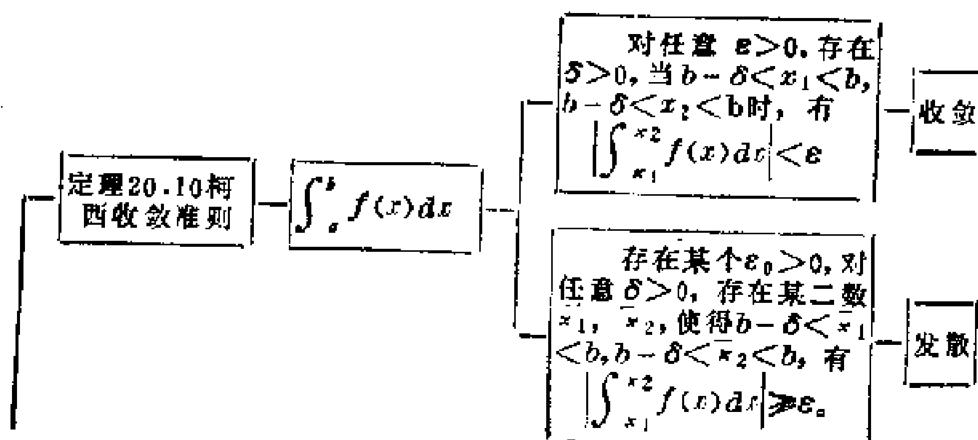


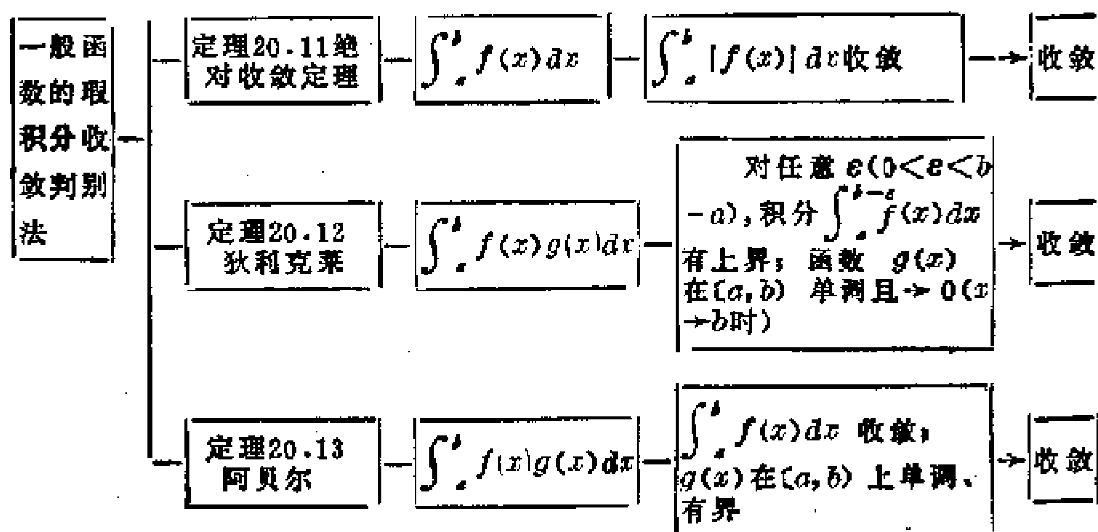


5 一般函数的无穷积分收敛判别法



5′ 一般函数的瑕积分判别法





二 几 点 说 明

1 无穷积分与定积分，无穷积分与级数的异同点

在学习无穷积分① 时，要特别注意无穷积分与定积分，无穷积分与级数之间有哪些共同点，哪些不同点．抓住这些异同点就能更好地掌握无穷积分的实质，同时也便于记忆和应用。

由于无穷积分是定积分从有限区间到无限区间上的推广．因此，无穷积分有许多性质与定积分非常相似．现列表对比如下：

	定积分	无穷积分
1	关于被积函数的可加性 $\int_a^A[f(x)\pm g(x)]dx$ $=\int_a^A f(x)dx\pm\int_a^A g(x)dx$	关于被积函数的可加性 $\int_a^{+\infty}[f(x)\pm g(x)]dx$ $=\int_a^{+\infty}f(x)dx\pm\int_a^{+\infty}g(x)dx$
2	常数因子可以提到积分号外边来． $\int_a^A kf(x)dx=k\int_a^A f(x)dx$	常数因子可以提到积分号外边来． $\int_a^{+\infty}kf(x)dx$ $=k\int_a^{+\infty}f(x)dx$

① 对于瑕积分也是一样，从略

	定积分	无穷积分
3	关于积分区间的可加性，对任意 $c(a<c<b)$，有 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$	关于积分区间的可加性，对任意 $c(a<c<+\infty)$，有 $\int_a^{+\infty} f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^{+\infty} f(x)dx$
4	积分保号性 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $f(x)\geqslant 0$，则 $\int_a^b f(x)dx\geqslant 0$	积分保号性 若无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，且对任意 $x\in(a,+\infty)$，$f(x)\geqslant 0$ 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx\geqslant 0$

同样由于级数收敛是指，部分和数列$\{S_n\}$当 $n\to\infty$ 时存在极限，即

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k=S$$

而无穷积分收敛是指，任意区间上的积分，当上限 $A\to+\infty$ 时，存在极限，即

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx=\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

不难看出，在这两个定义中，“$\lim\limits_{n\to\infty}$”与“$\lim\limits_{A\to+\infty}$”，$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 与 $\int_a^A f(x)dx$ 以及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 皆是非常类似的。因此，无穷积分的定义、性质和判别法都与级数非常类似。现列表对比如下

	级　　数	无穷积分
定义	当$n\to\infty$时，S_n存在极限，即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$	当$A\to+\infty$时，$\int_a^A f(x)dx$存在极限，即 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx=I=\int_a^{+\infty}f(x)dx$
性质 1	常数因子可以提到无穷和号外边来． 即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ca_n=c\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$	常数因子可以提到无穷积分号外边来 即$\int_a^{+\infty}cf(x)dx=c\int_a^{+\infty}f(x)dx$
性质 2	代数和的"无穷和"（级数）等于无穷和（级数）的代数和，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\pm\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$	代数和的无穷积分等于无穷积分的代数和，即 $\int_a^{+\infty}(f(x)\pm g(x))dx$ $=\int_a^{+\infty}f(x)dx\pm\int_a^{+\infty}g(x)dx$
性质 3	去掉增添有限项不影响级数的敛散性	去掉增添有限区间不影响无穷积分的敛散性
判别法	收敛原性 比较判别法 推论 柯西收敛准则 绝对收敛定理 狄利克莱 阿贝尔	定理20.2 比较判别法 推论1 柯西收敛准则 绝对收敛定理 狄利克莱 阿贝尔

无穷积分与级数的不同点是，级数有些特殊的判别法．例如柯西判别法、达兰贝尔判别法、莱布尼茨判别法等，无穷积分无相应的判别法．此外，若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则$a_n\to 0(n\to\infty)$．无穷积分无此性质．

上述讨论对微积分也适合．

2　第二中值定理的补充证明

定理 如果函数 $f(x)$在闭区间 $[a, b]$上可积，函数$g(x)$在闭区间$[a,b]$上非负，且递减，则存在某一点 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx$$

证明 因为函数 $f(x)$与 $g(x)$皆在闭区间$[a,b]$上可积，所以，函数 $f(x)g(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上也可积. 在闭区间$[a,b]$上任取一列分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_i<\cdots<x_n=b$$

根据积分关于区间的可加性，有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)g(x)dx$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}g(x_i)\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)dx+\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}[g(x)-g(x_i)]f(x)dx$$

$$=\sigma+\rho$$

其中 $\sigma=\sum_{i=0}^{n-1}g(x_i)\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)dx, \rho=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}[g(x)-g(x_i)]f(x)dx.$

令 ω_i 表出$g(x)$在闭区间$[x_i,x_{i+1}]$$(i=0,1, 2, \cdots,n-1)$上的振幅，又已知函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$ 上可积，故必有界，即存在k，对任意$x\in[a,b]$，有 $|f(x)|\leqslant k$. 从而，有

$$|\rho| = \left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}[g(x)-g(x_i)]f(x)dx\right|$$

$$\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}|g(x)-g(x_i)||f(x)|dx$$

$$\leqslant k\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i$$

又因$g(x)$可积，所以当 $\lambda=\max\Delta x_i\to0$时，有$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i\to0$，

从而 $\rho\to0$（当$\lambda\to0$时），于是

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}(\sigma+\rho) = \lim_{\lambda\to 0}\sigma$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n} g(x_i)\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \qquad (1)$$

设 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$， 根据定理9.15知，积分上限函数 $F(x)$ 在闭区间〔a, b〕上连续，根据阿贝尔变换，有

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} g(x_i)\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} g(x_i)\left[\int_a^{x_{i+1}} f(x)dx - \int_a^{x_i} f(x)dx\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} g(x_i)[F(x_{i+1}) - F(x_i)]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})[F(x_i) - F(x_{i-1})]$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1}\left\{\left[g(x_{i-1}) - g(x_i)\right]\cdot\sum_{k=1}^{n}\left[F(x_k) - F(x_{k-1})\right]\right\}$$

$$+ g(x_{n-1})\sum_{i=1}^{n}[F(x_i) - F(x_{i-1})]$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1}[g(x_{i-1}) - g(x_i)][F(x_i) - F(x_0)]$$

$$+ g(x_{n-1})[F(b) - F(x_0)]$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1}[g(x_{i-1}) - g(x_i)]F(x_i) + g(x_{n-1})F(b)$$

因为$F(t)$在闭区间〔a, b〕上连续，所以，根据闭区间上的连续函数性质，能取到最大值M和最小值m，又由题设 $g(x)$ 非负、递减，有$g(x_{n-1})\geqslant 0$, $g(x_{i-1})-g(x_i)\geqslant 0$，于是有不等式

$$m\left\{\sum_{i=1}^{n-1}[g(x_{i-1})-g(x_i)]+g(x_{n-1})\right\}$$

$$\leqslant\sigma\leqslant M\left\{\sum_{i=1}^{n-1}[g(x_{i-1})-g(x_i)]+g(x_{n-1})\right\}$$

即 $$mg(a)\leqslant\sigma\leqslant Mg(a) \tag{2}$$

令 $\lambda\to 0$，对（2）式取极限，由（1）式得

$$mg(a)\leqslant\int_a^b f(x)g(x)dx\leqslant Mg(a)$$

由题设 $g(x)$非负，不妨设 $g(a)>0$，从而

$$m\leqslant\frac{1}{g(a)}\int_a^b f(x)g(x)dx\leqslant M$$

由于$F(x)$在$[a,b]$上连续，于是，根据连续函数的介值性，必至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使

$$F(\xi)=\int_a^\xi f(t)dt=\frac{1}{g(a)}\int_a^b f(x)g(x)dx$$

即

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^\xi f(x)dx$$

如果$g(a)=0$，由于 $g(x)$非负递减，就有 $g(x)\equiv 0$。此时等式左边为常数 0 的积分，右边含有零因子 $g(a)$，所以对任意 $\xi\in[a,b]$ 等式成立。

在通常情况下，函数$g(x)$不一定非负，这时我们设 $\varphi(x)=g(x)-g(b)$，显然，$\varphi(x)$递减，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，于是根据上面的定理，有

$$\int_a^b f(x)\varphi(x dx=\varphi(a)\int_a^\xi f(x)dx$$

即

$$\int_a^b f(x)[g(x)-g(b)]dx=[g(a)-g(b)]\int_a^\xi f(x)dx$$

从而有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=[g(a)-g(b)]\int_a^\xi f(x)dx+$$

$$g(b)\int_a^b f(x)dx$$

$$=g(a)\int_a^\xi f(x)dx+g(b)\left[\int_a^b f(x)dx-\int_a^\xi f(x)dx\right]$$

$$=g(a)\int_a^\xi f(x)dx+g(b)\int_\xi^b f(x)dx$$

此结果对 $g(x)$为递增的情形也成立．因为这时可设 $\psi(x)=g(b)-g(x)$．显然，$\psi(x)$满足上述定理条件：$\psi(x)\geqslant 0$，且若 $x_1<x_2$ 则 $g(x_1)<g(x_2)$．从而 $-g(x_1)>-g(x_2)$ 于是 $\psi(x_1)=g(b)-g(x_1)>g(b)-g(x_2)=\psi(x_2)$．这样，应用上述定理得

$$\int_a^b f(x)\psi(x)dx=\psi(a)\int_a^\xi f(x)dx$$

$$=[g(b)-g(a)]\int_a^\xi f(x)dx$$

即

$$\int_a^b f(x)[g(b)-g(x)]dx=[g(b)-g(a)]\int_a^\xi f(x)dx$$

从而有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(b)\int_a^b f(x)dx-g(b)\int_a^\xi f(x)dx$$

$$+g(a)\int_a^\xi f(x)dx$$

$$=g(a)\int_a^\xi f(x)dx+g(b)\int_\xi^b f(x)dx$$

综上所述，我们得到积分第二中值公式的推广形式：

定理　如果函数 $f(x)$ 在闭区间$[a, b]$上可积，而 $g(x)$ 在闭区间 $[a, b]$上单调，则存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^\xi f(x)dx+g(b)\int_\xi^b f(x)dx$$

三　例题选讲

例1　判别下列积分的收敛性：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx(n\geqslant 0)$；(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$；

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^p+x^q}$。

解 (1) 即是一个无穷积分，又可能是瑕积分（当 $m<0$ 时，$x=0$是被积函数的瑕点）．为此将无穷积分改写为

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx=\int_0^1\frac{x^m}{1+x^n}dx+\int_1^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx$$

对瑕积分$\int_0^1\frac{x^m}{1+x^n}dx$

取 $P=-m$，有

$$\lim_{x\to 0}x^{-m}\cdot\frac{x^m}{1+x^n}=1$$

根据定理20.9之推论2，当 $-m<1$ 时，即 $m>-1$ 时瑕积分 $\int_0^1\frac{x^m}{1+x^n}dx$ 收敛。当 $-m\geqslant 1$ 时，即 $m\leqslant -1$ 时瑕积分 $\int_0^1\frac{x^m}{1+x^n}dx$发散。

对无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx(n\geqslant 0)$，取$P=n-m$，有

$$\lim_{x\to+\infty}x^p\frac{x^m}{1+x^n}=\lim_{x\to+\infty}x^{n-m}\frac{x^m}{1+x^n}=\begin{cases}1, & n>0\\ \frac{1}{2}, & n=0\end{cases}$$

于是，当 $P>1$即当 $n-m>1$时，无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx$ 收敛。当$n-m\leqslant 1$ 时，无穷积分发散。

综上所述，当 $n-m>1$，且$m>-1$ 时，广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx$

$(n\geqslant0)$收敛。

（2）广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$既是一个无穷积分，又可能是瑕积分（当 $n>0$，0是被积函数的瑕点）。

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$$

对瑕积分$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$，取 $P=n-1$，有

$$\lim_{x\to0}x^Pf(x)=\lim_{x\to0}x^{n-1}\frac{\ln(1+x)}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

当 $P=n-1<1$ 时，即当 $n<2$时，瑕积分$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$ 收敛；

而当 $P=n-1\geqslant1$时，即当$n\geqslant2$时，瑕积分$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$ 发散。

对无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$，取$P<n$，有

$$\lim_{x\to+\infty}x^Pf(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^{n-P}}=0$$

当$P>1$时，即 $n>1$时，无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$ 收敛。

取 $P\geqslant n$，有

$$\lim_{x\to+\infty}x^Pf(x)=\lim_{x\to+\infty}x^{P-n}\ln(1+x)=+\infty$$

当 $P\leqslant1$时，即当 $n\leqslant1$时，无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$ 发散。

综上所述，当$1<n<2$ 时，广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$ 收敛。

（3）$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^P+x^q}$既是无穷积分，又是瑕积分（当 $P>0,q>0$时，0是被积函数的瑕点）。

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^p+x^q}=\int_0^1\frac{dx}{x^p+x^q}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p+x^q}$$

不妨设 $P\leqslant q$，则对瑕积分

$$\int_0^1\frac{dx}{x^p+x^q}=\int_0^1\frac{dx}{x^p(1+x^{q-p})}$$

取 $\alpha=P$，有

$$\lim_{x\to 0}x^\alpha f(x)=\lim_{x\to 0}x^p\frac{1}{x^p(1+x^{q-p})}=1$$

当$\alpha=p<1$($q\geqslant p$任意）时收敛；当 $p\geqslant 1$($q\geqslant p$ 任意）时发散。

对无穷积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p+x^q}=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^q(1+x^{p-q})}$$

取 $\alpha=q$，有

$$\lim_{x\to\infty}x^\alpha f(x)=\lim_{x\to+\infty}x^q\frac{1}{x^q(1+x^{p-q})}=1$$

当 $q>1$($p\leqslant q$任意）时，收敛；当$q\leqslant 1$($q\leqslant p$任意）时，发散。

综上所述，当 $\min\{p,q\}<1<\max\{p,q\}$瑕积分与无穷积分同时收敛，即广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^p+x^q}$收敛。

例 2 判别广义积分$\int_0^{+\infty}e^{\sin x}\frac{\sin 2x}{x^\lambda}dx(\lambda>0)$的绝对收敛和条件收敛性。

解 设 $I=\int_1^{+\infty}e^{\sin x}\frac{\sin 2x}{x^\lambda}dx=I_1+I_2$，其中

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^\lambda}dx,\ I_2=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\infty}\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^\lambda}dx.$$

先讨论 I_1的收敛性．由于 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$，$0\leqslant 2x\leqslant\frac{\pi}{2}$．于是，有

$$0\leqslant\sin x<1,\quad \frac{4x}{\pi}<\sin 2x<2x,①1=e^{0}\leqslant e^{\sin x}<e^{1}$$

从而有

$$\frac{4x}{\pi x^{\lambda}}<\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^{\lambda}}<\frac{e\cdot 2x}{x^{\lambda}}$$

即

$$\frac{4}{\pi}\frac{1}{x^{\lambda-1}}<\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^{\lambda}}<2e\cdot\frac{1}{x^{\lambda-1}}$$

当 $\lambda-1<1$，即当$\lambda<2$时，瑕积分$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2e}{x^{\lambda-1}}dx$ 收敛．根据比较判别法知，当$\lambda<2$时，I_1收敛．又因被积函数$\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^{\lambda-1}}$在闭区间$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上非负，所以是绝对收敛．当$\lambda\geqslant 2$时，瑕积分$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{4}{\pi}\frac{dx}{x^{\lambda-1}}$发散，根据比较判别法知，当 $\lambda\geqslant 2$ 时，瑕积分I_1发散．

其次讨论 I_2 的收敛性：

由于对任意 $x\in\left[\frac{\pi}{4},+\infty\right)$，有

$$\left|\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^{\lambda}}\right|\leqslant\frac{e}{x^{\lambda}}$$

---

① 当$0<x<\frac{\pi}{2}$时，有$\frac{2}{\pi}x<\sin x<x$．

事实上，设 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$，因为$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x}{x^2}(x-\operatorname{tg}x)$，所以，当$0<x<\frac{\pi}{2}$时，$f'(x)<0$，从而 $f(x)$ 在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内递减．又由于$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{2x}{x}=1$，于是可定义 $f(0)=1$．因此，我们有$f(0)>f(x)>f\left(\frac{\pi}{2}\right)$即$1>\frac{\sin x}{x}>\frac{2}{\pi}$．因此得$\frac{2}{\pi}x<\sin x<x$．

而无穷积分$\int_{\frac{\pi}{4}}^{+\infty}\frac{e}{x^{\lambda}}dx$ 当 $\lambda>1$ 时收敛。于是，当 $\lambda>1$ 时

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{+\infty}\left|\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^{\lambda}}\right|dx$收敛，根据绝对收敛定义知，当 $\lambda>1$时，

I_2 绝对收敛．综上所述，当 $1<\lambda<2$时，I 绝对收敛。

最后讨论条件收敛性：

I_1已讨论完毕．至于 I_2，对任意的$A\in\left[\frac{\pi}{4},\ +\infty\right)$，有

$$\left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{A}e^{\sin x}\sin 2x dx\right|\leqslant\int_{\frac{\pi}{4}}^{A}\left|e^{\sin x}\sin 2x\right|dx$$

$$\leqslant e\int_{\frac{\pi}{4}}^{A}|\sin 2x|\,dx\leqslant 2e$$

即对任意的$A\in\left[\frac{\pi}{4},\ +\infty\right]$，积分$\int_{\frac{\pi}{4}}^{A}e^{\sin x}2xdx$有界。

函数$\frac{1}{x^{\lambda}}$，当 $\lambda>0$时是递减的$\left(\frac{\pi}{4}\leqslant x<+\infty\right)$，且

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\lambda}}=0$。

根据狄利克莱判别法知，当 $\lambda>0$ 时，I_2 收敛。

综上所述，当 $0<\lambda\leqslant1$时，I_2条件收敛．从而，当$0<\lambda\leqslant1$时，I 条件收敛。

例 3　判别瑕积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx$的收敛性，并求值。

解　$x=0$ 为被积函数的瑕点，且对任意 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$\ln\sin x\leqslant0$．取$0<p<1$，有

$$\lim_{x\to0+0}x^p f(x)=\lim_{x\to0+0}x^p\ln\sin x$$

$$=\lim_{x\to0+0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^p(\sin x)^p\ln\sin x=\lim_{x\to0+0}y^p\ln y=0\text{①}$$

① 用洛比达法则易求此极限为0。

根据瑕积分的比较判别法的推论2，瑕积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx$收敛。

下面求瑕积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx$ 之值。

令$x=2t$，$dx=2dt$，$t=\frac{x}{2}$。$x=0, t=0$，$x=\frac{\pi}{2}$ $t=\frac{\pi}{4}$，有

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin 2t 2dt=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(2\sin t\cos t)dt$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\ln 2+\ln\sin t+\ln\cos t)dt$$

$$=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t dt+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t dt$$

对最后一个积分令 $u=\frac{\pi}{2}-t$ $dt=-du$。$t=0$，$u=\frac{\pi}{2}$，$t=\frac{\pi}{4}$，$u=\frac{\pi}{4}$。于是

$$I=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t dt+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}l_n\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)(-du)$$

$$=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t dt+2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin u du$$

$$=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t dt=\frac{\pi}{2}\ln 2+2I$$

从而，$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin)dt=-\frac{\pi}{2}\ln 2$

同理可得$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)dx=-\frac{\pi}{2}\ln 2$。

例4 举例说明$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛时，可以没有 $f(x)\to 0$ $(x\to+\infty)$。

解 (1)§20.2 例10$\int_0^{+\infty}\sin x^2 dx$收敛，但$\lim\limits_{x\to\infty}\sin x^2$不存在。

（2）当被积函数非负，即对任意$x\in[a,+\infty)$，$f(x)\geqslant 0$，也未必有$f(x)\to 0(x\to+\infty)$。例如，如果函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & n<x<n+1\\ n, & x=n\end{cases}$$

其中n为整数，则对任意$A>1$，有

$$\int_1^A f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx+\cdots+\int_{n-1}^n f(x)dx+\int_n^A f(x)dx=-\frac{1}{x}\Big|_1^2+\frac{-1}{x}\Big|_2^3+\cdots+\frac{-1}{x}\Big|_{n-1}^n+\frac{-1}{x}\Big|_n^A=1-\frac{1}{A}$$

因为$\lim\limits_{A\to+\infty}\int_1^A f(x)dx=\lim\limits_{A\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{A}\right)=1$，所以，无穷积分$\int_1^{+\infty}f(x)dx$收敛。但是，当$x\to+\infty$时，函数$f(x)$不存在极限。

例5 如果无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛，且函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上一致连续，则$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$。

证明 用反证法。假设$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq 0$，根据极限的否定叙述，存在某个$\varepsilon_0>0$，对任意$A>a$，存在$x_A>A$，有$|f(x_A)|\geqslant 2\varepsilon_0$。特别地，对任意的$n>a$，存在$x_n>n$，有

$$|f(x_n)|\geqslant 2\varepsilon_0 \qquad (1)$$

已知函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上一致连续，即对上述的$\varepsilon_0>0$，存在$\delta>0$，对区间$[a,+\infty)$上任意二点x'与x''，当$|x'-x''|<\delta$时，有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon_0$。因此，对任意$n\in N$，当$x\in\left(x_n-\dfrac{\delta}{2},\ x_n+\dfrac{\delta}{2}\right)$时，有$|x-x_n|<\delta$，从而有

$$|f(x)-f(x_n)|<\varepsilon_0\text{或}f(x_n)-\varepsilon_0<f(x)<f(x_n)+\varepsilon_0 \qquad (2)$$

由（1）式，当 $f(x_s)>0$ 时，$|f(x_s)|=f(x_s)>2\varepsilon_0$。由（2）式左边得，

$$\varepsilon_0<f(x) \qquad (3)$$

当 $f(x_s)<0$时，$|f(x_s)|=-f(x_s)>2\varepsilon_0$，即$f(x_s)<-2\varepsilon_0$。由（2）式右边得，

$$f(x)<-\varepsilon_0 \qquad (4)$$

综合（3）式与（4）式有，当$x\in\left[x_s-\frac{\delta}{2}, x_s+\frac{\delta}{2}\right]$时，

$$f(x)>\varepsilon_0 \text{ 或 } f(x)<-\varepsilon_0$$

于是，根据积分不等式，有

$$\int_{x_s-\frac{\delta}{2}}^{x_s+\frac{\delta}{2}} f(x)dx>\int_{x_s-\frac{\delta}{2}}^{x_s+\frac{\delta}{2}}\varepsilon_0 dx=\varepsilon_0\delta \qquad (5)$$

或

$$\int_{x_s-\frac{\delta}{2}}^{x_s+\frac{\delta}{2}} f(x)dx<\int_{x_s-\frac{\delta}{2}}^{x_s+\frac{\delta}{2}}(-\varepsilon_0)dx=-\varepsilon_0\delta \qquad (6)$$

由（5）、（6）二式，有

$$\left|\int_{x_s-\frac{\delta}{2}}^{x_s+\frac{\delta}{2}} f(x)dx\right|\geqslant\varepsilon_0\delta$$

从而，对某个 $\varepsilon=\varepsilon_0\delta>0$，对任何 $A>a$，存在 $x_s-\frac{\delta}{2}$，$x_s+\frac{\delta}{2}>A$，有

$$\left|\int_{x_s-\frac{\delta}{2}}^{x_s+\frac{\delta}{2}} f(x)dx\right|\geqslant\varepsilon_0\delta$$

根据柯西收敛准则的否定叙述①，无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发

---

① 柯西收敛准则的否定叙述：

无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$发散$\Longleftrightarrow$存在某个$\varepsilon_0>0$，对任意的 $A>a$，存在某两个数 A_1，$A_2>A$，有

$$\left|\int_{A_1}^{A_2}f(x)dx\right|\geqslant\varepsilon_0$$

散，这与题设无穷积分$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$收敛矛盾。

例 6 如果无穷积分收敛，且函数 $f(x)$ 在区间$[a, +\infty)$上非负且递减，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$。

证明 因为无穷积分$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛，所以，根据柯西收敛准则，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正数 $B>0$，当$X, X-1>B$时，有

$$\left|\int_{X-1}^{X} f(x)\,dx\right| = \int_{X-1}^{X} f(x)\,dx<\varepsilon \qquad (7)$$

又因函数 $f(x)$是递减的，所以

$$\int_{X-1}^{X} f(x)\,dx\geqslant\int_{X-1}^{X} f(X)\,dx=f(X) \qquad (8)$$

由（7）式和（8）式，有 $f(X)<\varepsilon$。于是，对任意$\varepsilon>0$，存在 $X>0$ $(X>B+1)$，当 $x>X$ 时，有

$$f(X)\leqslant f(X)<\varepsilon$$

即 $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

例 7 设函数 $f(Z)$ 在开区间（0，1）内是递减的，0是它的瑕点。如果瑕积分$\int_{0}^{1} f(x)\,dx$收敛，则$\lim\limits_{x\to0+} xf(x)=0$。

证明 因为函数 $f(x)$ 在开区间（0，1）内递减，0是瑕点，所以必有 $\lim\limits_{x\to0+} f(x)=+\infty$。从而在开区间（0，1）内存在一点 a，使 $f(x)$在开区间$(0, a)$内非负。根据柯西收敛准则，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ $(\delta<a)$，当 $0<x<\delta$，$0<\frac{x}{2}<\delta$ 时，有

$$\left|\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(x)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

即

$$0<\frac{x}{2} f(x)\leqslant\left|\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(x)\,dt\right|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (9)$$

由（9）式得

$$0<xf(x)<\varepsilon$$

于是，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<x<\delta$ 时，有

$$0<xf(x)<\varepsilon$$

即

$$\lim_{x\to 0+} xf(x=0$$

例 8　设函数 $\varphi(x)$ 在$[a,+\infty)$上有界．（1）若无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛，问无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$是否收敛？（2）若无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$绝对收敛，问无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$ 是否收敛？

解　（1）不一定收敛．例如，无穷积分$\int_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛，$\varphi(x)=\sin x$在区间$[a,+\infty)$上有界，但$\int_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\sin x dx$ $=\int_a^{+\infty}\frac{\sin^2}{x}dx$ 却是发散的（见 §20.2 例 9 的判别过程）．

（2）一定收敛．事实上，已知$\varphi(x)$在区间$[a,+\infty)$上有界，即存在$M>0$，有 $|\varphi(x)|\leqslant M$，对任意 $x\in[a,+\infty)$。于是，对任意$x\in[a,+\infty)$，有

$$|f(x)\varphi(x)|\leqslant M|f(x)|$$

已知无穷积分$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛，根据比较判别法无穷积分$\int_a^{+\infty}|f(x)\varphi(x)|dx$ 也收敛．从而无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)\varphi(x)dx$ 收敛．此时无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)\varphi(x)dx$ 是绝对收敛的。

例 9　证明$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx=0$。

证明　$x=0$ 是被积函数的瑕点。

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx=\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx \tag{10}$$

对于无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx$，令 $x=\frac{1}{t}$，$dx=-\frac{1}{t^2}dt$，有

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx=\int_1^0\frac{\ln\frac{1}{t}\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{1-1\left(\frac{1}{t}\right)^2}dt=\int_0^1\frac{-\ln t}{1+t^2}dt$$

$$=-\int_0^1\frac{\ln t}{1+t^2}dt \tag{11}$$

将（11）代入（10）中得，

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx=\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}dx-\int_0^1\frac{\ln t}{1+t^2}dt=0$$

例10　证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\int_x^{+\infty}\sin^2\frac{1}{t}dt=1$。

证明　令$\frac{1}{t}=u, dt=-\frac{1}{u^2}du$，有

$$x\int_x^{+\infty}\sin^2\frac{1}{t}dt=x\int_{\frac{1}{x}}^0\sin^2u\left(\frac{-1}{u^2}\right)du=x\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{\sin^2u}{u^2}du$$

$$=\frac{\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{\sin^2u}{u^2}du}{\frac{1}{x}}=\frac{\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\cdot\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\quad\text{（积分中值定理 }\theta\in\left(0,\frac{1}{x}\right)\text{）}$$

于是，

$$\lim_{x\to+\infty}x\int_x^{+\infty}\sin^2\frac{1}{t}dt=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}=1$$

例11　如果 $\varphi(x)$是连续函数，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=1$，$\psi(x)=\int_x^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x^{1+\alpha}}dx(\alpha>0)$，则 $\psi(x)=0\left(\frac{c}{x^\alpha}\right)$（当 $x\to+\infty$时）。

解 $\psi(x)=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_x^A \frac{\varphi(x)}{x^{1+\alpha}}dx$。因为 $\varphi(x)$ 连续，$\frac{1}{x^{1+\alpha}}$ 单调，所以，根据积分第一中值定理，有

$$\int_x^A \frac{\varphi(x)}{x^{1+\alpha}}dx=\varphi(\xi)\int_x^A \frac{dx}{x^{1+\alpha}}$$

于是，$\psi(x)=\lim\limits_{A\to+\infty}\varphi(\xi)\int_x^A \frac{dx}{x^{1+\alpha}}=\lim\limits_{A\to+\infty}\varphi(\xi)\ \frac{1}{\alpha}[x^{-\alpha}-A^{-\alpha}]$

$$=\frac{\varphi(\xi)}{\alpha x^{\alpha}}\quad (\xi\in(x,A))$$

从而，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\psi(x)}{\frac{c}{x^{\alpha}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{\varphi(\xi)}{\alpha x^{\alpha}}}{\frac{c}{x^{\alpha}}}=\lim\limits_{\xi\to+\infty}\frac{\varphi(\xi)}{\alpha c}$

$$=\frac{1}{\alpha c}\quad (x\to+\infty\text{时},\quad \xi\to+\infty)$$

即 $\psi(x)=0\left(\frac{c}{x^{\alpha}}\right)$，当 $x\to\infty$时。

例12 伏茹兰尼积分公式：如果函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 内连续，且有极限 $f(0)=\lim\limits_{x\to0+0}f(x)$，$f(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，则

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=[f(0)-f(+\infty)]\ln\frac{b}{a}\ (a>0,\ b>0)$$

证明 对任意 $0<\delta<\gamma<+\infty$，有

$$\int_\delta^\gamma \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_\delta^\gamma \frac{f(ax)}{x}dx-\int_\delta^\gamma \frac{f(bx)}{x}dx$$

对等式右端的两个积分分别作变量替换 $ax=t$，$bx=t$，得

$$\int_\delta^\gamma \frac{f(ax)}{x}dx-\int_\delta^\gamma \frac{f(bx)}{x}dx$$
$$=\int_{a\delta}^{a\gamma}\frac{f(t)}{t}dt-\int_{b\delta}^{b\gamma}\frac{f(t)}{t}dt$$

$$=\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(t)}{t}dt+\int_{b\delta}^{a\gamma}\frac{f(t)}{t}dt-\left[\int_{b\delta}^{a\gamma}\frac{f(t)}{t}dt\right.$$

$$\left.+\int_{a\gamma}^{b\gamma}\frac{f(t)}{t}dt\right]=\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(t)}{t}dt-\int_{a\gamma}^{b\gamma}\frac{f(t)}{t}dt$$

于是，有

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\lim_{\substack{\gamma\to+\infty\\ \delta\to 0}}\int_{\delta}^{\gamma}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(t)}{t}dt-\lim_{\gamma\to+\infty}\int_{a\delta}^{b\gamma}\frac{f(t)}{t}dt$$

因为$f(x)$连续，$\frac{1}{x}$单调，所以，根据积分第一中值定理，有

$$\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(t)}{t}dt=f(\xi)\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{dt}{t}=f(\xi)\ln\frac{b}{a}\ (\xi\text{介于}a\delta\text{与}b\delta\text{之间})$$

$$\int_{a\gamma}^{b\gamma}\frac{f(t)}{t}dt=f(\eta)\int_{a\gamma}^{b\gamma}\frac{dt}{t}=f(\eta)\ln\frac{b}{a}\ (\eta\text{介于}a\gamma\text{与}b\gamma\text{之间})$$

当 $\delta\to 0$时，必有 $\xi\to 0$；当 $\gamma\to+\infty$ 时，必有 $\eta\to+\infty$，于是

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\lim_{\xi\to 0}f(\xi)\ln\frac{b}{a}-\lim_{\eta\to\infty}f(\eta)\ln\frac{b}{a}$$

$$=f(0)l_n\frac{b}{a}-f(+\infty)\ln\frac{b}{a}$$

$$=[f(0)-f(+\infty)]\ln\frac{b}{a}$$

例13 伏茹兰尼积分公式的另一种情形：如果函数$f(x)$在区间$(0,+\infty)$内连续，且有极限$\lim_{x\to 0+0}f(x)=f(0)$，对任意的$A>0$，无穷积分$\int_{A}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$收敛，则有

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\ln\frac{b}{a}$$

证明 由例12的证明过程，有

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(t)}{t}dt-\lim_{\gamma\to+\infty}\int_{a\gamma}^{b\gamma}\frac{f(t)}{t}dt$$

由于对任意$A>0$，无穷积分$\int_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ 收敛，于是

$$\lim_{A\to+\infty}\int_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx=0$$

从而，$\lim\limits_{\gamma\to+\infty}\int_{a\gamma}^{b\gamma}\frac{f(t)}{t}dt=0$

将此极限代入上式，得

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\lim_{\delta\to 0}\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(t)}{t}dt$$

$$=\lim_{\xi\to 0}f(\xi)\ln\frac{b}{a}=f(0)\ln\frac{b}{a}$$ （见例12的证明）

例14 计算无穷积分$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$

解 设$f(x)=e^{-x}$．显然$f(ax)=e^{-ax}$，$f(bx)=e^{-bx}$，$f(x)$连续，$f(0)=1$，$f(+\infty)=0$．由伏茹兰尼积分公式（例13）

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=[f(0)-f(+\infty)]\ln\frac{b}{a}=\ln\frac{b}{a}$$

例15 计算无穷积分$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}dx$

解 设$f(x)=\cos x$．显然对任意 $A>0$，无穷积分$\int_A^{+\infty}\frac{\cos x}{x}dx$ 收敛（用狄利克莱判别法），又$f(0)=1$，由伏茹兰尼积分公式如另一种情形（例14），有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}dx=\ln\frac{b}{a}$$

例16 计算概率积分 $I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$。

解 已知概率积分$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$收敛（见§20.2例2）。现在应用瓦里斯公式计算它的值。

首先我们有不等式

$$(1+t)e^{-t}<1 ①\quad (对任意的\ t\neq 0)$$

这里我们设$t=\pm x^2$，得

$$(1-x^2)e^{x^2}<1 和\ (1+x^2)e^{-x^2}<1$$

或
$$(1-x^2)<e^{-x^2} 和\ e^{-x^2}<\frac{1}{1+x^2}$$

即
$$1-x^2<e^{-x^2}<\frac{1}{1+x^2}$$

在第一个不等式中把x的变化限制在开区间（0，1）内，即$1-x^2>0$；在第二个不等式中的 $x>0$看作任意的，并对此二不等式n次方（n 自然数），得

$$(1-x^2)^n<e^{-nx^2}(0<x<1) 及\ e^{-nx^2}<\frac{1}{(1+x^2)^n}(0<x)$$

从而有

$$\int_0^1(1-x^2)^n dx<\int_0^1 e^{-nx^2}dx<\int_0^{+\infty}e^{-nx^2}dx<\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

即
$$\int_0^1(1-x^2)^n dx<\int_0^{+\infty}e^{-nx^2}dx<\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

在上述三个积分中，分别设 $x=\cos t, x=\frac{t}{\sqrt{n}}, x=\operatorname{ctg} t$，并应用公式

---

① 设 $f(t)=(1+t)e^{-t}$，令 $f'(t)=-te^{-t}=0$，得稳定点 $t=0$. $f''(t)=(t-1)e^{-t}$, $f''(0)=-1<0$，于是 $f(t)$在 $t=0$ 点取最大值 $f(0)=1$. 从而对任意 $t\neq 0$ $f(t)=(1+t)e^{-t}<1=f(0)$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x dx=\begin{cases}\dfrac{(m-1)!!}{m!!}\dfrac{\pi}{2} & (\text{当 } m \text{ 为偶数})\\[2mm] \dfrac{(m-1)!!}{m!!} & (\text{当 } m \text{ 为奇数})\end{cases}$$

得，

$$\int_0^1(1-x^2)^n dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}t dt=\frac{(2n!!)}{(2n+1)!!}$$

$$\int_0^{+\infty}e^{-nx^2}dx=\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{1}{\sqrt{n}}I$$

$$\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2)^n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-2}t dt=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi}{2}$$

于是，

$$\sqrt{n}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}<I<\sqrt{n}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi}{2}$$

将上述不等式平方，得

$$\frac{n}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1}<I^2<\frac{n}{2n-1}$$

$$\cdot\left[\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\right]^2(2n-1)\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

根据瓦里斯公式有

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\right]^2(2n-1)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left[\dfrac{(2n-2)!!}{(2n-3)!!}\right]^2\dfrac{1}{2n-1}}=\frac{2}{\pi}$$

从而，当 $n\to\infty$时，不等式两边有同一极限$\frac{\pi}{4}$，根据两边夹定理得

$$I^2=\frac{\pi}{4},\quad I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

即 $$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

习　题

§20.1

1　计算下列无穷积分或判别它的发散性：

(1) $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx dx (a>0)$，　(2) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^2}$，

(3) $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$，　(4) $\int_e^{+\infty}\frac{x\ln}{x}dx$，

(5) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$，　(6) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{arctg}x}{1+x^2}dx$，

(7) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a)(x^2+b)}$.

2　证明，无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛的充要条件是：对任意的$c>a$，无穷积分$\int_c^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，且

$$\int_a^{+\infty}f(x)\,dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^{+\infty}f(x)dx$$

3　无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛的必要条件是：对任意 $A>0$，$\lim\limits_{A\to+\infty}\int_A^{+\infty}f(x)dx=0$.

§20.2

4　判别无穷积分$\int_0^{+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}dx$的敛散性，其中$P_m(x)$与$P_n(x)$的次数分别为$m$及$n$的互质多项式，且$P_n(x)$ 在区间$[0,+\infty)$内无零点。

5　证明定理20.2

6　证明无穷积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2x}{x^2}dx$收敛，且

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2x}{x^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

7　判别下列无穷积分的敛散性：

(1) $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x+1}}$,　　(2) $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x(x+1)(x+2)}}$

(3) $\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$,　　(4) $\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$,

(5) $\int_{1}^{+\infty}\frac{x\operatorname{arctg}x}{1+x^3}dx$,　　(6) $\int_{1}^{+\infty}\sin\frac{1}{x^2}dx$,

(7) $\int_{1}^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx\ (n>1)$,　　(8) $\int_{3}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln\ln x}$,

(9) $\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x|\sin x|}$.

8　判别下列无穷积分的绝对收敛性与条件收敛性：

(1) $\int_{1}^{+\infty}\frac{\cos x}{x\sqrt{x+1}}dx$,　　(2) $\int_{1}^{+\infty}\frac{\cos x}{x}dx$,

(3) $\int_{0}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}dx$,　　(4) $\int_{3}^{+\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin x\,dx$.

9　讨论下列无穷积分的条件收敛性与绝对收敛性：

(1) $\int_{1}^{+\infty}\frac{\sin x\operatorname{arctg}x}{x^{\lambda}}dx$,　　(2) $\int_{2}^{+\infty}\frac{\ln x\cos x}{x^{p}}dx$.

10　设函数递减且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，如果导函数$f'(x)$在区间$[0,+\infty)$上连续，则无穷积分$\int_{0}^{+\infty}f'(x)\sin^2x\,dx$收敛。

11　如果对任意$A>a$，函数$f(x)$与$g(x)$皆在闭区间$[a,A]$上可积，且无二穷积分$\int_{a}^{+\infty}f^2(x)dx$与$\int_{a}^{+\infty}g^2(x)dx$皆收敛，无穷积分$\int_{a}^{+\infty}[f(x)+g(x)]^2dx$与$\int_{a}^{+\infty}|f(x)g(x)|dx$皆收敛。

§20.3

12　计算下列瑕积分：

(1) $\int_{-1}^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$,　　(2) $\int_{0}^{1}\ln x\,dx$

(3) $\int_{0}^{1}\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$,　　(4) $\int_{\beta}^{\alpha}\frac{x}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}dx\ (\alpha<\beta)$.

§20.4

13　判别下列瑕积分的敛散性：

(1) $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx$,　　(2) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}dx$,

(3) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}dx$,　　(4) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$.

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}dx$.

14　讨论下列瑕积分的敛散性：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$,　　(2) $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n}dx\ (a\neq 0)$

(3) $\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$,　　(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^m}dx$.

15　讨论下列广义积分的绝对收敛性和条件收敛性：

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^a}dx$,　　(2) $\int_0^{+\infty} \frac{x^p\sin x}{1+x^q}dx\ (q\geqslant 0)$,

(3) $\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{x}dx$,　　(4) $\int_a^{+\infty} \frac{p_m(x)}{p_n(x)}\sin x dx$, 其中$p_m(x)$ 与 $p_n(x)$为整多项式，且当 $x\geqslant a$ 时，$p_n(x)\neq 0$.

16　判别瑕积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)dx$的敛散性，并求值。

第二十一章　含参变量积分

设二元函数 $f(x,y)=3x^2y-2y$ 定义在矩形区域 $D=\{(x,y)|\ 0\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$上，对在 $[0,2]$ 上任意固定的 x，在 $[0,1]$ 上对 y的积分为

$$\int_0^1 f(x,y)dy=\int_0^1(3x^2y-2y)dy=\frac{3}{2}x^2-1$$

这个积分的特点是：在被积函数中含有与积分变量 y无关的变量 x，通常称 x 为**参变量**．如同积分上限函数，收敛的函数项级数的和函数等一样，它是以积分为工具所定义的一类新函数．本章主要讨论这类函数的定义及它的分析性质．

§ 21.1　含参变量的定积分

一　积分限为常数的含参量积分

设二元函数 $f(x,y)$在矩形区域 $D=\{(x,\ y)\ |\ a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d\}$上连续．因为对任意固定的 $y\in[c,d]$，函数 $f(x,y)$在区间 $[a,b]$上亦连续，所以 $f(x,y)$在 $[a,b]$ 上可积．对任意 $y\in[c,d]$，定积分

$$\int_a^b f(x,y)dx$$

是 y的函数，记作

$$\varphi(y)=\int_a^b f(x,y)dx,\ \ y\in[c,d] \qquad (21.1)$$

称 (22.1) 式为**含参变量y的定积分**．

下面我们讨论这种由积分所定义的函数的分析性质（连续

性、可微性、可积性）．

定理21.1 如果函数 $f(x,y)$ 在矩形区域 $D=\{(x,y)|\ a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d\}$ 上连续，则函数

$$\varphi(y)=\int_a^b f(x,y)dx$$

在区间 $[c,d]$ 上连续。

证明 对任意的 $y\in[c,d]$，并取 $y+\Delta y\in[c,d]$，$\varphi(y)$ 的改变量为

$$\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)=\int_a^b[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]dx$$

从而有

$$|\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)|\leqslant\int_a^b|f(x,y+\Delta y)-f(x,y)|dx$$

因为函数 $f(x,y)$ 在闭矩形域 D 上连续，所以 $f(x,y)$ 在 D 上一致连续，即对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对 D 上任意两点 (x,y)，$(x,y+\Delta y)$，当两点的距离 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=|\Delta y|<\delta$ 时，有

$$|f(x,y+\Delta y)-f(x,y)|<\varepsilon$$

于是，有

$$|\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)|\leqslant\int_a^b|f(x,y+\Delta y)-f(x,y)|dx$$

$$<\int_a^b \varepsilon dx=\varepsilon(b-a)$$

即函数 $\varphi(y)$ 在区间 $[c,d]$ 上连续。 □

由定理21.1可得到

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b[\lim_{y\to y_0}f(x,y)]dx \qquad (24.2)$$

事实上，由于函数 $\varphi(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ 在点 $y_0\in[c,d]$ 连续，以及有

$$\lim_{y\to y_0}f(x,y)=f(x,y_0)$$

于是，

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)dx = \lim_{y\to y_0}\varphi(y) = \varphi(y_0)$$
$$= \int_a^b f(x,y_0)dx = \int_a^b [\lim_{y\to y_0} f(x,y)]dx$$

这个结论说明，定义在矩形区域上的连续函数，其极限运算与积分运算可交换次序。

定理21.2 如果函数 $f(x,y)$ 在矩形区域 $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d\}$ 上有定义，对任一 $y\in[c,d]$，函数 $f(x,y)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且编导数 $f'_y(x,y)$ 在 D 上连续，则函数 $\varphi(y)$ 在 $[c,d]$ 上可导，且有

$$\varphi'(y) = \int_a^b f'_y(x,y)dx \tag{21.3}$$

证明 对任意 $y\in[c,d]$，由于函数 $f(x,y)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故 $f(x,y)$ 在 $[a,b]$ 上可积，从而在 $[c,d]$ 上定义了函数

$$\varphi(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

对任意的 $y\in[c,d]$ 及 $y+\Delta y\in[c,d]$，根据拉格朗日中值定理，有

$$\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y) = \int_a^b [f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]dx$$
$$= \int_a^b f'_y(x,y+\theta\Delta y)\Delta y dx \quad (0<\theta<1)$$

从而得

$$\frac{\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)}{\Delta y} = \int_a^b f'_y(x,y+\theta\Delta y)dx$$

又因为 $f'_y(x,y)$ 在 D 上连续，根据定理22.1，有

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\int_y^b f'_y(x,y+\theta\Delta y)dx$$

$$= \int_a^b [\lim_{\Delta y\to 0} f'_y(x,y+\theta\Delta y)]dx = \int_a^b f'_y(x,y)dx$$

即函数 $\varphi(y)$ 在区间 $[c,d]$ 上可导，且

$$\varphi'(y) = \int_a^b f_y'(x,y)\,dx \qquad \square$$

在定理21.2的条件下，公式（22.3）可改写为：

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right]dx$$

定理22.2说明，在一定条件下导数运算与积分运算可以交换次序，称此求导运算为**积分号下的微分法**.

下面我们讨论函数

$$\varphi(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

的积分。

设函数 $f(x,y)$ 在矩形区域 $D = \{(x,y)\,|\, a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$ 上连续，根据定理22.1知，函数

$$\varphi(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

在区间 $[c,d]$ 上连续，因此积分

$$\int_c^d \varphi(y)\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right]dy$$

存在。完全类似地，由已知条件可以定义函数

$$\varphi(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$$

根据定理22.1，可推得积分

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]dx$$

存在。在上述条件下，由二重积分的计算可得

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy$$

这里我们不借助于二重积分，而直接证明这个结论.

定理21.3 如果函数 $f(x,y)$ 在矩形区域 $D = \{(x,y)\,|\, a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$ 上连续，则

$$\int_c^d \left\{\int_a^b f(x,y)\,dx\right\}dy = \int_a^b \left\{\int_c^d f(x,y)\,dy\right\}dx \qquad (21.4)$$

证明 我们先证明更一般的形式

$$\int_c^u \left\{\int_a^b f(x,y)dx\right\}dy = \int_a^b \left\{\int_c^u f(x,y)dy\right\}dx \qquad (21.5)$$

其中$u\in[c,d]$。

u 在区间$[c,d]$上变化时，(22.5) 式的两端都是 u 的函数，为此可令

$$I_1(u) = \int_c^u \left\{\int_a^b f(x,y)dx\right\}dy,\quad I_2(u) = \int_a^b \left\{\int_c^u f(x,y)dy\right\}dx$$

因为$\int_a^b f(x,y)dx$是 y 的连续函数，根据积分上限函数的性质，有

$$I'_1(u) = \frac{d}{du}\int_c^u \left\{\int_a^b f(x,y)dx\right\}dy = \int_a^b f(x,u)dx$$

又因为$\frac{d}{du}\int_c^u f(x,y)dy = f(x,u)$ 是D上的连续函数，根据定理22.2，有

$$I'_2(u) = \frac{d}{du}\int_a^b \left\{\int_c^u f(x,y)dy\right\}dx = \int_a^b \left\{\frac{\partial}{\partial u}\int_c^u f(x,y)dy\right\}dx$$

$$= \int_a^b f(x,u)dx$$

这就说明，对任意$u\in[c,d]$,有

$$I'_1(u) = I'_2(u)$$

于是，根据

$$I_1(u) - I_2(u) = L$$

其中L是常数. 令 $u=c$, 得 $L=0$，所以 $I_1(u)=I_2(u)$, 即(2.55)式成立.

特别地，在(21.5)式中，令$u=d$,得(22.4)式. □

定理22.3表明：在函数 $f(x,y)$ 连续的条件下，积分可以换序. 公式 (22.4) 称为积分号下的积分法

例 1 求极限

$$\lim_{y\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+y^2}\,dx$$

求这个极限可先计算积分而后取极限但应用积分号下取极限方法更简单。

解 任一取数$b>0$，当$|y|\leqslant b$时，二元函数$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$在矩形域$D=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,-b\leqslant y\leqslant b\}$上连续，当然$0\in[-b,b]$. 于是，根据公式(22.2)，有

$$\lim_{y\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+y^2}\,dx=\int_{-1}^{1}\left(\lim_{y\to 0}\sqrt{x^2+y^2}\right)dx=\int_{-1}^{1}|x|\,dx$$

$$=2\int_0^1 x\,dx=1$$

例2 计算积分

$$I(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin^2x+y^2\cos^2x)\,dx$$

分析 此积分直接计算很复杂，但是，被积函数对y的编导数

$$\frac{\partial}{\partial y}\ln(\sin^2x+y^2\cos^2x)=\frac{2y\cos^2x}{\sin^2x+y^2\cos^2x}$$

可通过三角代换变成有理函数的积分。于是，应用积分号下的微分法，不难求得$I(y)$.

解 对任意的$y>0$，存在正数c与d，使$c\leqslant y\leqslant d$. 这时二元函数$f(x,y)=\ln(\sin^2x+y^2\cos^2x)$及其对$y$的编导数$f'_y(x,y)=\dfrac{2y\cos^2x}{\sin^2x+y^2\cos^2x}$在矩形区域$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}, c\leqslant y\leqslant d\}$上连续. 于是，根据定理22.2，有

$$I'(y)=\frac{d}{dy}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin^2x+y^2\cos^2x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial}{\partial y}\ln(\sin^2x+y^2\cos^2x)\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2y\cos^2x}{\sin^2x+y^2\cos^2x}\,dx$$

令$\operatorname{tg}x=t$，当$x=0$时，$t=0$；当$x=\frac{\pi}{2}$时，$t=+\infty$，$dx=\frac{dt}{1+t^2}$。

于是

$$I'(y)=\int_0^{+\infty}\frac{2y}{(t^2+y^2)(1+t^2)}dt$$

而 $\frac{1}{(t^2+y^2)(t^2+1)}=\frac{1}{(y^2-1)}\left(\frac{1}{t^2+1}-\frac{1}{t^2+y^2}\right)$

因此

$$\begin{aligned}I'(y)&=\frac{2y}{y^2-1}\left[\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2+1}-\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2+y^2}\right]\\&=\frac{2y}{y^2-1}\left[\operatorname{arctg}t-\frac{1}{y}\operatorname{arc\ tg}\frac{t}{y}\right]_0^{+\infty}\\&=\frac{\pi}{y+1}\quad(y\neq1)\end{aligned}$$

从而

$$I(y)=\int I'(y)dy=\int\frac{\pi}{y+1}dy=\pi\ln(y+1)+C$$

最后确定常数C。虽然上述等式$y\neq1$，但是根据定理22.1知，函数$I(y)$在点$y=1$连续，且有$I(1)=0$。当$y\to1$时，有

$$\pi\ln(y+1)\to\pi\ln2$$

即 $$I(1)=\pi\ln2+C=0$$

解得$C=-\pi\ln2$。于是，求得

$$I(y)=\pi\ln(y+1)-\pi\ln2=\pi\ln\frac{y+1}{2}$$

例3 计算积分

$$I=\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx\quad(0<a<b)$$

解 因为被积函数可表为积分

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y dy$$

所以 $I = \int_0^1 \{\int_a^b x^y dy\} dx$

由于二元函数 $f(x,y) = x^y$ 在 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, a \leqslant y \leqslant b\}$ 上连续．根据定理22.3，积分可换序．于是，有

$$I = \int_0^1 \{\int_a^b x^y dy\} dx = \int_a^b \{\int_0^1 y^y dx\} dy$$

$$= \int_a^b \left(\frac{x^{y+1}}{y+1}\right) \Big|_0^1 dy = \int_a^b \frac{dy}{1+y} = \ln(b+1) - \ln(a+1)$$

$$= \ln\frac{b+1}{a+1}$$

二 积分限依赖于参数的情形

现在我们讨论不仅被积函数中含有参数，而且积分限也含有参数，即积分是参变量的函数，它的形式如下

$$\psi(y) = \int_{a(b)}^{b(y)} f(x,y) dx$$

下面我们讨论函数 $\psi(y)$ 的连续性和可微性。

定理21.4 如果二元函数 $f(x,y)$ 在区域 $D = \{(x,y) \mid a(y) \leqslant x \leqslant b(y), c \leqslant y \leqslant d\}$ 上连续，且一元函数 $a(y), b(y)$ 在区间 $[c,d]$ 上连续，则函数

$$\psi(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y) dx \tag{21.6}$$

在 $[c,d]$ 上连续。

分析 通过换元积方法 把积分(21.6)变成定限的参变量积分，再应用定理22.1．证得结果．

证明 对积分 (22.6) 用换元积分法，令

$$x = a(y) + t[b(y) - a(y)]$$

当 $x = a(y)$ 时， $t = 0$； $x = b(y)$ 时，$t = 1$，而且 x 在 $a(y)$

与$b(y)$之间变化时，t 在区间 $[0,1]$ 之间变化。于是

$$\psi(y)=\int_{a(y)}^{b(y)}f(x,y)dx=\int_0^1 f[a(y)+t(b(y)-a(y))]\cdot[b(y)-a(y)]dt$$

由于被积函数

$$f[a(y)+t(b(y)-a(y))]\cdot[b(y)-a(y)]$$

在矩形域 $\{(y,t)|\ c\leqslant y\leqslant d,\ \ 0\leqslant t\leqslant 1\}$ 上连续，根据定理22.1，由积分(22.6)所确定的函数$\psi(y)$在$[c,d]$上连续。 □

定理21.5 如果函数 $f(x,y)$ 及 $f'_y(x,y)$ 在矩形域 $D=\{(x,y)|a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d\}$上连续，函数 $a(y)$和 $b(y)$ 在区间$[c,d]$上可微，且有

$$a\leqslant a(y)\leqslant b,\ \ a\leqslant b(y)\leqslant b,\ \ y\in[c,d]$$

则函数

$$\psi(y)=\int_{a(y)}^{b(y)}f(x,y)dx$$

在$[c,d]$上可微，且有

$$\psi'(y)=\int_{a(y)}^{b(y)}f'_y((x,y)dx+f[b(y),y]b'(y)-f[a((y),y]a'(y)\tag{21.7}$$

证明 把$\psi(y)$看作复合函数：

$$\psi(y)=g(y,a,b)=\int_a^b f(x,y)dx,\ \ a=a(y),b=b(y)$$

根据复合函数的求导法则及积分上限函数的求导法，有

$$\frac{d}{dy}\psi(y)=\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial a}\cdot\frac{da}{dy}+\frac{\partial g}{\partial b}\cdot\frac{db}{dy}$$

$$=\int_{a(y)}^{b(y)}f'_y(x,y)dx+f[b(y),y]b'(y)-f[a(y),\ y]a'(y)$$ □

例 4 证明函数

$$F(t)=\frac{1}{\omega}\int_0^t f(x)\sin\omega(t-x)dx$$

是方程

$$F''(t)+\omega^2F(t)=f(t)$$

的解，其中 $f(x)$是连续函数.

证明 由于函数 $f(x)\cdot\sin\omega(t-x)$及其关于参变量t 的编导数 $\omega f(x)\cos\omega(t-x)$在$tx$平面上连续，且$b(t)=t, a(t)=0$, 因此满足定理21.5的条件. 应用公式(21.7)，有

$$F'(t)=\frac{1}{\omega}\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}[f(x)\sin\omega(t-x)]dx+\frac{1}{\omega}f(t)\sin\omega(t-t)\cdot t'$$

$$-\frac{1}{\omega}f(0)\sin\omega(t-0)\cdot 0=\int_0^t f(x)\cos\omega(t-x)dx$$

完全类似可以验证，导函数$F'(t)$ 也满足定理21.5的条件，再次应用公式（21.7），有

$$F''(t)=-\int_0^t f(x)\omega\sin\omega(t-x)dx+f(t)\cos\omega(t-t)\cdot t'$$

$$-f(0)\cos\omega(t-0)\cdot 0$$

$$=-\omega\int_0^t f(x)\sin\omega(t-x)dx+f(t)$$

将$F(t)$和$F''(t)$代入方程，得

$$F''(t)+\omega^2F(t)=-\omega\int_0^t f(x)\sin\omega(t-x)dx$$

$$+f(t)+\omega^2\left[\frac{1}{\omega}\int_0^t f(x)\sin\omega(t-x)dx\right]=f(t)$$

例 5 证明函数

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x-at)+f(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(z)dz$$

满足弦振动方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$$

其中函数$F(u)$存在导数，$f(x)$存在二阶导数.

证明 因为 $u(x,t)$ 是由含二个参变量积分给出的二元函数，所以应用公式(21.7)时，将其中的导数换成编导数，有

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}[f'(x-at)(-a)+f'(x+at)\cdot a]$$

$$+\frac{1}{2a}[F(x+at)\cdot a-F(x-at)\cdot(-a)]$$

$$=\frac{a}{2}[-f'(x-at)+f'(x+at)]+\frac{1}{2}$$

$$[F(x+at)+F(x-at)]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{a^2}{2}[f''(x-at)+f''(x+at)]$$

$$+\frac{a}{2}[F'(x+at)-F'(x-at)]$$

同理可求得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{2}[f''(x-at)+f''(x+at)]$$

$$+\frac{1}{2a}[F'(x+at)-F'(x-at)]$$

显然，有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

§21.2　含参变量的广义积分

一　含参变量广义积分的一致收敛性

设二元函数 $f(x,y)$在区域$D=\{(x,y)\,|a\leqslant x<+\infty,\quad c\leqslant y\leqslant d\}$有定义，对任意的 $y\in[c,d]$,广义积分

$$\int_a^{+\infty}f(x,y)dx \qquad (1)$$

都收敛，于是积分（1）在区间$[c,d]$上定义了一个函数，记作

$$\Phi(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx,\ y\in[c,d] \qquad (21.8)$$

称它为含参变量的广义积分.

我们知道，广义积分与数级数无论在概念上还是在理论上基本是平行的．所以不同的是前者是连续的，后者是离散的．由此自然想到，含参变量的广义积分与函数级数无论在概念上还是在理论上也应基本是平行的．因此，我们可以仿照函数级数，把含参变量广义积分的一致收敛概念和有关定理写出来．这里我们仅介绍一致收敛概念和判别一致收敛的M—判别法．

定义 如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在$A_0>0$，当$A>A_0$时，对任意的 $y\in[c,d]$，有

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x,y)dx\right|<\varepsilon$$

则称含参变量广义积分(22.8)在区间$[c,d]$ 上一致收敛．

定理21.6 (**M—判别法**) 如果存在某个$M>0$，对任意$x>M$ 和任意 $y\in[c,d]$，有

$$|f(x,y)|\leqslant F(x)$$

且广义积分$\int_a^{+\infty}F(x)dx$收敛，则含参变量广义积分 (22.8) 在区间$[c,d]$上一致收敛

证明 因为积分$\int_a^{+\infty}F(x)dx$ 收敛，所以对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在某个 $A_0>0$，当$A>A_0$时，有

$$\left|\int_A^{+\infty}F(x)dx\right|<\varepsilon$$

又已知存在某个$M>0$，对任意 $x>M$ 和任意 $y\in[c,d]$，有$|f(x,y)|\leqslant F(x)$，于是，当$A>\max\{A_0,M\}$，有

$$\left|\int_A^{+\infty}f(x,y)dx\right|\leqslant\int_A^{+\infty}|f(x,y)|dx\leqslant\int_A^{+\infty} F(x)dx<\varepsilon$$

根据一致收敛的定义，积分(22.8)在区间$[c,d]$上一致收敛．□

例1 用一致收敛定义证明积分

$$\varphi(y)=\int_0^{+\infty} ye^{-xy}dx,\ y\in[c,d]$$

在区间$[c,d]$上一致收敛（$0<c<d$）.

证明 设$A>0$，计算积分

$$\int_A^{+\infty} ye^{-xy}dx$$

作变量替换，令$xy=t$, $dx=\frac{1}{y}dt$，则有

$$\int_A^{+\infty} ye^{-xy}dx=\int_{Ay}^{+\infty} ye^{-t}\ \frac{1}{y}dt=\int_{Ay}^{+\infty} e^{-t}\ dt=e^{-Ay}$$

对任意给定的 $\varepsilon>0$，解不等式

$$\left|\int_A^{+\infty} ye^{-xy}dx\right|=|e^{-Ay}|=e^{-Ay}\leqslant e^{-Ac}<\varepsilon$$

得$A>\frac{1}{c}\ln\frac{1}{\varepsilon}$，取 $A_0=\frac{1}{c}\ln\frac{1}{\varepsilon}$。于是，当 $A>A_0$ 时，对任意$y\in[c,d]$，有

$$\left|\int_A^{+\infty} ye^{-xy}dx\right|<\varepsilon$$

根据一致收敛定义，证明了所给积分在区间 $[c,d]$ 上一致收敛。

例 2 证明积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2+y^2}dx$$

在区间$-\infty<y<+\infty$上一致收敛。

证明 因为对任意 $y\in(-\infty,+\infty)$，有

$$\left|\frac{1}{x^2+y^2}\right|\leqslant\frac{1}{x^2}$$

已知广义积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$$

收敛，根据M—判别法，所给积分在（$-\infty,+\infty$） 上一致收

敛。

例3 证明积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin x dx \quad (0<a_0\leqslant a<+\infty)$$

在区间$[a_0, +\infty)$上一致收敛。

证明 因为对任意$x\in[0, +\infty)$，有

$$|e^{-ax}\sin x|\leqslant e^{-ax}\leqslant e^{-a_0x}$$

而且

$$\int_0^{+\infty} e^{-a_0x}dx=-\frac{1}{a_0}e^{-a_0x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{a_0}$$

根据M——判别法，所给积分在$[a_0, +\infty)$上一致收敛。

二 含参变量广义积分所定义的函数的分析性质

我们在研究函数级数的和函数分析性质时知，在一致收敛的条件下，可保证函数级数的和函数仍然具有有限和的性质。同样，含参变量广义积分在一致收敛的条件下，也具有有限积分的分析性质。

定理21.7 （连续性）如果二元函数$f(x,y)$满足条件：

（1）在区域$D=\{(x,y)|\ a\leqslant x<+\infty,\ c\leqslant y\leqslant d\}$上连续；

（2）含参变量广义积分

$$\Phi(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$$

在区间$[c,d]$上一致收敛，则由含参变量广义积分所定义的函数$\Phi(y)$在区间$[c,d]$上连续。

分析 只须证明，任取一点$y_0\in[c,d]$，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$|y-y_0|<\delta$时，有

$$|\Phi(y)-\Phi(y_0)|<\varepsilon$$

对此用不等式

$$|\Phi(y)-\Phi(y_0)|=\left|\int_a^{+\infty}f(x,y)dx-\int_a^{+\infty}f(x,y_0)dx\right|$$

$$= \left| \int_a^A [f(x,y) - f(x,y_0)]dx + \int_A^{+\infty} [f(x,y) - f(x,y_0)]dx \right|$$

$$\leqslant \left| \int_a^A [f(x,y) - f(x,y_0)]dx \right| + \left| \int_A^{+\infty} f(x,y)dx \right|$$

$$+ \left| \int_A^{+\infty} f(x,y_0)dx \right|$$

上式左端的第一项由定理21.1能做到任意小，后两项由一致收敛性都能做到任意小.

证明 任取一点 $y_0 \in [c,d]$，有不等式

$$|\Phi(y) - \Phi(y_0)| = \left| \int_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int_a^{+\infty} f(x,y_0)dx \right|$$

$$\leqslant \left| \int_a^A [f(x,y) - f(x,y_0)]dx \right| + \left| \int_A^{+\infty} f(x,y)dx \right|$$

$$+ \left| \int_A^{+\infty} f(x,y_0)dx \right| \qquad (1)$$

由条件（2），对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $A_0 > 0$，当 $A > A$ 时，对任意 $y \in [c,d]$，有

$$\left| \int_A^{+\infty} f(x,y)dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

特别地，对 $y_0 \in [c,d]$，有

$$\left| \int_A^{+\infty} f(x,y_0)dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

又对取定的 $A > A_0$，由条件（2）及定理22.1知，函数

$$\varphi(y) = \int_a^A f(x,y)dx$$

在区间 $[c,d]$ 上是连续的，即对上面的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $|y - y_0| < \delta$ 时，有

$$\left| \int_a^A f(x,y)dx - \int_a^A f(x,y_0)dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

于是，对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $|y - y_0| < \delta$ 时，把上述结果代入不等式（1），得

$$|\Phi(y) - \Phi(y_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

即由含参变量广义积分所确定的函数$\Phi(y)$在点y_0和连续．由y_0的任意性，函数$\Phi(y)$在区间$[c,d]$上连续． □

定理21.8 **（可积性）** 在定理21.7的条件下，函数$\Phi(y)$在区间$[c,d]$上可积，且

$$\int_c^d \left\{\int_a^{+\infty} f(x,y)dx\right\}dy = \int_a^{+\infty}\left\{\int_c^d f(x,y)dy\right\}dx \qquad (21.9)$$

证明 由定理21.7知，函数$\Phi(y)$在$[c,d]$上连续，所以可积．

由定理21.7的条件（2），对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$A_0>0$，当$A>A_0$时，对任意$y\in[c,d]$，有

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x,y)dx\right|<\varepsilon$$

又根据定理21.3，有

$$\int_c^d\left\{\int_a^A f(x,y)dx\right\}dy=\int_a^A\left\{\int_c^d f(x,y)dy\right\}dx$$

于是，当$A>A_0$时，有

$$\left|\int_c^d\left\{\int_a^{+\infty}f(x,y)dx\right\}dy-\int_a^A\left\{\int_c^d f(x,y)dy\right\}dx\right|$$

$$=\left|\int_c^d\left\{\int_a^A f(x,y)dx\right\}dy+\int_c^d\left\{\int_A^{+\infty} f(x,y)dx\right\}dy\right.$$

$$\left.-\int_a^A\left\{\int_c^d f(x,y)dy\right\}dx\right|$$

$$\leqslant\left|\int_c^d\left\{\int_A^{+\infty}f(x,y)dx\right\}dy\right|\leqslant\int_c^d\left|\int_A^{+\infty}f(x,y)dx\right|dy$$

$$<\varepsilon\cdot\int_c^d dy=\varepsilon(d-c)$$

即 $$\int_c^d\left\{\int_a^{+\infty}f(x,y)dx\right\}dy=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A\left\{\int_c^d f(x,y)dy\right\}dx$$

或 $$\int_c^d\left\{\int_a^{+\infty}f(x,y)dx\right\}dy=\int_a^{+\infty}\left\{\int_c^d f(x,y)dy\right\}dx$$ □

定理21.8说明，在所给条件下，关于变量x和y两个积分可以交换次序，我们称之为积分号下的积分法，

定理21.9 **（可微性）** 如果函数$f(x,y)$满足条件：

（1）函数 $f(x,y)$ 和 $f'_y(x,y)$ 在 $D=\{(x,y)\ |a\leqslant x<+\infty,\ c\leqslant y\leqslant d\}$ 上连续；

（2）对任意 $y\in[c,d]$，积分 $\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$ 收敛；

（3）广义积分

$$\int_a^{+\infty}f'_y(x,y)dx$$

在区间 $[c,d]$ 上一致收敛．则函数

$$\Phi(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$$

在区间 $[c,d]$ 上有连续导数，且

$$\Phi'(y)=\frac{d}{dy}\int_a^{+\infty}f(x,y)dx=\int_a^{+\infty}f'_y(x,y)dx \qquad (21.10)$$

证明 由条件（3），我们令

$$g(y)=\int_a^{+\infty}f'_y(x,y)dx$$

若等式(21.10)成立，我们只须证明 $g(y)=\Phi'(y)$ 即可．

根据定理 21.7 知，函数 $g(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续，再由定理 21.8，对任意 $y\in[c,d]$，有

$$\int_c^y g(t)dt=\int_c^y\left\{\int_a^{+\infty}f'_t(x,t)dx\right\}dt$$

$$=\int_a^{+\infty}\left\{\int_c^y f'_t(x,t)dt\right\}dx$$

$$=\int_a^{+\infty}[f(x,y)-f(x,c)]dx=\Phi(y)-\Phi(c)$$

将上式两端对 y 求导，根据积分上限函数的求导法，其导数为

$$g(y)=\Phi'(y)$$

又因为 $g(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续，所以 $\Phi'(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续．

定理21.9说明，在所给条件下，导数运算与积分运算可交换次序，即

$$\frac{d}{dy}\int_a^{+\infty}f(x,y)dx=\int_a^{+\infty}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)dx$$

我们称之为积分号下的微分法。

§21.3 含参变量广义积分的简单应用

含参变量广义积分，可以用来计算一些重要积分。这些积分有的不含参变量，有的被积函数的原函数不是初等函数。为了求出这些积分的值，常把它与某个参变量积分联系起来，应用§21.2 的积分号下的微分法或积分号下的积分法，求出原来的积分值。这是含参变量积分的一个重要应用，本节通过例子介绍这一方法。

例1 计算广义积分

$$\varphi(y)=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos(2xy)dx,\quad y\in(-\infty,\ +\infty)$$

解 被积函数$e^{-x^2}\cos(2xy)$ 及它的编导数

$$\frac{\partial}{\partial y}[e^{-x^2}\cos(2xy)]=-2xe^{-x^2}\sin(2xy)$$

在区域$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty\}$ 上连续，且在D上又有

$$|e^{-x^2}\cos(2xy)|\leqslant e^{-x^2},\ |-2xe^{-x^2}\sin(2xy)|\leqslant 2xe^{-x^2}$$

我们已知广义积分

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx \quad 与 \quad \int_0^{+\infty}2xe^{-x^2}dx$$

皆收敛，根据M—判别法，广义积分

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos(2xy)dx \quad 与\int_0^{+\infty}-2xe^{-x^2}\sin(2xy)dx$$

在区间 $(-\infty,\ +\infty)$ 上一致收敛。根据积分号下的微分法，有

$$\varphi'(y)=\int_0^{+\infty}-2xe^{-x^2}\sin(2xy)dx$$

用分部积分法，得

$$\varphi'(y)=e^{-x^2}\sin(2xy)\Big|_0^{+\infty}-2y\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos(2xy)dx$$

$$=-2y\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos(2xy)dx=-2y\varphi(y)$$

从而，有

$$\int\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}dy=-\int 2ydy=-y^2+c$$

即 $\ln\varphi(y)=-y^2+c$

解得

$$\varphi(y)=c_1e^{-y^2}\ (\text{其中}\ c_1=e^c)$$

又因为 $\varphi(0)=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$（概率积分），代入上式解得 $c_1=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$。于是

$$\varphi(y)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-y^2},\ y\in(-\infty,+\infty)$$

例2 计算广义积分

$$I=\int_0^{+\infty}e^{-ax}\frac{\sin bx-\sin ax}{x}dx,\quad(b>a,\ a>0)$$

解 因为

$$\frac{\sin bx-\sin ax}{x}=\int_a^b\cos xydy$$

所以

$$I=\int_0^{+\infty}e^{-ax}\frac{\sin bx-\sin ax}{x}dx=\int_0^{+\infty}e^{-ax}\left(\int_a^b\cos xydy\right)dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\left\{\int_a^b e^{-ax}\cos xy\ dy\right\}dx$$

由于对任意 $y\in[a,b]$，有 $|e^{-ax}\cos xy|\leqslant e^{-ax}$，且广义积分 $\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx$ 收敛。根据 M—判别法，积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos xy\,dx$$

在 $[a,b]$ 上一致收敛. 又 $e^{-\alpha x}\cos xy$ 在 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x<+\infty, a\leqslant y\leqslant b\}$ 上连续. 于是，由积分号下的积分法，有

$$I=\int_0^{+\infty}\{\int_a^b e^{-\alpha x}\cos xy\,dy\}dx=\int_a^b\{\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos xy\,dx\}dy$$

$$=\int_a^b \frac{\alpha}{\alpha^2+y^2}dy=\operatorname{arc}\ \operatorname{tg}\frac{b}{\alpha}-\operatorname{arc}\ \operatorname{tg}\frac{a}{\alpha}$$

例 3 计算积分

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx \qquad (0<a<b)$$

解 这个积分我们曾在第二十章用伏茹兰尼积分算过，下面用积分号下积分法来计算.

因为被积函数可表为变量 y 的积分

$$\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}=\int_a^b e^{-xy}dy$$

所以

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\int_0^{+\infty}\{\int_a^b e^{-xy}dy\}dx$$

由于函数 e^{-xy} 在 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x<+\infty, a\leqslant y\leqslant b\}$ 上连续，且积分 $\int_0^{+\infty}e^{-xy}dx$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛. 事实上

$$e^{-xy}\leqslant e^{-ax},\ y\in[a,b]$$

而广义积分 $\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx$ 收敛. 根据积分号下的积分法，有

$$I=\int_a^b\{\int_0^{+\infty}e^{-xy}dx\}dy=\int_a^b\left[\frac{e^{-xy}}{y}\right]_0^{+\infty}dy$$

$$=\int_a^b\frac{1}{y}dy=\ln\frac{b}{a}$$

例 4 计算积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

解 在例2中，令$b=0$，$a=1$，则有

$$\varphi(\alpha)=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx=\mathrm{arc\ tg}\frac{1}{\alpha}\quad(\alpha>0)\qquad(1)$$

容易看出，只要极限 $\lim\limits_{\alpha\to0^+}\varphi(\alpha)$ 存在，即得结果。事实上，我们可以证明含参变量的广义积分（1），当 $\alpha\geqslant0$ 时一致收敛。根据定理21 7知，函数$\varphi(\alpha)$在$\alpha\geqslant0$上是连续的，且

$$\varphi(0)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

于是，由（1）式有

$$\varphi(0)=\lim_{\alpha\to0^+}\varphi(\alpha)=\lim_{\alpha\to0^+}\mathrm{arctg}\frac{1}{\alpha}=\frac{\pi}{2}$$

§ 21.4 欧拉积分

我们曾在第二十章中讨论过积分

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \text{ 与 } \Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

的收敛域。它们分别称为第一型、第二型欧拉积分。当$p>0$，$q>0$时，$B(p,q)$收敛，所以它定义了关于参变量 p 和 q 的二元函数，称为**具塔函数**。当 $\alpha>0$ 时，$\Gamma(\alpha)$ 收敛，所以它定义了关于参变量α 的函数，称为**伽玛函数**。

下面我们讨论 Γ 函数、B 函数的性质以及它们之间的关系。

一 Γ函数的一些性质

1 函数$\Gamma(\alpha)$在其定义域（0，$+\infty$）上连续。

证明 把积分$\Gamma(\alpha)$改写为

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx=\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx+\int_1^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

对任意$\alpha\in(0,+\infty)$，定存在两个正数 α_0，β_0，使 $0<\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\beta_0$，于是有

$$x^{\alpha-1}e^{-x}\leqslant x^{\alpha_0-1}e^{-x},\quad x\in[0,1]$$

$$x^{\alpha-1}e^{-x}\leqslant x^{\beta_0-1}e^{-x},\quad x\in[1,+\infty)$$

由于$\int_0^1 x^{\alpha_0-1}e^{-x}dx$ 和$\int_1^{+\infty}x^{\beta_0-1}e^{-x}dx$收敛，故广义积分

$$\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

在区间$[\alpha_0,\beta_0]$上一致收敛。根据定理22.7函数$\Gamma(\alpha)$ 在$[\alpha_0,\beta_0]$ 上连续，再由α 的任意性，函数$\Gamma(\alpha)$在 $(0,+\infty)$ 上连续。 □

2 $\Gamma(\alpha)$函数有递推公式

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)\tag{21.11}$$

证明 由分部积分法，有

$$\Gamma(\alpha+1)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha}e^{-x}dx=-x^{\alpha}e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\alpha\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$
$$=\alpha\Gamma(\alpha)$$ □

当$n<\alpha\leqslant n+1$（n 为自然数）时，应用公式(21.11)得

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)=\alpha(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)=\cdots$$
$$=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n)\Gamma(\alpha-n)$$

特别地，当α 为自然数n 时，由上式得

$$\Gamma(n+1)=n(n-1)(n-2)\cdots1\cdot\Gamma(1)$$

而 $$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=1$$

于是，有

$$\Gamma(n+1)=n!=\int_0^{+\infty}x^{n}e^{-x}dx\tag{21.12}$$

在计算中，有时需要求$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$的值。因为

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty}x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$$

进行变量替换，令 $t=\sqrt{x}$,则当 $x=0$ 时，$t=0$；当$x=+\infty$时，$t=+\infty$；$x=t^2$，$dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$,再由概率积分 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，得

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$$

二 B函数的一些性质

1 对称性：$B(p,q)=B(q,p)$.

证明 设$x=1-t$，$dx=-dt$,则有

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=-\int_1^0(1-t)^{p-1}t^{q-1}dt$$

$$=\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}dt=B(q,p)$$ □

2 B函数有递推公式

$$B(p,q)=\frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1),\quad q>1 \tag{21.13}$$

$$B(p,q)=\frac{p-1}{p+q-1}B(q,p-1),\quad p>1$$

证明 当 $q>1$时，用分部积分法，有

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

$$=\frac{x^p(1-x)^{q-1}}{p}\Big|_0^1+\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^p(-x)^{q-2}dx$$

$$=\frac{q-1}{p}\int_0^1[x^{p-1}-x^{p-1}(1-x)](1-x)^{q-2}dx$$

$$=\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-2}dx-$$

$$\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

$$=\frac{q-1}{p}B(p,\ q-1)-\frac{q-1}{p}B(p,q)$$

即 $$B(p,q)=\frac{q-1}{p}B(p,\ q-1)-\frac{q-1}{p}B(p,q)$$

移项整理，得

$$B(p,q)=\frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1)\quad(q>1)$$

根据 B 函数的对称性和上式，有

$$B(q,p)=\frac{p-1}{p+q-1}B(q,p-1)\quad(p>1)$$ □

三　B函数与Γ函数的关系

B 函数与 Γ 函数从形式上看有很大的差别，但是它们却有着内在的联系。下面我们讨论它们之间的关系。

对 B 函数的递推公式(21.13)，令 $p=m,q=n$ (m,n为自然数)，则有

$$B(m,\ n)=\frac{n-1}{m+n-1}B(m,\ n-1)$$

反复应用 B 函数的递推公式，有

$$B(m,n)=\frac{n-1}{m+n-1}B(m,n-1)$$

$$=\frac{n-1}{m+n-1}\cdot\frac{n-2}{m+n-2}B(m,\ n-2)$$

$$=\frac{n-1}{m+n-1}\cdot\frac{n-2}{m+n-2}\cdot\frac{n-3}{m+n-3}\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{m+1}B(m,\ 1)$$

又因为

$$B(m, 1) = \int_0^1 x^{m-1} dx = \frac{1}{m}$$

所以

$$B(m,n) = \frac{n-1}{m+n-1} \cdot \frac{n-2}{m+n-2} \cdots \frac{1}{m+1} \cdot \frac{1}{m}$$

$$\cdot \frac{(m-1)!}{(m-1)!} = \frac{(n-1)!\,(m-1)!}{(m+n-1)!}$$

于是

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(m+n)} \tag{21.14}$$

这个关系式，对任意正数p, q也同样成立，即

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{21.15}$$

下面我们给出它的证明。

证明 先把B函数与Γ函数表示成另一种形式。

对积分$\Gamma(\alpha)$作变量替换，令$x = t^2$，有

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = 2\int_0^{+\infty} t^{2\alpha-1} e^{-t^2}\, dt \tag{1}$$

令$x = \cos^2 t$，有

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1} t \sin^{2q-1} dt \tag{2}$$

应用公式（1），有

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(q) = 2\int_0^{+\infty} x^{2p-1} e^{-x^2} dx \cdot 2\int_0^{+\infty} y^{2q-1} e^{-y^2} dy$$

$$= 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^{2p-1} y^{2q-1} e^{-(x^2+y^2)} dx\,dy$$

对此广义二重积分作极坐标变换

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta$$

此时，$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$，$0 \leqslant r < +\infty$。而 $dxdy = rdrd\theta$，注意到公式（2），有

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\theta\ \sin^{2q-1}\theta d\theta\cdot\ 2\int_0^{+\infty}r^{2(p+q)-1}e^{-r^2}dr$$
$$=B(p,q)\Gamma(p+q)$$

于是

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\qquad\square$$

四　欧拉积分在计算积分上的应用

欧拉积分在计算一些较复杂的定积分、广义分上有应用。其主要思想方法是，先作一定的变换替换，把所要算的积分变为欧拉积分的形式，而后用欧拉积分的性质及 B 函数与 Γ 函数的关系，算出其结果。下面仅举几个例子加以说明。

例1　计算广义积分

$$I_n=\int_0^{+\infty}x^{2n}e^{-x^2}dx$$

其中 n 为自然数。

解　容易看出作变量替换 $t=x^2$ 可变为 Γ 函数的形式。事实上

令 $t=x^2$，则 $x=\sqrt{t}$，$dx=\frac{dt}{2\sqrt{t}}$，有

$$I_n=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}t^{n-\frac{1}{2}}\ e^{-t}dt=\frac{1}{2}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

再应用公式(21.11)，有

$$I_n=\frac{1}{2}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}-1\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}-1\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right)=\cdots$$
$$=\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(n-\frac{2n-1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{2n-1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{2n-3}{2}\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

又已知$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$，最后得

$$I_n=\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\cdot\sqrt{\pi}$$

例 2　求积分

$$I_{n,m}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^m x dx$$

的存在域，并计算$I_{4,5}$。

解　我们注意到B函数的另一种形式时，易想到作变量替换，令$t=\sin^2x$，$dt=2\sin x\cos x dx$，有

$$I_{n,m}=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{n-1}{2}}(1-t)^{\frac{m-1}{2}}dt=\frac{1}{2}B\left(\frac{n+1}{2},\ \frac{m+1}{2}\right).$$

再根据B函数与Γ函数的关系，有

$$I_{n,m}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}+1\right)}$$

根据欧拉积分存在条件，当$\frac{n+1}{2}>0$，$\frac{m+1}{2}>0$时，即$n>-1$，$m>-1$存在。

特别地，当$n=4$，$m=5$时，有

$$I_{4,5}=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)}$$

根据Γ函数的递推公式和$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$，有

$$I_{4,5}=\frac{1}{2}\frac{\frac{3}{2}\sqrt{\pi}\cdot 2}{\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\sqrt{\pi}}=\frac{8}{315}$$

例 3 证明欧拉等式

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx = \frac{\pi}{4}$$

证明 为了把左端的两个积分变为 B 函数的形式，把变量替换，令 $t = x^4$，有

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} dx = \frac{1}{4} \int_0^1 t^{-\frac{3}{4}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{4} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx = \frac{1}{4} \int_0^1 t^{-\frac{1}{4}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{4} B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

于是，根据 B 函数与 Γ 函数的关系，有

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} dx \cdot \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx = \frac{1}{16} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \cdot B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{4}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \frac{\pi}{4}$$

学 习 指 导

一 内容概要

1 重点及要求

本章的重点是含参变量积分所定义的函数的分析性质：连续性、可积性及可微性. 关于含参变量定积分，要求明确几个定理的条件及其证明方法，并掌握应用积分号下积分法及积分号下微分法计算定积分的思想方法. 对于含参变量广义积分，

注意掌握一致收敛概念及它在证明分析性质中所处的地位。这部分与和函数的分析性质的证明其思想方法基本一致，要求对照起来学习。对于欧拉积分，要求掌握它们的性质、递推公式和B函数与Γ函数之间关系，并且掌握应用欧拉积分计算积分的思想方法。

2 内容概要

含参变量积分分为两大类：含参变量定积分和含参变量广义积分。

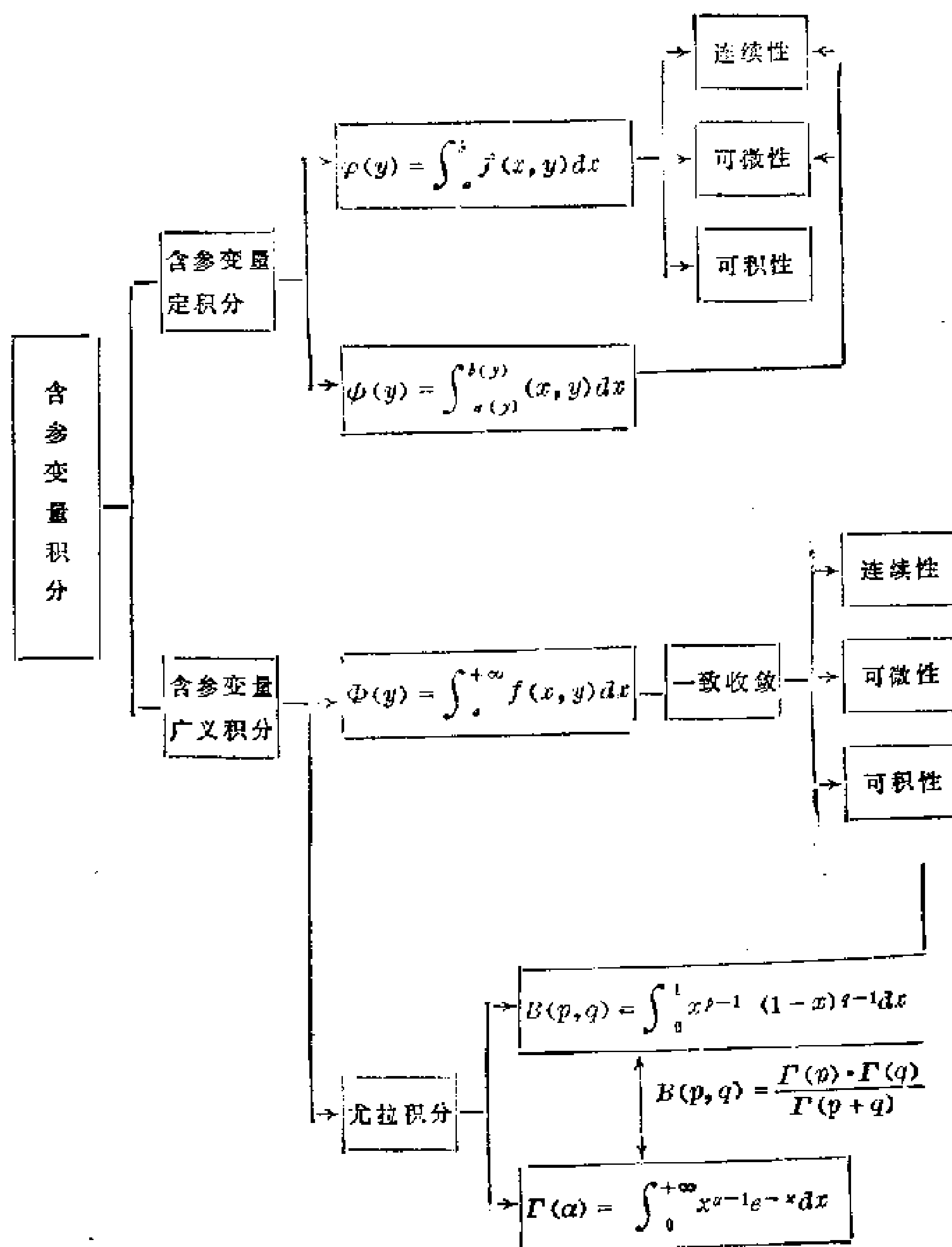
含参变量定积分是由被积函数含有与积分变量不同的参变量的定积分引入的，它分为积分限为常数的情形和积分限依赖于参变量的情形两类。它们都是由定积分定义的一类新函数。对它们分别讨论了分析性质：连续性（积分号下取极限）、可积性（积分号下的积分法）和可微性（积分号下的微分法）。

含参变量广义积分是由被积函数含有参变量的广义积分引入的，它是由广义积分定义的一类新函数。为了讨论这类函数的分析性质，先给出了含参变量广义积分的一致收敛概念和一致收敛判别法、M—判别法。一致收敛性在证明由含参变量广义积分所定义的函数的连续性、可积性、可微性中起重要的作用。它与证明函数级数和函数的分析性质起着同样的作用。

我们知道，函数的连续、导数及积分都是用极限定义的，所以由含参变量积分所定义的和函数的分析性质，其实质就是极限运算交换顺序问题。

欧拉积分—Γ函数和B函数是两个特殊的含参变量广义积分，是两个非常有用的函数，应用它计算某些积分是很简便的。

本章的主要内容及结构关系如下：


含参变量积分
含参变量定积分
$\varphi(y)=\int_a^b f(x,y)dx$
$\psi(y)=\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx$
连续性
可微性
可积性
含参变量广义积分
$\Phi(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$
一致收敛
连续性
可微性
可积性
尤拉积分
$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$
$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$
$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$

二 几点说明

1 定理21.5的另一种证明。

对任意给定的 $y_0\in[c,d]$，有

$$\psi(y)=\int_{a(y)}^{b(y)}f(x,y)dx=\int_{a(y)}^{a(y_0)}f(x,y)dx+\int_{a(y_0)}^{b(y_0)}f(x,y)dx+\int_{b(y_0)}^{b(y)}f(x,y)dx$$

对上式右端的三个积分分别记作

$$F_1(y)=\int_{a(y)}^{a(y_0)}f(x,y)dx,\ F_2(y)=\int_{a(y_0)}^{b(y_0)}f(x,y)dx,$$

$$F_3(y)=\int_{b(y_0)}^{b(y)}f(x,y)dx$$

由于 y_0 是固定的，因此对函数 $F_2(y)$ 应用定理21.2，得

$$F'_2(y)=\int_{a(y_0)}^{b(y_0)}f'_y(x,y)dx$$

特别是

$$F'_2(y_0)=\int_{a(y_0)}^{b(y_0)}f'_y(x,y_0)dx$$

对函数 $F_1(y)$ 和 $F_3(y)$ 分别应用积分中值定理，有

$$F_1(y)=\int_{a(y)}^{a(y_0)}f(x,y)dx=f(\xi,y)[a(y_0)-a(y)]$$

$$F_3(y)=\int_{b(y_0)}^{b(y)}f(x,y)dx=f(\eta,y)[b(y)-b(y_0)]$$

其中 ξ 介于 $a(y)$ 与 $a(y_0)$ 之间，η 介于 $b(y)$ 与 $b(y_0)$ 之间。由此得

$$F'_1(y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{F_1(y)-F_1(y_0)}{y-y_0}=\lim_{y\to y_0}f(\xi,y)\cdot\frac{a(y)-a(y)}{y-y_0}$$

$$=-f[a(y_0),y_0]a'(y_0)$$

$$F'_3(y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{F_3(y)-F_3(y_0)}{y-y_0}=\lim_{y\to y_0}f(\eta,y)\frac{b(y)-b(y_0)}{y-y_0}$$

$$=f[b(y_0),y_0]b'(y_0)$$

从而

$$\psi'(y_0)=F'_1(y_0)+F'_2(y_0)+F'_3(y_0)$$

于是，根据 y_0 的任意性，有

$$\psi'(y)=\int_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x,y)dx+f[b(y),y]b'(y)$$
$$-f[a(y),y]a'(y)$$ □

2 一致收敛判别法的补充

含参变量广义积分的一致收敛判别法，我们只介绍了M—判别法。但M—判别法有很大的局限性，对判别那些一致收敛但非绝对一致收敛的含参变量广义积分，M—判别法失效。下面我们介绍比M—判别法更进一步的一致收敛判别法，为此我们先给出柯西一致收敛准则。

定理（柯西一致收敛准则）．含参变量广义积分

$\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 在$[c,d]$上一致收敛的必要充分条件是：对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $A_0>0$，当 $A'>A>A_0$ 时，对任意 $y\in[c,d]$，有

$$\left|\int_A^{A'} f(x,y)dx\right|<\varepsilon \tag{1}$$

证明 必要性 如果积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$在$[c,d]$上一致收敛，则根据一致收敛的定义，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $A_0>0$，当$A'>A>A_0$ 时，任意 $y\in[c,d]$，都有

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x,y)dx\right|<\varepsilon,\quad\left|\int_{A'}^{+\infty} f(x,y)dx\right|<\varepsilon$$

于是，有

$$\left|\int_A^{A'} f(x,y)dx\right|=\left|\int_A^{+\infty} f(x,y)dx-\int_{A'}^{+\infty} f(x,y)dx\right|\leqslant\left|\int_A^{+\infty} f(x,y)dx\right|+\left|\int_{A'}^{+\infty} f(x,y)dx\right|<2\varepsilon$$

充分性 由定理条件，根据广义积分的柯西收敛准则，对

$[c,d]$上每一个确定的 y，含参变量广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 收敛，即

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x,y)dx = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

又对任意 $y\in[c,d]$不等式（1）都成立，且

$$\left|\int_a^{A'} f(x,y)dx - \int_a^A f(x,y)dx\right| = \left|\int_A^{A'} f(x,y)dx\right| < \varepsilon$$

于是，当$A'\to+\infty$时，有

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int_a^A f(x,y)dx\right| = \left|\int_A^{+\infty} f(x,y)dx\right| \leqslant \varepsilon$$

即含参变量广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$在$[c,d]$上一致收敛。□

下面我们应用柯西一致收敛准则和积分第二中值定理，给出被积函数为二个函数乘积形式

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\cdot g(x,y)dx \tag{2}$$

含参变量广义积分的一致收敛判别法。其中我们设 $f(x,y)$，$g(x,y)$在区域$D=\{(x,y)\mid a\leqslant x<+\infty,\ c\leqslant y\leqslant d\}$上连续。

定理（迪里赫列判别法） 如果

（1）当$A\to+\infty$时，$\int_a^A f(x,y)dx$对 $y\in[c,d]$ 一致有界，即存在常数$M>0$，对任意$A\geqslant a$ 和任意 $y\in[c,d]$，有

$$\left|\int_a^A f(x,y)dx\right|\leqslant M$$

（2）$g(x,y)$ 关于变量x单调递减，且对 $y\in[c,d]$一致收敛于零，即对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在$A_0>0$，当$x>A_0$时，对任意 $y\in[c,d]$，有

$$|g(x,y)|<\varepsilon$$

则含参变量广义积分（2）在$[c,d]$上一致收敛。

证明 根据积分第二中值定理，对任意$A'>A\geqslant a$有

$$\int_A^{A'} f(x,y)\cdot g(x,y)dx=g(A,y)\int_A^{\xi}f(x,y)dx+g(A',y)\int_{\xi}^{A'} f(x,y)dx$$

其中$A\leqslant\xi\leqslant A'$．由条件（1），对任意$y\in[c,d]$，有

$$\left|\int_A^{\xi}f(x,y)dx\right|=\left|\int_a^{\xi}f(x,y)dx-\int_a^{A}f(x,y)dx\right|$$

$$\leqslant\left|\int_a^{\xi}f(x,y)dx\right|+\left|\int_a^{A}f(x,y)dx\right|\leqslant 2M$$

同理

$$\left|\int_{\xi}^{A}f(x,y)dx\right|\leqslant 2M$$

由条件（2），当$A'>A>A_0$时，对任意$y\in[c,d]$，有

$$|g(A,y)|<\varepsilon,\quad |g(A',y)|<\varepsilon$$

于是，当$A'>A>A_0$时，有

$$\left|\int_A^{A'} f(x,y)\cdot g(x,y)dx\right|\leqslant\left|g(A,y)\right|\left|\int_A^{\xi}f(x,y)dx\right|$$

$$+\left|g(A',y)\right|\left|\int_{\xi}^{A'} f(x,y)dx\right|<\varepsilon\cdot 2M+\varepsilon\cdot 2M=4M\varepsilon$$

根据柯西一致收敛准则，含参变量广义积分（2）在$[c,d]$上一致收敛。 □

例 证明含参变量广义积分

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx$$

在$[0,+\infty)$上一致收敛。

证明 为了应用迪里赫列判别法，设

$$f(x,\alpha)=e^{-\alpha x}\sin x,\qquad g(x,\alpha)=\frac{1}{x}$$

对任意$A\geqslant 0$和$\alpha\in[0,+\infty)$，有

$$\left|\int_0^A f(x,\alpha)dx\right| = \left|\left[\frac{-e^{-\alpha x}(\alpha\sin x+\cos x)}{1+\alpha^2}\right]_0^A\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{-e^{-\alpha A}(\alpha\sin A+\cos A)+1}{1+\alpha^2}\right|\leqslant\frac{\alpha+\alpha}{1+\alpha^2}\leqslant 3$$

$g(x,\alpha)=\dfrac{1}{x}$单调递减，且当$x\to+\infty$时，对α一致趋于零。

根据迪里赫列判别法$I(\alpha)$在$[0,+\infty)$上一致收敛。

三　例题选讲

例1　求极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$$

基本思路　根据函数极限与数列极限的关系，如果函数极限

$$\lim_{h\to 0}\int_0^1\frac{dx}{1+(1+hx)^{\frac{1}{h}}}$$

存在，则上述数列极限也存在相等。验证定理21.1的条件，用积分号下取极限法便得结果。

解　设$\dfrac{1}{n}=h$，则有

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=(1+hx)^{\frac{1}{h}}$$

如果把h看作连续变量，则有

$$\lim_{h\to 0}(1+hx)^{\frac{1}{h}}=\lim_{h\to 0}\left[(1+hx)^{\frac{1}{hx}}\right]^x=e^x$$

此时，设

$$f(x,h)=\begin{cases}(1+hx)^{\frac{1}{h}} & \text{当}h\neq 0\\ e^x & \text{当}\ h=0\end{cases}$$

则函数 $f(x,h)$ 是 x,h 的二元连续函数。于是，积分号下的取极限法，有

$$\lim_{h\to 0}\int_0^1 \frac{dx}{1+(1+hx)^{\frac{1}{h}}}=\int_0^1\left[\lim_{h\to 0}\frac{1}{1+(1+hx)^{\frac{1}{h}}}\right]dx$$

$$=\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}$$

从而，根据函数极限与数列极限的关系，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}=\int_0^1\frac{dx}{1+e^x}$$

令 $e^x=t$ 时，$e^x dx=dt$，当 $x=0$ 时，$t=1$；$x=1$ 时，$t=e$。于是

$$\int_0^1\frac{dx}{1+e^x}=\int_1^e\frac{dt}{t(1+t)}=[\ln t-\ln(1+t)]\Big|_1^e=\ln\frac{2e}{1+e}$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}=\ln\frac{2e}{1+e}$$

例2 证明，如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则函数

$$F(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x(x-t)^{n-1}f(t)dt$$

是微分方程 $F^{(n)}(x)=f(x)$ 满足条件 $F(a)=F'(a)=\cdots=F^{(n-1)}(a)=0$ 的解。

基本思路 重复应用定理21.5，求出 $F'(x),F''(x),\cdots,F^{(n)}(x)$，并对 $F'(x)$，$F''(x)$，$\cdots$，$F^{(n-1)}(x)$ 验证满足条件。

证明 因为被积函数 $(x-t)^{n-1}f(t)$ 及其关于参变量 x 的偏导数 $(n-1)(x-t)^{n-2}f(x)$ 在区域 $D=\{(x,t)|\ a\leqslant x,t\leqslant b\}$ 上连续；函数 $a(x)=a$，$b(x)=x$ 可微，且有

$$a=a,\quad a\leqslant x\leqslant b$$

所以根据定理21.5，有

$$F'(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x(n-1)(x-t)^{n-2}f(t)dt$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}(x-x)^{n-1}f(x)\cdot x'-\frac{1}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

$$\cdot f(a)a'=\frac{1}{(n-2)!}\int_a^x(x-t)^{n-2}f(t)dt$$

同理，有

$$F''(x)=\frac{1}{(n-3)!}\int_a^x(x-t)^{n-3}f(t)dx$$

重复应用定理21.5，可求得

$$F^{(n-1)}(x)=\int_a^x f(t)dt$$

最后，因为函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，所以上面积分上限函数可导，且有

$$F^{(n)}(x)=f(x)$$

即函数$F(x)$满足方程$F^{(n)}(x)=f(x)$。

由前面推导知，当 $x=a$时，有

$$F(a)=F'(a)=\cdots=F^{(n-1)}(a)=0$$

例 3 证明：如果函数$f(x)$在闭区间$[0,a]$上连续，且对$0\leqslant\zeta\leqslant a$，有$(x-\zeta)^2+y^2+z^2\neq0$，则函数

$$u(x,y,z)=\int_0^a\frac{f(\zeta)}{\sqrt{(x-\zeta)^2+z^2}}d\zeta \qquad (1)$$

满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0$$

基本思路 这是含三个参变量的定积分，不难看出被积函数

$$F(x,y,z,\zeta)=\frac{f(\zeta)}{\sqrt{(x-\zeta)^2+y^2+z^2}}$$

及F'_x, F''_{x^2}; F'_y, F''_{y^2}; F'_z, F''_{z^2} 在函数 $F(x,y,z,\zeta)$ 的定义域上连续，故应用定理21.2求$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$代入拉氏方即可。

证明 设 $r=\sqrt{(x-\zeta)^2+y^2+z^2}$，由于$r\neq 0$，所以应用定理21.2（积分号下的微积分），有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\int_0^l -\frac{1}{r^2}\frac{(x-\zeta)f(\zeta)}{r}d\zeta=-\int_0^l \frac{(x-\zeta)f(\zeta)}{r^3}d\zeta$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\int_0^l \frac{f(\zeta)}{r^3}d\zeta+3\int_0^l \frac{(x-\zeta)^2 f(\zeta)}{r^5}d\zeta$$

同理可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\int_0^l \frac{f(\zeta)}{r^3}d\zeta+3\int_0^l \frac{y^2 f(\zeta)}{r^5}d\zeta$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\int_0^l \frac{f(\zeta)}{r^3}d\zeta+3\int_0^l \frac{z^2 f(\zeta)}{r^5}d\zeta$$

将这三个二阶偏导相加，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}=-3\int_0^l \frac{f(\zeta)}{r^3}d\zeta+$$

$$3\int_0^l \frac{[(x-\zeta)^2+y^2+z^2]f(\zeta)}{r^5}d\zeta$$

$$=-3\int_0^l \frac{f(\zeta)}{r^3}d\zeta+3\int_0^l \frac{r^2 f(\zeta)}{r^5}d\zeta=0$$

于是，函数$u(x,y,z)$满足拉普拉斯方程。

例 4 证明完全椭圆积分

$$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

$$F(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi\quad(0<k<1)$$

满足公式

$$\int_0^k E(k)\,k\,dk = \frac{1}{3}[(1+k^2)E(k) - k_1^2 F(k)]$$

其中 $k_1^2 = 1 - k^2$.

基本思路 不难验证，等式的右端关于 k 的导数，除常系数外与左端积分的被积函数相等。另外，又不难看到完全椭圆积分的被积函数及被积函数关于参变量 k 的偏导数在其定义域上连续，故可应用定理21.2的积分号下的微分法。

证明 我们首先求等式右端的导数

$$[(1+k^2)E(k) - k_1^2 F(k)]' = 2kE(k) + (1+k^2)E'(k) - k_1^2 F'(k) + 2kF(k)$$

其中

$$E'(k) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi = \frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-k^2\sin^2\varphi - 1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi$$

$$= \frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi - \frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi$$

$$= \frac{1}{k}[E(k) - F(k)]$$

$$F'(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k\sin^2\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}d\varphi = \frac{1}{k}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}d\varphi\right]$$

而

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}d\varphi = \frac{1}{1-k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}d\varphi = \frac{E(k)}{1-k^2}$$

这是因为

$$k^2\frac{d}{d\varphi}[\sin\varphi\cos\varphi(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}]$$

$$= \frac{k^2-1}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} + (1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}$$

两边从0到$\frac{\pi}{2}$取积分，有

$$k^2[\zeta\sin\varphi\cos\varphi(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=(k^2-1)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}d\varphi+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}d\varphi=0$$

将$E'(k)$和$F'(k)$代入上式，得

$$[(1+k^2)E(k)-k_1^2F(k)]'=2kE(k)+\frac{1+k^2}{k}[E(k)$$

$$-F(k)]$$

$$-K_1^2\left[\frac{E(k)}{kk_1^2}-\frac{F(k)}{k}\right]+2kF(k)$$

$$=2kE(k)+\frac{E(k)}{k}-\frac{F(k)}{k}+kE(k)-kF(k)$$

$$-\frac{E(k)}{k}+\frac{F(k)}{k}-kF(k)+2kF(k)$$

$$=3kE(k)$$

由此得

$$\int_0^K E(k)k\,dk=\frac{1}{3}\int_0^k[(1+k^2)E(k)-k_1^2F(k)]'dk$$

$$=\frac{1}{3}[(1+k^2)E(k)-k_1^2F(k)]\Big|_0^k$$

$$=\frac{1}{3}[(1+k^2)E(k)-k_1^2F(k)]$$

例 5　证明：含参变量广义积分

$$\int_1^{+\infty}x^{\alpha}e^{-x}dx$$

在区间$[a,b]$上一致收敛.

证明　当$x\geqslant 1$时，对$\alpha\in[a,b]$，有

$$x^{\alpha}e^{-x}\leqslant x^{b}e^{-x}$$

又对任意实数 r，有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{r}e^{-x}}{\frac{1}{x^2}}=0$$

故存在$M>0$，当 $x>M$时，有

$$x^b e^{-x} \leqslant \frac{1}{x^2}$$

而广义积分$\int_M^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$收敛。于是由$M$—判别法

$$\int_M^{+\infty} x^b e^{-x} dx$$

在$[a,b]$上一致收敛。从而知

$$\int_1^{+\infty} x^b e^{-x} dx = \int_1^M x^b e^{-x} dx + \int_M^{+\infty} x^b e^{-x} dx$$

收敛。根据M—判别法，所给含参变量广义积分在$[a,b]$上一致收敛。

例 6　利用定理21.8证明概率积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

并计算积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} chbx dx \quad (a>0)$$

基本思路　利用$I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$，构造出等式

$$I^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{+\infty} x e^{-x^2y^2} dy$$

应用定理21.8交换积分次序；利用概率积分计算
$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \mathrm{chb}x dx \ (a>0)$。

证明　在积分

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

中作变换 $u=xy$，得

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \int_0^{+\infty} x e^{-x^2y^2} dy \quad (x>0)$$

由此有

$$I^2=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\int_0^{+\infty}xe^{-x^2y^2}dy$$

又因为

$$\left|xe^{-x^2}\cdot e^{-x^2y^2}\right|\leqslant xe^{-x^2}$$

而广义积分$\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx$收敛，故积分

$$\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}\cdot e^{-x^2y^2}dy$$

在区间（0，+∞）上一致收敛．根据定理21.8可以交换积分次序

$$I^2=\int_0^{+\infty}dy\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}(1+y^2)dx$$

$$=\int_0^{+\infty}-\frac{1}{2(1+y^2)}e^{-x^2(1+y^2)}\Big|_0^{+\infty}dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+y^2}dy=\frac{\pi}{4}$$

于是

$$I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2}\text{ch}bxdx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}[e^{-ax^2+bx}+e^{-ax^2-bx}]dx$$

又根据概率积分，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2+bx}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(\sqrt{a}x-\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2+\frac{b^2}{4a}}dx$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{4a}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2-bx}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{4a}}$$

于是，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2}chbxdx=\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{4a}}+\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{4a}}\right]$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{4a}}$$

例 7 利用已知公式

$$\int_0^{+\infty} e^{-ux^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{u}}\quad(u>0)$$

计算积分

$$I_n=\int_0^{+\infty}e^{-ux^2}x^{2n}dx\quad(n\text{是自然数})$$

解 可以应用积分号下的微分法，对已知公式两端求导数。

事实上，对任意一个 $u>0$，存在 $u_0>0$，使$u\geqslant u_0$，有

$$e^{-ux^2}x^2\leqslant e^{-u_0x^2}x^2$$

且对任意的$P>1$，有

$$\lim_{x\to+\infty}x^Pe^{-u_0x^2}x^2=0$$

于是广义积分$\int_0^{+\infty}e^{-u_0x^2}x^2dx$ 收敛。根据M—判别法，广义积分$\int_0^{+\infty}e^{-ux^2}x^2dx$ 在$[u_0,+\infty)$ 上一致收敛。

由公式(21.10)，有

$$u\int_0^{+\infty}e^{-ux^2}\ x^2dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{u}}$$

即
$$I_1=\int_0^{+\infty}e^{-ux^2}x^2dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2^2}\cdot\frac{1}{u\sqrt{u}}$$

逐次求导数，总可应用积分号下微分法．于是，有

$$I_2=\int_0^{+\infty}e^{-ux^2}x^4dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2^3}\cdot\frac{1\cdot3}{u^2\sqrt{u}},\ \cdots$$

$$I_n=\int_0^{+\infty}e^{-ux^2}x^{2n}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{n+1}}\cdot\frac{(2n-1)!!}{u^n\sqrt{u}}$$

例 8 证明Γ函数

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$$

在区间（0，$+\infty$）内有各阶连续导函数。

证明　我们首先证明当 $x>0$ 时，函数$\Gamma(x)$ 是可导的，且有

$$\Gamma'(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\ln t\,dt$$

这只须证明积分$\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\ln t\,dt$在 $0<x_0\leqslant x\leqslant M<+\infty$ 上是一致收敛的。由于

$$\lim_{t\to+0}t^{\frac{x_0}{2}}\ln t=0$$

故当 $0<t\leqslant 1$ 时，$t^{\frac{x_0}{2}}\ln t$有界，且设

$$|t^{\frac{x_0}{2}}\ln t|\leqslant\Gamma$$

因此有

$$|t^{x-1}e^{-t}\ln t|\leqslant|t^{x-1}\ln t|=|t^{x-\frac{x_0}{2}-1}||t^{\frac{x_0}{2}}\ln t|$$

$$\leqslant\Gamma t^{x-\frac{x_0}{2}-1}\leqslant\Gamma t^{\frac{x_0}{2}-1}$$

因为$\int_0^1 t^{\frac{x_0}{2}-1}dt$收敛，故当 $t=0$ 时可把$t^{\frac{x_0}{2}-1}$当作$t^{x-1}e^{-t}\ln t$的优函数。

又因为当 $t\geqslant 1$ 时，$0\leqslant\ln t<t$，且对于 $0<x_0\leqslant x\leqslant M<+\infty$时，有

$$|t^{x-1}e^{-t}\ln t|\leqslant t^{x}e^{-t}\leqslant t^{M}e^{-t}$$

由于$\int_1^{+\infty}t^{M}e^{-t}dt$收敛，故当 $t\to+\infty$时，可取 $t^{M}e^{-t}$当作$t^{x-1}e^{-t}\ln t$的优函数。

这样就证明了积分$\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\ln t\,dt$在 $0<x_0\leqslant x\leqslant M<+\infty$上是一致收敛的。

根据定理21.9上述分号下的微分法是可行的。再应用定理21.7，知$\Gamma'(x)$是连续的。

同理可得

$$\Gamma^{(n)}(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\ln^n t\,dt$$

且各阶导数连续。

例 9 试将积分

$$I=\int_0^{\pi}\frac{\sin^{n-1}x}{(1+k\cos x)^n}dx\ (0<|k|<1)$$

用欧拉积分表示，并指出它的存在域。

基本思路 对 B 函数 $B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$ 进行变量替换得 $B(p,q)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx$。然后再对积分 I 进行两次变量替换.

解 对 $B(p,q)$ 函数进行变量替换：

设 $t=\frac{x}{1+x}$，则 $1-t=\frac{1}{1+x}$，$dt=\frac{dx}{(1+x)^2}$，$0\leqslant x<+\infty$，于是

$$B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt=\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p-1}}\cdot$$

$$\frac{1}{(1+x)^{q-1}}\cdot\frac{1}{(1+x)^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx \tag{1}$$

对 I 先设 $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=u$，则

$$\sin x=\frac{2u}{1+u^2},\ \cos x=\frac{1+u^2}{1+u^2},dx=\frac{2du}{1+u^2}$$

代入积分 I，得

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\left(\frac{2u}{1+u^2}\right)^{n-1}}{\left(1+k\,\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)^n}\cdot\frac{2}{1+u^2}du$$

$$=\frac{2^n}{(1+k)^n}\int_0^{+\infty}\frac{u^{n-1}}{\left(1+\frac{1-k}{1+k}u^2\right)^n}du$$

再设$\frac{1-k}{1+k}u^2=t$，则

$$I=\frac{2^{n-1}}{(1+k)^n}\int_0^{+\infty}\frac{\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^{\frac{n}{2}}t^{\frac{n}{2}-1}}{(1+t)^n}dt$$

$$=\frac{2^{n-1}}{(1-k^2)^{\frac{n}{2}}}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{n}{2}-1}}{(1+t)^n}dt$$

与公式（1）比较，得

$$P=\frac{n}{2},\quad q=\frac{n}{2}$$

于是，有

$$I=\frac{2^{n-1}}{(1-k^2)^{\frac{n}{2}}}B\left(\frac{n}{2},\ \frac{n}{2}\right)=\frac{2^{n-1}}{(1-k^2)^{\frac{n}{2}}}\cdot\frac{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(n)}$$

当$n>0$时（或$\frac{n}{2}>0$）时，积分存在。

习　　题

§ 21.1

1．求下列极限：

（1）$\lim\limits_{\alpha\to0}\int_0^2 x^2\cos\alpha x dx$；（2）$\lim\limits_{b\to0}\int_1^0\frac{1}{1+x^2+b^2}dx$。

2．设

$$F(x)=\int_0^x (x+y)f(y)dy$$

其中$f(x)$为可微分函数，求$F''(x)$。

3．应用积分号下的微分法求下列积分

(1) $\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)dx$； (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{arc\,tg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}dx$。

4. 计算积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}\,dx\quad(0<a<b)$$

5. 证明，如果函数 $f(x,y)$ 连续，则函数

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\int_0^x\left[\int_{\xi-x+y}^{\xi+x+y}f(\xi,\eta)\,d\eta\right]d\xi$$

满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y)$$

6. 利用公式

$$\frac{\operatorname{arc\,tg}x}{x}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2+y^2}dy$$

计算积分

$$\int_0^1\frac{\operatorname{arc\,tg}x}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

§ 21.2

7. 研究下列含参变量广义积分在指定区间内的一致收敛性。

(1) $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin x\,dx\quad(0<\alpha_0\leqslant\alpha<+\infty)$；

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx\quad(-\infty<\alpha<+\infty)$；

(3) $\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx\quad(0\leqslant n<+\infty)$；

(4) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+\alpha)^2+1}dx\quad(0\leqslant\alpha<+\infty)$；

(5) $\int_0^{+\infty}e^{-x^2(1+y^2)}\sin x\,dx\quad(-\infty<x<+\infty)$。

8. 证明，函数

$$F(P)=\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}dx$$

当$P>0$时 连续.

9. 利用公式$\int_0^1 x^{a-1}dx=\frac{1}{a}$ $(a>0)$ 计算积分

$$I=\int_0^1 x^{a-1}\ln^n x\,dx.$$

10. 利用积分号下微分法计算下列积分

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x}}{x}dx$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$;

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\,dx$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$;

(3) $\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos bx\,dx$ $(a>0)$;

(4) $\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}x\sin bx\,dx$ $(a>0)$;

(5) $\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2dx$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$.

11. 利用概率积分计算下列积分

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(ax^2+2bx+c)}dx$ $(a>0,\ ac-b^2>0)$;

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx$ $(\alpha>0,\beta>0)$;

(3) $\int_0^{+\infty}e^{-\left(\frac{a^2}{x^2}+x^2\right)}dx$ $(a>0)$;

(4) $\int_0^{+\infty}x^{2n}e^{-x^2}\cos 2bx\,dx$ (n是自然数).

§ 21.4

12. 应用欧拉积分计算下列积分

(1) $\int_0^1\sqrt{x-x^2}\,dx$; (2) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ $(a>0)$;

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$; (4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\cos^4 x\,dx$.

13. 将下列积分用欧拉积分表示，并指出它的存在域.

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{(1+x)^n}dx$; (2) $\int_0^{+\infty}e^{-x^n}dx$ $(n>0)$;

(3) $\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx$；　　(4) $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} \ln x dx$。

14. 证明等式

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^4}dx \cdot \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^4}dx = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}$$

习题答案及提示

第十一章

§ 11.1

1. (1) 收敛，$-\frac{2}{3}$；(2) 发散；(3) 收敛，$3+2\sqrt{3}$；
   (4) 发散。
2. (1) 收敛，$\frac{3}{2}$；(2) 收敛，$\frac{5}{4}$；(3) 收敛，$\frac{1}{4}$；
   (4) 收敛，1；(5) 收敛，，$1-\sqrt{2}$。

§ 11.2

3. (1) 收敛；(2) 发散；(3) 收敛；(4) 收敛；
   (5) 发散；(6) 收敛；(7) 发散；(8) 发散；
   (9) 发散；(10) 发散。
4. (1) 收敛；(2) 收敛；(3) 发散；(4) 收敛。

5. 提示：不妨设 $a>0$，由题设存在N当$n>N$时，$a_n>(a-\delta)\frac{1}{n}$ $(a-\delta>0)$ 成立。取$p=n$，考虑

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}|>(a-\delta)\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)>\frac{a-\delta}{2}$$

$=\varepsilon_0$。

6. 提示：利用柯西收敛准则。

7. 提示：证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n^2\neq 0$。用反证法。假设$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n^2=0$，必有$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n+1)^2=0$，进而推出$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(2n+1)=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sin$ $(2n-1)$

$=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(2n-1)=0$。因此，$\lim\limits_{n\to\infty}[\sin^2(2n-1)+\cos^2(2n-1)]=0$，这与事实$\lim\limits_{n\to\infty}[\sin^2(2n-1)+\cos^2(2n-1)]=1$矛盾。

§ 11.3

8．（1）发散；（2）收敛；（3）发散；（4）发散；
（5）发散；（6）收敛；（7）发散；（8）收敛；
（9）收敛；（10）收敛；（11）收敛；（12）收敛；
（13）收敛；（14）收敛；（15）收敛；（16）收敛；

9．提示：用比较判别法推论，考虑一般项与$\frac{1}{n}$之比的极限。

10．提示：（1）由收敛的必要性，推出不等式$a_n^2<a_n$（n充分大时），然后用比较判别法。（2）用反证法，根据比较判别法推论，证得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛矛盾。

11．（1）当 $x\leqslant 1$ 时，发散；当 $x>1$ 时，收敛；
（2）当 $0<x\leqslant 1$ 时，发散；当$x>1$时，收敛；
（3）当 $0\leqslant x<1$ 时，收敛；当 $x\geqslant 1$ 时，发散。

12．提示：注意 $(a_n+b_n)^2=a_n^2+b_n^2+2a_nb_n$，根据定理11.2，由例题选讲的例 6 及题设立即推出结论成立。对后一个级数的证明，只须将q_n换为$\frac{1}{n}$，再由例 6 立刻得出结论。

§ 11.4

13．（1）绝对收敛；（2）绝对收敛；
（3）条件收敛；（4）绝对收敛；
（5）条件收敛；（6）条件收敛；
（7）绝对收敛。

14．（1）与（2）的敛散性结论相同：当 $P\leqslant 0$ 时，发散；当 $0<P\leqslant 1$ 时，条件收敛，当 $P>1$ 时，绝对收敛。

15．提示：因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$ 收敛，所以 $S=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}k(a_k-a_{k-1})$

$= -\sum_{k=0}^{n-1} a_k + na_n$，因此得 $\sum_{k=0}^{n-1} a_k = na_n - S_n$

§ 11.5

16. 提示：将 $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$ 各项乘以 $\frac{1}{2}$ 得 $\frac{1}{2}\ln 2 = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \cdots$ 然后将二收敛级数逐项相加，即可得到所求数之和为 $\frac{3}{2}\ln 2$。

17. 提示：用定义证明，存在充分大的 N 使得 $|S_n - S| = \left|\sum_{k=1}^{N} A_K + a_{p_{N+1}} + a_{p_{N+1}+1} + \cdots + a_n - S\right| \leqslant \left(\left|\sum_{K=1}^{N} A_K - S\right| + |a_{p_{N+1}}| + |a_{p_{N+1}+1}| + \cdots + |a_n|\right) < \varepsilon$。其中 $S = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$。

18. 提示：证明 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 中的 $c_n = 0$，$c_0 = 1$。

19. 提示：$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)^2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$，其中 $b_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1 = (-1)^{n-1}\left[\frac{1}{1}\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1}\right]$ 利利用 $\sqrt{1 \cdot n} \leqslant \frac{n+1}{2}$，$\sqrt{2(n-1)} \leqslant \frac{2+(n-1)}{2} = \frac{n+1}{2}$，…，$\sqrt{n \cdot 1} \leqslant \frac{n+1}{2}$，证明 $|b_n| \not\to 0\ (n \to \infty)$。

第十二章

§ 12.1

1. （1）$\left(\frac{1}{e},\ e\right)$,

（2） $(-\infty, -1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

（3） $(-\infty,+\infty)$. （4） $(-2,2)$.

（5） $(0,+\infty)$, （6） $[0,+\infty)$.

2. （1）绝对收敛域$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$,条件收敛域$\{-1\}$,

（2）绝对收敛域 $(0,\ 2)$.

（3）绝对收敛域 $(0,+\infty)$, 条件收敛域$\{0\}$.

（4）绝对收敛域$\left[K\pi-\frac{\pi}{6}, K\pi+\frac{\pi}{6}\right]$, $K=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

（5）绝对收敛域 $(-1,\ 1)$.

（6）绝对收敛域 $(0,+\infty)$.

§ 12.2

3. （1） (a) 一致收敛. (b) 非一致收敛.

（2）一致收敛. （3）一致收敛.

（4）一致收敛. （5）一致收敛.

（6）非一致收敛. （7）非一致收敛.

§ 12.3

4. （4）提示：取$P_{x_0}=n_0$, $x_{n_0}=\frac{1}{n_0}\in(0,+\infty)$.

5. （1）一致收敛于$S(x)=-\sin x$.

（2）一致收敛于$S(x)=\frac{1}{x}$.

6. （5）提示：优级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}$是二收敛级数 $a+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^{2n+1}}{n!}$

与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^{2n}}{n!}$之和.

（8）提示：$|x^3e^{-n^2x^2}| \leqslant \max\limits_{0<x<+\infty} x^3e^{-n^2x^2}$，用微分法求 $x^3e^{-n^2x^2}$ 的最大值。

7．提示：用M——判别法。

8，（1）（a）提示：用狄利克莱判别法．一致收敛。（b）用柯西一致收敛准则的否定叙述，非一致收敛。（2）一致收敛（狄利克莱，或一致收敛等价叙述）。（3）一致收敛．（4）一致收敛。（5）一致收敛．（6）一致收敛（用阿贝尔判别法）。

9．提示：必要性利用习题选讲例9；充分性采用反证法，根据一致收敛的否定叙述，得到一数列 $\{x_{n_K}\}\in(a,b)$，使得 $|S(x_{n_K})-S_{n_K}(x_{n_K})|\nrightarrow 0$（$K\to+\infty$）矛盾。

11，提示：利用柯西一致收敛准则。

14．提示：先求出级数的收敛域，在收敛域内利用定理12.7，求出$S'(x)$，再积分即可求出$S(x)$。

15．（1）一致收敛于 $f(x)\equiv 0$．（2）一致收敛于 $f(x)=x$。

（3）非一致收敛于 $f(x)\equiv 0$．（4）非一致收敛于 $f(x)\equiv 0$．

16．（1）（a）非一致收敛。（b）一致收敛。（2）非一致收敛。

17．（1）一致收敛于 $f(x)\equiv 0$．（2）非一致收敛。

18．提示：$|f_1(x)|=|\int_0^x f_0(t)dt|\leqslant\int_0^x|f_0(t)|dt\leqslant\int_0^x Mdt=Mx\leqslant Ma$（$0\leqslant x\leqslant a$），$|f_2(x)|=|\int_0^x f_1(t)dt|\leqslant\int_0^x|f_1(t)|dt\leqslant\int_0^x Mtdt=M\cdot\frac{x^2}{2!}\leqslant M\cdot\frac{a^2}{2!}$（$\leqslant x\leqslant a$）．由此得到：$|f_n(x)|\leqslant M\cdot\frac{a^n}{n!}$（$0\leqslant x\leqslant a$）．

19．提示：利用例题选讲之例9证明$\sup\limits_{0<x<1}|0-g_n(x)|=\max\limits_{0<x<1}|x^nf(x)|=\alpha^n|f(\alpha_n)|\to 0$（$n\to\infty$）．若对任意 $n\in N$，$\alpha_n\leqslant\delta<1$，则 $\alpha^n|f(\alpha_n)|\leqslant\delta^nM\to 0$（$n\to\infty$）（$|f(x)|\leqslant M$（$0\leqslant x\leqslant 1$））．若 $\alpha_n\to 1$（$n\to\infty$），则 $f(\alpha_n)\to 0$，从而 α_n，$|f(\alpha_n)|>|f(\alpha^n)|\to 0$（$n\to\infty$）．

第十三章

§ 13.1

1. （1）$[-e,e)$． （2）$\left[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right]$． （3）$(-4,4)$．

（4）$[-1,1)$． （5）$(-\infty,+\infty)$． （6）$(-1,1)$．

（7）$\left[-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right]$． （8）$(-r,r)$，$r=\max\{a,b\}$．

（9）$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$．

2．收敛半径$r=1$，收敛区间$(-1, 1)$．在左端点$x=-1$，当$P>1$时，给定级数绝对收敛；当$0<P\leqslant 1$时，条件收敛。在右端点$x=1$，当$P>1$时，绝对收敛；当$P\leqslant 1$时，发散。

§ 13.2

3. （1）$-\ln(1-x)$ $(-1\leqslant x<1)$．

（2）$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ $(-1<x<1)$．

（3）$\operatorname{arc\,tg}x$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$．

（4）$2x\operatorname{arc\,tg}x-\ln(1+x^2)$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$．

（5）$\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x$ $(-1<x<1)$．

4. （1）$\frac{1}{(1-x)^2}$ $(-1<x<1)$．

（2）提示：连续逐项积分二次．$\frac{2x}{(1-x)^3}$ $(-1<x<1)$．

（3）提示：$xS(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+2)x^{n+1}$，对幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+2)x^{n+1}$逐项积分，然后提取公因子$x^3$，再逐项积分。$\frac{x(3-x)}{(1-x)^3}$ $(-1<x<1)$．

6．提示：用定理13.8和定理12.6．

§ 13.4

8. （1）提示：令$a^x=y$，$\ln y=x\ln a$，$y=e^{(\ln a)x}$，

$$a^x=1+\ln a\cdot x+\frac{\ln^2 a}{2!}x^2+\cdots+\frac{\ln^n a}{n!}x^n+\cdots\ (-\infty<x<+\infty).$$

（2）$e^{-x^3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{3n}\quad(-\infty<x<+\infty)$．

（3）提示：利用公式$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$，

$$\sin^3 x=\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^{2n}-1}{(2n+1)!}x^{2n+1}\quad(-\infty<x<+\infty).$$

（4）$\frac{x^5}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+5}\quad(-1<x<1)$．

（5）$\frac{1}{(1+x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n\quad(-1<x<1)$．

（6）$\frac{x}{\sqrt{1-2x}}=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+1}\quad\left(-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\right)$．

（7）$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{1}{2}[\ln(1+x)-\ln(1-x)]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

$(-1<x<1)$．

(8) $\frac{1}{1+x+x^2}=\frac{1-x}{1-x^3}=1-x+x^3-x^4+x^6-x^7+x^9-x^{10}+$

$\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\operatorname{sgn}\left[\sin\frac{2(n+1)\pi}{3}\right]\quad(-1<x<1)$．

(9) $\operatorname{ch}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\quad(-\infty<x<+\infty)$．

9. （1）$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{x^{2n+1}}{2^n(2n+1)}\quad(-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2})$．

（2）$2|x|\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n}}{2n+1}\right]\quad(-1\leqslant x\leqslant 1)$．

10. (1) $1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{n!}x^{n}\ (-\infty<x<+\infty)$.

(2) $x+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^{2}-1}x^{2n+1}\ (-1\leqslant x\leqslant 1)$.

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\ (-1<x<1)$.

(4) $\sum_{n=}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}\ (-1\leqslant x\leqslant 1)$.

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^{n}\ \ (-1<x<1)$.

(6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!(2n+1)}x^{2n+1}\ (-\infty<x<+\infty)$.

(7) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)^{2}}x^{2n+1}\ (-1\leqslant x\leqslant 1)$.

11. $f(x)=\ln\frac{1}{2+2x+x^{2}}=\ln\frac{1}{1+x^{2}+2x+1}=-\ln[1+(x+1)^{2}]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(x+1)^{2n}}{n}\ (-2\leqslant x\leqslant 0)$.

12. $f(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}x^{-n}\quad(|x|>1)$.

13. $f(x)=\frac{x}{1+x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{n+1}\ \left(\left|\frac{x}{1+x}\right|<1\text{ 或 }x>-\frac{1}{2}\right)$.

§ 13.5

15. $\sqrt[3]{9}\approx 2\left[1+\frac{1}{24}-\frac{1}{(24)^{2}}\right]\approx 2.0799$. $|r_{3}|<\frac{2\times 5}{3^{4}\times 8^{3}}\approx 0.0002$.

16. (1) $\cos 1^{\circ}\approx 0.999848$，当项数 $n=1$ 时，有

$$|r_1| = \left|\frac{(-1)^{1+1}\left(\frac{\pi}{180}\right)^{2\times1+2}}{(2\times1+2)!}\cos\left(\theta\cdot\frac{\pi}{180}\right)\right| < 10^{-6}.$$

（2）$\frac{1}{\sqrt{e}} \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(-\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{1}{5}$

$\left(-\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^6 \approx 0.60653$．$|r_7| < \frac{1}{7!\,2^7} < \frac{1}{10^5}$.

（3）提示：令$\frac{1+x}{1-x} = 1.2$得$x = \frac{1}{11}$. 利用展开式

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots\right)\ (-1 < x < 1),$$

$$\ln 1.2 \approx 2\left[\frac{1}{11} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{11}\right)^3\right] \approx 2\,[0.090909 + 0.000250]$$

$$\approx 0.1823,$$

$$|r_2| < \frac{2}{5}\left[\left(\frac{1}{11}\right)^5 + \left(\frac{1}{11}\right)^7 + \cdots\right] = \frac{1}{300\times 11^3} < \frac{1}{10^5}.$$

17．当项数 $n = 4$ 时，$|r_4| < \frac{1}{9!}\cdot\frac{2^9}{9} < 0.002$.

$$\int_0^2 \frac{\sin x}{x}dx \approx 2 - \frac{1}{3!}\frac{2^3}{3} + \frac{1}{5!}\cdot\frac{2^5}{5} - \frac{1}{7!}\cdot\frac{2^7}{7} \approx 1.605.$$

第十四章

§ 14.3

3．（1）$\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$.

（2）$\frac{5}{16} - \frac{15}{32}\cos 2x + \frac{3}{16}\cos 4x - \frac{1}{32}\cos 6x$.

（3）$\frac{4}{\pi}\sum_{K=1}^{\infty}\frac{1}{2K-1}\sin(2K-1)x$.

（4）$\sum_{K=0}^{n}(\alpha_K\cos Kx + \beta_K \sin Kx)$.

4. (1) $\frac{2\sin\pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n\sin nx}{n^2-a^2}$.

(2) $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{K=1}^{\infty}\frac{\cos(2K-1)x}{(2K-1)^2}$.

(3) $1-\frac{1}{2}\cos x+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nx$.

5. (1) $\frac{2-\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{1}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos nx$

$+\frac{(\pi+1)(-1)^{n+1}+1}{n\pi}\sin nx\}$ $x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi)$.

(2) $\frac{2\pi^2+3\pi-6}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{1}{n^2\pi}[(2n+1)(-1)^n-1]\cos nx$

$+\{\frac{1}{n\pi}((\pi^2-\pi+1)(-1)^{n+1}+1)+\frac{2}{n^3\pi}((-1)^n-1)\}$

$\sin nx\}$ $x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi)$.

6. (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n}+\frac{4}{n^3\pi}[(-1)^n-1]\}\sin nx$.

(2) $\sum_{K=1}^{\infty}(-1)^{K+1}[\frac{2}{(2K-1)^2\pi}\sin(2K-1)x+\frac{1}{2K}\sin$

$2Kx]$.

7. (1) $\frac{1}{\pi}(ch\pi-1)+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+1)}[(-1)^n ch\pi-1]$

$\cos nx$.

(2) $\frac{\pi-4}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{K=1}^{\infty}\frac{1}{(2K-1)^2}\cos(2K-1)x$.

8. (1) $\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{K=1}^{\infty}\frac{(-1)^{K+1}}{2K^2-1}\cos 2Kx$.

(2) $\frac{4}{\pi}\sum_{K=1}^{\infty}\frac{1}{2K-1}\sin\frac{(2K-1)x}{4}$, $x\neq 4K\pi$ $(K=0,\pm1,$

$\pm2,\cdots)$.

9. (1) $\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}\sum_{K=1}^{\infty}\frac{1}{2K-1}\sin\frac{(2K-1)\pi x}{l}$。

(2) $-\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{4}{n^2}[(-1)^n-1]\cos nx\right.$

$\left.+\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{n}+\left(\frac{\pi^2}{n}-\frac{2}{n^3}\right)\left(1-(-1)^n\right)\right]\sin nx\right\}$.

(3) $\frac{3}{2}+\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{5}$ $x\in(-5,0)\cup(0,5)$.

§ 14.4

10. $x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$;

$x^3=2\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}+12\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n^3}$;

$x^4=\frac{\pi^4}{5}+8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}+48\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos nx}{n^4}$.

第十五章

§ 15.1

1. (1) 开区域; (2) 闭区域; (3) 开区域; (4) 闭区域。

3. E没有内点; 点集E 的所有的点皆为它的界点; x 轴上的点, $\left(\frac{1}{n},0\right)$, y 轴上的点$\left(0,\frac{1}{m}\right)$及原点 (0,0) 都是$E$ 的聚点, 也是它的界点。

4. 提示: 任取一点$P'\in U(P,\gamma)$, 去证明 $P'\in(U(P_0,R)$, 即 $\rho(P_0,P')<R$。

§ 15.2

5. (1) 是二元函数, (2) 是二元函数。

6. 不能肯定是常数。

7. （1）$\{(x,y)\mid |x|<+\infty,\ y\geqslant 1\}$，（2）$\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 2,\ -y\leqslant x\leqslant y\}$，（3）$y\neq \pm x$，（4）$\{(x,y)\mid 2n\pi\leqslant x^2+y^2\leqslant (2n+1)\pi,\ n=0,1,2,\cdots\}$。

§ 15.3

10. （1）$\ln 2$，（2）0，（3）0，提示：用$2|xy|\leqslant x^2+y^2$。

§ 15.4

12. （1）全数平面上连续，（2）全数平面上连续，（3）在数平面上除 $x\neq 0$，$y=0$ 外均连续。

15. 提示：在n 个函数值中，设最小的为 m，最大的为M，则有

$$m\leqslant\frac{f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2)+\cdots+f(x_n,y_n)}{n}\leqslant M,$$

再用介值定理。

16. 提示：任取一点 $(x_0,y_0)\in D$。作不等式

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\leqslant|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|$$

右端的第一项用李普希兹条件，第二项用关于 x 连续，可以做到任意小。（参看例题 8）。

第十六章

§ 16.1

1. （1）$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$，（2）$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{2x\sin x^2}{y}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{\cos x^2}{y^2}$，（3）$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{1+x^2}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{1+y^2}$，（4）$\dfrac{\partial z}{\partial x}=y(x+y)^{y-1}\cdot\ln(x+y)$　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\left[\ln(x+y)+\dfrac{y}{x+y}\right]\cdot z$，（5）$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{z}{x}\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{z}{y}\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=\left(\dfrac{x}{y}\right)^z\ln\dfrac{x}{y}$；（6）$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{yu}{xz}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{u\ln X}{z}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{yu}{z^2}\ln x$。

2. $f'_x(0,0)=0$, $f'_y(0,0)=0$, $f'_x(0,1)=1$, $f'_y(1,0)=1$.

3. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

6. 提示：$|f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)|\leqslant|f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)|+|f(x, y+\Delta y)-f(x, y)|$.

§ 16.2

7. （1）$dz=[\cos(x+y)-y\sin(xy)]dx+[\cos(x+y)-x\sin(xy)]dy$，（2）$dz=\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$；（3）$du=-\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(xdx+ydy+zdz)$；（4）$du=y^z(yx^{y-1}z^x+x^yz^x\ln z)\,dx+z^x(zy^{z-1}x^y+y^zx^y\ln x)\,dy+x^y(xz^{x-1}y^z+z^xy^z\ln y)\,dz$.

8. （1）$dz\Big|_{\substack{x=1\\y=0}}=dx+\frac{1}{2}dy$；（2）$du|_{(0,0,\frac{\pi}{4})}=\frac{\sqrt{2}}{2}dz$.

9. 提示：关于不可微的证明，用反证法假定可微，取$\Delta x=\Delta y$，得矛盾。

11. 提示：在D上任取两点，应用拉格朗日中值定理导出这两点的函数值相等。

12. （1）0.502，（2）108.972.

§ 16.3

13. $\frac{\partial z}{\partial l}\Big|_{\theta=45°}=\sqrt{2}$.

14. $\frac{\partial z}{\partial l}=\cos(\theta-\alpha)$，（1）$\alpha=\theta$；（2）$\alpha=\pi+\theta$；（3）$\alpha=\theta\pm\frac{\pi}{2}$.

15. $\operatorname{grad}u=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$；$\frac{\partial u}{\partial l}=4$.

16. $\frac{\pi}{2}$.

17. (1) $r=e_r$; (2) $\operatorname{grad}u=\frac{1}{r^2}(x\vec{i}+y\vec{j})$;

(3) $r=1$.

§ 16.4

18. (1) $\frac{dz}{dt}=4t^3+3t^2+2t$; (2) $\frac{du}{dt}=f'_x(x, y, z)+f'_y(x, y, z)\cos t-f'_z(x, y, z)\sin t$.

21. (1) $\frac{\partial z}{\partial t}=3t^2\sin S\cos S(\cos S-\sin S)$; $\frac{\partial z}{\partial s}=t^3(\sin^3 S+\cos^3 S)-2t^3\sin S\cos S(\sin S+\cos S)$; (2) $\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1+yf'_2$, $\frac{\partial z}{\partial y}=f'_1+xf'_2$; (3) $\frac{\partial z}{\partial x}=2xf'_1+ye^{xy}f'_2$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-2yf'_1+xe^{xy}f'_2$; (4) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}f'(\sqrt{x^2+y^2})$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}f'(\sqrt{x+y^2})$; (5) $\frac{\partial u}{\partial x}=2xf'(x^2+y^2+z^2)$, $\frac{\partial u}{\partial y}=2yf'(x^2+y^2+z^2)$, $\frac{\partial u}{\partial z}=2zf'(x^2+y^2+z^2)$;

(6) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}f'_1$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}f'_1+\frac{1}{z}f'_2$, $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{z}f'_2$; (7) $\frac{\partial u}{\partial x}=2x(f'_1+f'_2)+2yf'_3$, $\frac{\partial u}{\partial y}=2y(f'_1-f'_2)+2xf'_3$.

23. 提示：设$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$. 证明$\frac{\partial f}{\partial r}=0$.

§ 16.5

25. (1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2-8y^2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-16xy$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y^2-8x^2$;

(2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2\cos(x+y)-x\sin(x+y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\cos(x+y)-x\sin(x+y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-x\sin(x+y)$; (3) $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial z}=e^{xyz}(1+3xyz+x^2y^2z^2)$; (4) $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{11}+(x+y)f''_{12}+xyf''_{22}+f'_2$; (5) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2f'(x^2+y^2+z^2)+4x^2f''(x^2+y^2+z^2)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=4xyf''(x^2$

$+y^2+z^2)$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=f''_{11}+y^2f''_{22}+y^2z^2f''_{33}+2yf''_{12}+2yzf''_{13}+2y^2zf''_{23}$.

§ 16.6

30. $f(x,y)=5+2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2$.

31. (1) $1+x+\frac{1}{2!}(x^2-y^2)+0(\rho^2)$; (2) $x^2+y^2+0(\rho^2)$; (3) $1-\frac{1}{2}(x^2+y^2)+0(\rho^2)$.

§ 16.7

33. (1) 在点(1.0)取极值 -1; (2) 当$a<b$时，在点$(0,0)$取极小值0，在点((0,1)和(0,−1)取极大值be^{-1}; 当$a>b$时，在点$(0,0)$取极小值0，在点(1,0)和(−1,0)取极大值ae^{-1}; 当$a=b$时，在点(0,0)取极小值0。(3) 在点$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2e}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$取极小值$-\frac{1}{2e}$，在点$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2e}},\ \mp\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$取极大值$\frac{1}{2e}$。

34. 最小值为0，最大值为1.

35. 当边长为$\frac{2a}{\sqrt{3}}$的立方体时体积最大。

36. 提示：在$y=x^2$上任取一点，再用一点到直线的距离公式。$\frac{7}{4\sqrt{2}}$。

第十七章

§ 17.2

2. (1) $y'=-\frac{y}{x}$; (2) $y'=\frac{\cos x}{2\sin y}$; (3) $y'=\frac{y^2(1-\ln x)}{x^2(1-\ln y)}$;

(4) $y''=-\frac{18}{(x+2y)^3}$.

4．（1）$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{2-\cos z}$，$\frac{z}{\partial y}=\frac{1+x}{2-\cos z}$；（2）$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{xz}{x^2-y^2}$，

$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{yz}{x^2-y^2}$；（3）$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{z\ln z\ (\ln z-2)}{x^2(\ln z-1)^3}$。

5．提示：设$F(x,\ y,\ z)\ =f\ (x-mz)\ -y+nz=0$，求出$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$代入所证的方程。

§ 17.3

7．$J=-\frac{uv}{xy}$。　　8．$J=r$。　　9．$J=r$。

§ 17.4

11．（1）$\frac{dy}{dx}=\frac{lz-nx}{nz-mz}$，$\frac{dz}{dx}=\frac{mx-lz}{ny-mz}$；

（2）$\frac{dy}{dx}=\frac{f'_x-f'_xg'_u+f'_ug'_x}{1-f'_y-g'_u+f'_yg'_u-f'_ug'_y}$，

$\frac{dz}{dx}=\frac{g'_u+f'_xg'_y-f'_yg'_x}{1-f'_y-g'_u+f'_yg'_u-f'_ug'_y}$；

（3）$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{v}{v-u}$，$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{u}{u-v}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2(u-v)}$，$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{2(v-u)}$；

（4）$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\sin v}{e^u(\sin v-\cos v)+1}$，$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\cos v-e^u}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]}$。

12．提示：讨论方程组$F_1(x,y,u,v)=x-x(u,v)=0$，$F_2(x,y,u,v)=y-y(u,v)=0$。

13．提示：对方程$F(x,y,z)=y-xf(z)-\varphi(z)=0$对$x$和$y$求偏导数，得$f(z)\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}=0$，又对它分别对$x$，$y$求偏导数，消去$f(z)$和$f'(z)$可得结果。

14. $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=f''[y+g(y)]$，$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=f''[x+g(y)]g'(y)$，$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=$ $f''[x+g(y)][g'(y)]^2+f'[x+g(y)]g''(y)$。

§ 17.6

15. 切线：$\frac{x-\frac{\pi}{2}+1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$，法平面：$\left(x-\frac{\pi}{2}+1\right)+(y-1)+\sqrt{2}(z-2\sqrt{2})=0$。

16. 点$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{-1}{27}\right)$和$(-1,1,-1)$。

17. 切线：$\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{-1}$，法平面$3x+3y-z=3$。

18. 切平面：$ax\sin v_0-ay\cos v_0+u_0 z=au_0v_0$，法线：$\frac{x-u_0\cos v_0}{a\sin v_0}=\frac{y-u_0\sin v_0}{-a\cos v_0}=\frac{z-av_0}{u_0}$。

19. 提示：只须证两个曲面在点$(1,1,2)$的法线垂直。

21. 提示：任取一点(x_0,y_0,z_0)，求出通过该点的切平面方程，导出它通过点(a,b,c)。

§ 17.7

22. 当$x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$时，取最大值$\frac{1}{3\sqrt{3}}$。

23. $(1,0,0),(0,1,0),(-1,0,0),(0,-1,0)$。

25. 设$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，且在$\triangle ABC$内的任意点P至边BC，CA，AB的垂线长为x，y，z，则有$ax+by+cz=2S$，其中S为三角形的面积。由此得当$x=\frac{2as}{a^2+b^2+c^2}$，$y=\frac{2bs}{a^2+b^2+c^2}$，$z=\frac{2cs}{a^2+b^2+c^2}$时，取最小值$\frac{4s^2}{a^2+b^2+c^2}$。

26. 提示：求函数$z=\frac{1}{2}(x^n+y^n)$在条件$x+y=c$ $(c>0)$下的最小值。

第十八章

§ 18.1

1. （1）$36\pi\leqslant\iint_D(x^2+4y^2+9)\,d\sigma\leqslant100\pi$；（2）$2\leqslant\iint_D(x+y+1)\,d\sigma\leqslant8$。

§ 18.2

2. （1）0；（2）$\frac{\pi}{12}$；（3）$\frac{11}{120}$；（4）$\frac{1}{2}(1-e^{-1})$；

（5）$\frac{1066}{315}$；（6）$\frac{9}{8}\ln3-\ln2-\frac{1}{2}$。

3. （1）$\int_0^1dx\int_{x^2}^{x}f(x,y)\,dy$；（2）$\int_0^1dy\int_{e^y}^{e}f(x,y)\,dy$；

（3）$\int_{-1}^0dy\int_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}}f(x,y)\,dx+\int_0^8dy\int_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y}f(x,y)\,dx$；

（4）$\int_0^1dy\int_{\sqrt{y}}^{3-2y}f(x,y)\,dx$。

§ 18.3

4. （1）$\frac{2\pi a^3}{3}$；（2）$-6\pi^2$；

（3）$\pi\left(1-\frac{1}{e}\right)$；（4）$\frac{a^3}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$；

（5）$\frac{3\pi b^4}{32}$；（6）$\frac{\pi}{4}(2\ln2-1)$。

5. （1）$\frac{2}{3}\pi ab$；（2）$\frac{2}{21}ab$。

6. （1）$\left(\frac{15}{8}-2\ln2\right)a^2$；（2）$\pi a^2$；（3）$\frac{\pi a^2}{4}$。

7. （1）$\frac{(\beta-\alpha)(b^2-a^2)}{2(\alpha+1)(\beta+1)}$；（2）$\frac{\ln2}{2}a^2$。

8. （1）$\ln2\int_1^2f(u)\,du$；（2）提示：令$\sqrt{a^2+b^2}u=ax+by$，

$\sqrt{a^2+b^2}v = bx - ay$, $\quad 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}\, f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)\,du$.

9. (1) 4π; (2) $\frac{2}{3}$; (3) $\frac{4}{9}$.

10. (1) $\pi(1-e^{-R^2})$; (2) $\frac{\pi abc}{3}(2-\sqrt{2})$; (3) $\frac{9}{2}a^4$;

(4) $\frac{3}{4}$.

§ 18.4

11. (1) $\frac{\pi}{6}$; (2) $\frac{59\pi R^5}{480}$; (3) $\frac{4\pi}{15}abc(a^2+b^2+c^2)$.

12. (1) $\int_0^1 dz\int_{-z}^{z} dy\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z)\,dx = \int_{-1}^{1} dx \int_{|x|}^{1} dz\int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x,y,z)\,dy$; (2) $\int_0^1 dx\left\{\int_0^x dz\int_0^{1-x} f(x,y,z)\,dy + \int_x^1 dz\int_{z-x}^{1-x} f(x,y,z)\,dy\right\} = \int_0^1 dz\left\{\int_0^z dy \int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)\,dx + \int_z^1 dy\int_0^{1-y} f(x,y,z)\,dx\right\}$.

§ 18.5

13. (1) $\frac{16\pi}{3}$; (2) $\frac{1}{8}$; (3) $\frac{8}{9}a^2$; (4) $\frac{1}{48}$;

(5) $\frac{4\pi}{15}(A^5-a^5)$; (6) $\pi\left(\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}\right)$; (7) $\frac{4\pi}{3}a^2$;

(8) 0.

14. (1) $\frac{32\pi}{3}$; (2) πa^3; (3) $\frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}$; (4) $\frac{1}{2}$;

(5) $\frac{\pi^2 abc}{4}$.

§ 18.6

15. (1) $\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$; (2) $\frac{a^2\pi}{2}$; (3) $\sqrt{2}\,\pi$;

(4) $16a^2$。

16. (1) $\overline{x}=\frac{3}{2}x_0$, $\overline{y}=\frac{3}{8}y_0$; (2) $\overline{x}=\overline{y}=\frac{a}{5}$; (3) $\overline{x}=\overline{y}=0$, $\overline{z}=\frac{3}{8}a$; (4) $\overline{x}=\overline{y}=\frac{2}{5}a$, $\overline{z}=\frac{7}{30}a^2$。

17. (1) $I_z=\frac{1}{8}\pi a^4\rho$; (2) $I_z=\frac{4\pi abc}{15}(a^2+b^2)$。

第十九章

§ 19.1

1. (1) $\frac{265}{15}a^3$; (2) $2\pi^2(1+2\pi^2)a^3$; (3) 提示：令 $x=r\cos^3\theta$, $y=r\sin^3\theta$, 代入到方程$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$中得 $r=a$, 从而得内摆线参数方程为$x=a\cos^3\theta$, $y=a\sin^3\theta$ $(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$。 $4a^{\frac{7}{3}}$; (4) 提示：以极角θ 为参数，求出双纽线的参数方程：$x=a\cos^{\frac{1}{2}}2\theta\cdot\cos\theta$, $y=a\cos^{\frac{1}{2}}2\theta\cdot\sin\theta$, $-\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{5\pi}{4}$。 $2a^2(2-\sqrt{2})$; (5) $2a^2$。

2. (1) $2\pi a^2$; (2) $\frac{1}{3}[(2+t_0^{\ 2})^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}}]$。

§ 19.2

3. (1) $-\frac{14}{15}$; (2) $\frac{4}{3}$; (3) $\frac{3\pi}{16}a^{\frac{4}{3}}$; (4) -2π; (5) $\frac{\pi}{4}-1$。

4. (1) $\frac{1}{35}$; (2) $-\pi a^2$; (3) -4。

§ 19.3

6. (1) $\frac{1}{6}$; (2) $-2\pi ab$; (3) 0。

7. (1) $\frac{a^2}{6}$; (2) a^2.

§ 19.4

8. (1) -2; (2) 62; (3) $-\frac{3}{2}$; (4) 9.

9. (1) $u=\frac{x^3}{3}+x^2y-xy^2-\frac{y^3}{3}+c$; (2) $u=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\operatorname{arc\,tg}\frac{3x-y}{2\sqrt{2}y}+c_1=-\frac{-1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{3y-x}{2\sqrt{2}x}+c_2$.

§ 19.5

10. (1) πa^3; (2) $\frac{3-\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-1)\ln 2$; (3) $2\pi c^2$.

§ 19.6

11. (1) 0; (2) $\frac{8\pi}{3}(a+b+c)R^3$.

§ 19.7

12. (1) $3a^4$; (2) $-\frac{\pi h^4}{2}$.

§ 19.8

13. (1) 0; (2) $-2\pi a(a+h)$; (3) $-\frac{9}{2}a^3$.

14. (1) $-53\frac{7}{12}$; (2) $b-a$; (3) $\int_{x_1+y_1+z_1}^{x_2+y_2+z_2} f(u)\,du$.

15. (1) $\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz+c$; (2) $x-\frac{x}{y}+\frac{xy}{z}+c$.

第二十章

§ 20.1

1. （1）$\frac{b}{a^2+b^2}$；（2）$\frac{1}{\ln 2}$；（3）1；（4）发散；（5）π；（6）$\frac{\pi^2}{8}$；（7）$\frac{\pi}{2(a\sqrt{b}+b\sqrt{a})}$。

2. 提示：对任意的 $A>c>a$，有

$$\int_a^A f(x)\,dx=\int_a^C f(x)\,dx+\int_C^A f(x)\,dx.$$

3. 提示：由 2 题得 $\int_c^{+\infty} f(x)\,dx=\int_a^{+\infty} f(x)\,dx-\int_a^c f(x)\,dx$，令 $C\to+\infty$，对上式取极限。

§ 20.2

4. 提示：由 2 题知，$\int_0^{+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}dx$ 与 $\int_1^{+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}dx$ 有相同的敛散性（$P_n(x)$ 无零点），$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{P_m(x)}{P_n(x)}}{\frac{1}{x^{n-m}}}=$ 常数。

6. 提示：利用无穷积分的分部积分公式

7. （1）收敛；（2）收敛；（3）收敛；
   （4）发散；（5）收敛；（6）收敛；
   （7）收敛；（8）发散；（9）发散；

8. （1）绝对收敛；（2）条件收敛；（3）条件收敛；
   （4）条件收敛。

9. （1）当 $1<\lambda$ 时，绝对收敛；当 $0<\lambda\leqslant 1$ 时条件收敛。（2）当 $1<P$ 时，绝对收敛；当 $0<P\leqslant 1$ 时条件收敛。

10. 提示：先用分部积分公式，再用狄利克莱判别法。

11. 提示：由不等式 $|f(x)g(x)|\leqslant\frac{f^2(x)+g^2(x)}{2}$，并根据比较判别法知，无穷积分 $\int_a^{+\infty}|f(x)g(x)|dx$ 收敛。$[f(x)+g(x)]^2=f^2(x)+g^2(x)$

$+2f(x)g(x)$。

§ 20.3

12. （1）$\frac{9}{2}$；（2）-1；（3）$\frac{\pi^2}{8}$；（4）$\frac{\pi}{2}(\alpha+\beta)$。

§ 20.4

13. （1）收敛；（2）收敛；（3）收敛；（4）收敛；（5）收敛。

14. （1）当$P<1$且$q<1$时收敛；当$P\geqslant 1$而q为任意数或当$q\geqslant 1$而P任意时发散。（2）当$n<2$时，收敛；当$n\geqslant 2$时，发散。（3）当$\alpha>0$且$\beta>0$时，收敛；当$\alpha\leqslant 0$，β任意和$\beta\leqslant 0$，α任意皆发散。（4）当$n<3$时，收敛；当$n\geqslant 3$时，发散。

15. （1）当$1<\alpha<2$时，广义积分绝对收敛；当$\alpha\leqslant 1$和$\alpha\geqslant 2$时，皆发散。（2）当$P>-2$且$P<q\leqslant P+1$时，积分条件收敛；当$P>-2$且$q>P+1$时，积分绝对收敛；其他情形发散。（3）条件收敛。（4）当$n\geqslant m+2$时，绝对收敛；当$n=m+1$时，条件收敛；当$n\leqslant m$时，发散。

16. $-\frac{\pi}{2}\ln 2$。

第二十一章

§ 21.1

1. （1）$\frac{8}{3}$；（2）$\frac{\pi}{4}$。

2. 提示：验证定理21.5的条件。

3. （1）当$|a|\leqslant 1$时，等于零；当$|a|>1$时，等于$\pi\ln a^2$；

（2）当$a\geqslant 0$时，等于$\frac{\pi}{2(1+a)}$，当$a<0$时，等于$\frac{\pi}{2(1-a)}$。

4. $\ln\frac{b}{a}$。

5. 提示：参看例题选讲的例3。

6. 提示：首先建立$\int_0^a \frac{dx}{1+x^2y^2}=\frac{\text{arcig}\, dx}{x}$并求$\frac{dI}{da}\int_0^1 \left[\int_0^a \frac{dy}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\right] dx\}$当$a=1$时，等于$\frac{\pi}{2}\ln(\sqrt{2}+1)$。

§ 21.2

7. （1）一致收敛；（2）一致收敛；（3）一致收敛；（4）一致收敛；（5）非一致收敛（用定义证明），

取 $x=\frac{1}{M}$，原积分可变成$e^{-\frac{1}{M^2}}\frac{\sin\frac{1}{M}}{\frac{1}{M}}\int_M^{+\infty} e^{-u^2}du$ （$u=\frac{s}{M}$），对充分大的

M，取$e^{-\frac{1}{M^2}}\frac{\sin\frac{1}{M}}{\frac{1}{M}}>\frac{1}{2}$，于是有$\int_M^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)}\sin x dy>\frac{1}{2}\int_M^{+\infty} e^{-u^2}du>$

ε。

8. 提示：验证定理21.7的条件。

9. 提示：参看例题选讲的例 7 。

10. （1）$\frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}$；（2）$\text{arc tg}\frac{m(\beta-\alpha)}{m^2+\alpha\beta}$；（3）$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$；（4）$\frac{b\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$；（5）$\ln\frac{(2\alpha)^{2\alpha}(2\beta)^{2\beta}}{(\alpha+\beta)^{2(\alpha+\beta)}}$。

11. （1）$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\ e^{\frac{b^2-ac}{a}}$；（2）$\sqrt{a}\ (\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})$；

（3）$\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-2a}$；（4）$(-1)^n\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}}\cdot\frac{d^{2n}}{b^{2n}}e^{-b^2}$。

§ 21.4

12. （1）$\frac{\pi}{8}$；（2）$\frac{\pi a^4}{16}$；（3）$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$；（4）$\frac{3\pi}{512}$。

13. （1）$I=B(m, n-m)$，$n>m>0$；（2）$I=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$，

$n>0$；（3）$I=\Gamma(P+1)$，$P>-1$；（4）$I=\dfrac{\pi^2\cos p\pi}{\sin^2 p\pi}$，

$0<p<1$。

14. 提示：变量替换 $x^2=t$

后　　记

本书是在总结我系本科和函授本科数学分析教学经验的基础上，参照教育部所制定的高师《数学分析教学大纲》编的。

本书系统地介绍了级数理论、多元函数微分学、隐函数理论、多元函数积分学。编写的指导思想、原则及特点均与上册相同，这里不再重述。

参加本书编写的还有张树元、沈呈民，陈广义绘制了全部插图。

本书由刘玉琏副教授审定，辽宁大学数学系的部分同志审阅了原稿，提出一些很好的意见，在此一并致谢。

由于水平所限书中一定存在缺点和错误欢迎读者批评指正。

编　　者

1983年12月于长春